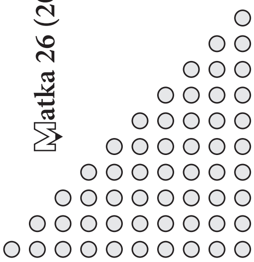
Matka 26 (2017./2018.) br. 104

MALO ZBRAJANJA PRIRODNIH BROJEVA

Franka Miriam Brückler, Zagreb

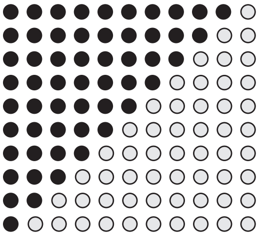
Svi znamo prirodne brojeve: 1, 2, 3...



Što napraviti ako dobiješ zadatak zbrojiti sve prirodne brojeve od 1 do, recimo, 2018?

Još su stari Grci u 6. st. pr. Kr. primijetili dvije stvari.

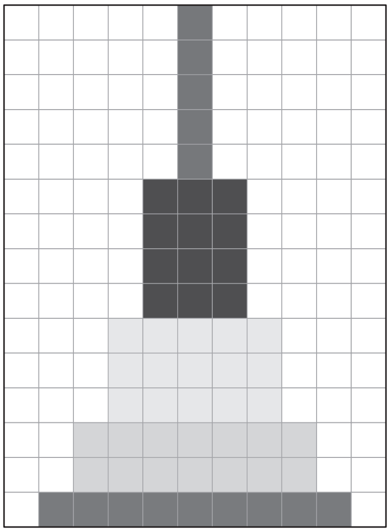
Prvo, ako zbrajaš uzastopne prirodne brojeve od 1 do nekog broja, recimo 10, možeš ukupni zbroj prikazati slaganjem kamenčića u trokut u kojemu redovi imaju po 1, 2..., 10 kamenčića: (Slika na rubu)



Takve su brojeve nazvali *trokutnim brojevima*. Zatim su primijetili sljedeće: ako složimo dva jednaka trokutna broja jedan do drugog, tako da se „spoje” u jedan pravokutnik, dobit ćemo pravokutnik koji ima redova koliko i ti trokutni brojevi, a stupaca za 1 više. Recimo, ako spojimo dva trokutna broja s 10 redova (tj. dva zbroja 1 + 2 + ... + 10), dobit ćemo pravokutnik s 10 redova i 11 stupaca: (Slika na rubu)

Stoga je 10. trokutni broj, 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10, jednak polovini od 10 puta 11, tj. 55. Odnosno, općenito je zbroj prirodnih brojeva od 1 do nekog broja jednak polovini umnoška zadnjeg člana zbroja sa sljedećim većim prirodnim brojem. Npr. 2018. trokutni broj je 1 + 2 + ... + 2018 = $\frac{2018 \cdot 2019}{2}$ = 2 037 171.

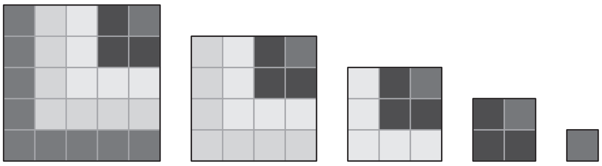
Možemo li nešto slično napraviti ako želimo zbrajati samo kvadrate[1] uzastopnih prirodnih brojeva? Možemo, ali se odgovarajuće sličice nije tako lako dosjetiti! Pogledaj sljedeću sličicu. U njoj je broj redova trokutni broj (brojiš li odozdo, imaš 1 + 2 + 3 + 4 + 5 redova, tj. 5. trokutni broj $\frac{5 \cdot 6}{2}$). Broj stupaca je za 1 veći od dvostrukog rednog broja toga trokutnog broja (11 je 1 plus dvaput 5). Dakle, sve skupa imamo $(1 + 2 \cdot 5) \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} =$ = 165 kvadratića.



[1]Kvadrat broja *n* je taj broj pomnožen sam sa sobom. Oznaka je n^2. Recimo, kvadrat od 5 je $5^2 = 25$.

Pogledaj sada prvo bijele kvadratiće. Njih ima točno dva puta koliko su kvadratni brojevi brojeva od 1 do 5, dakle bijelih kvadratića imamo $2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)$, tj. koliko je dvostruki zbroj uzastopnih kvadratnih brojeva.

Ako sad naposljetku pogledamo obojene kvadratiće, nije teško uvjeriti se da i njih ima $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$:



Sve skupa, dakle naših 165 kvadratića, pokriva triput njih $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$, dakle $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$ trećina je od 165, odnosno 55.

Dakle, općenito će zbroj od n uzastopnih kvadratnih brojeva biti trećina n-tog trokutnog broja pomnoženog s $1 + 2n$. Primjerice, ako želiš znati koliko je $1^2 + 2^2 + ... + 100^2$, prvo izračunaš 100. trokutni broj ($100 \cdot 101/2 = 5\,050$), to pomnožiš s $1 + 2 \cdot 100 = 201$ i podijeliš brojem 3. Ispast će 338 350.

A što sa zbrojem kubova, tj. umnožaka broja sa sobom dvaput (kub od primjerice 4 je $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$, a označava se s 4^3)? Pravilo je lako zapamtiti: Zbroj kubova od prvog do n-tog je točno kvadrat odgovarajućeg trokutnog broja! Npr. $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$, što je točno jednako $(1 + 2 + 3 + 4)^2 = 10^2$. Pokušaj za ovu posljednju jednakost $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$ smisliti sličicu poput gornjih iz koje se vidi da to pravilo vrijedi i za druge „zadnje” brojeve osim 4. Oprez: Nije baš lako. Kao *hint* ćemo ti reći: nacrtaj mrežu kvadratića u kojoj je i broj redova i broj stupaca $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, dakle u kojoj je $(1 + 2 + 3 + 4)^2$ kvadratića, te smisli kako ju raspodijeliti. Rješenje ćemo dati u sljedećem broju, a sad je vrijeme za odgovor na pitanje iz prethodnog broja.

Pitanje je bilo koliko strana ima tetrafleksagon čiji si predložak imao u prethodnom broju *Matke* i koje se kombinacije tih strana mogu istovremeno naći s vanjske strane fleksagona. Broj strana toga fleksagona je 4 – u svakom trenutku po 6 kvadratića od dvije njegove strane vidljivo je sprijeda i straga, a ostale dvije strane sakrivene su do sljedećeg izokretanja. Ako strane koje su bile izvana na početku (neposredno nakon lijepljenja) označimo s 1 i 2, a ostale dvije s 3 i 4, imamo prvu moguću kombinaciju vidljivih strana: 1-2. Ako „sakrijemo” stranu 1, vidjet ćemo 2 i 3: 2-3. Ako sad „sakrijemo” i stranu 2, na vidjelo će izaći strana 4: 3-4. Dalje se ne da otvarati u istom smjeru – ako sad pokušaš „uvući” stranu 3, nećeš moći drugačije osim da se vratiš na 2-3 i natrag na 1-2. Tu je opet kraj! Dakle, ovaj fleksagon daje samo tri kombinacije svojih strana: 1-2 ... 2-3 ... 3-4. Nikad nećeš moći istovremeno vidjeti 1 i 4, 2 i 4 niti 1 i 3! No, postoje i drugačiji fleksagoni. Ako te zanimaju, lako ćeš ih naći na internetu!

MATKA 104.indd 247 6.5.2018. 19:38:03