MATEMAGIČAR

ⰏⰀⰕⰅⰏⰀⰃⰋⰝⰀⰓ

Petar Mladinić, Zagreb

KOORDINATNA METODA I RJEŠAVANJE PROBLEMA

Današnji razvoj računala i računalnog softvera omogućuje nam jednostavnu uporabu ideja i metoda starih matemagičara. U ovom ćemo tekstu razmotriti i ilustrirati kako danas lako i uspješno možemo uporabiti metodu grafičkog rješavanja problema u situacijama u kojima je numeričko rješavanje puno teže i kompliciranije.

Računalni softver brzo nam i lako omogućuje crtanje pravokutnog koordinatnog sustava, pravaca, presjeka pravaca i očitovanje koordinata točaka.

*****

1. Ideja koordinata

Analitička geometrija nastala je u prvoj polovini 17. stoljeća kada se uspostavila veza između algebre i geometrije. U temeljima analitičke geometrije, koju su prvi izgradili stari matemagičari **Pierre de Fermat** (1601. – 1665.) u djelu *Uvod u učenje o ravninskim i prostornim mjestima* (1636.) i **René Descartes** (1596. – 1650.) u djelu *Rasprava o metodi* i jednome od njezinih triju priloga *Geometrija* (1636.) leže dvije ideje:

– ideja koordinata, koja je dovela do aritmetizacije ravnine, tj. do toga da se svakoj točki pridruži uređeni par brojeva,

– ideja interpretacije bilo koje jednadžbe s dvije nepoznanice kao neke krivulje koja je odgovarajućom jednadžbom definirana kao neko geometrijsko mjesto točaka.

Pokazat ćemo kako novi i mladi matemagičari mogu na jednostavan način uporabom ideje starih matemagičara rješavati složene probleme koji se inače rješavaju numeričkim metodama.

Poznavanje crtanja pravaca u koordinatnoj ravnini (koordinatnom sustavu) i čitanje koordinata točaka jedine su činjenice kojima se uspješno rješavaju ovi problemi.

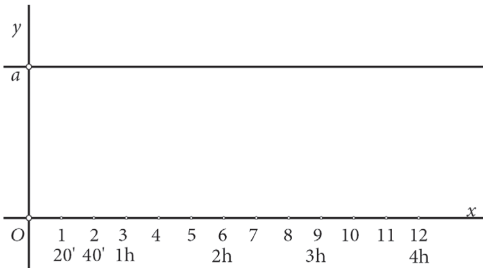
*****

2. Primjena metode

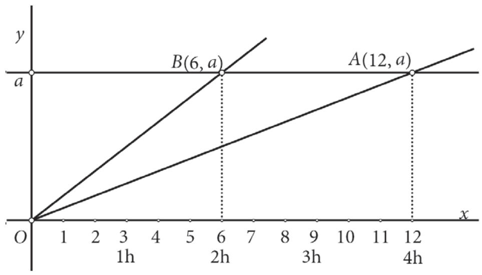
Riješimo nekoliko primjera kao ilustraciju mladim matemagičarima kako mogu uporabiti metodu grafičkog rješavanja problema.

Primjer 1. Spremnik se može napuniti jednom cijevi za 4 sata, a drugom za 2. Za koje će se vrijeme napuniti spremnik ako se puni objema cijevima istovremeno?

Rješenje. Nacrtajmo pravokutni koordinatni sustav. Os apscisa vremenska je os i neka svakoj jedinici odgovara vrijeme od 20 minuta. Količinu tekućine u spremniku predočit ćemo na osi ordinata. Neka je obujam tekućine punog spremnika jednak *a* (Slika 1.).

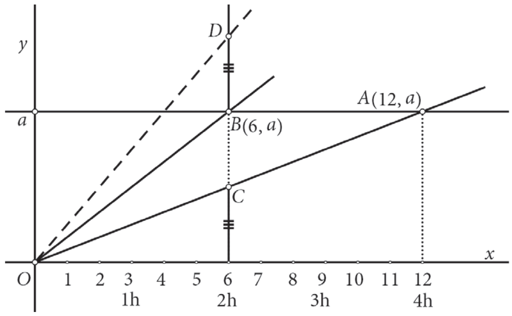


Slika 1.



Slika 2.

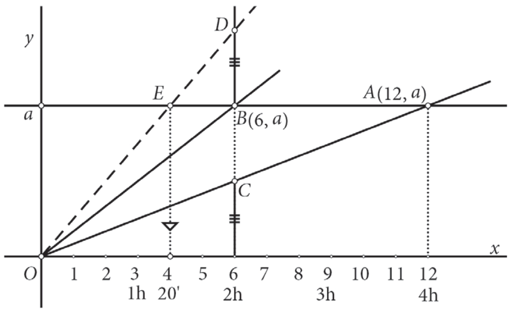
Punjenje prvom cijevi opisano je polupravcem određenim točkama $O(0, 0)$ i $A(12, a)$, a drugom cijevi polupravcem koji određuju točke $O(0, 0)$ i $B(6, a)$ (Slika 2.). Rješenje ćemo dobiti ako grafički zbrojimo ova dva polupravca. Dobit ćemo novi pravac (Slika 3.).



Slika 3.

Ordinata točke *D* dobije se ako se zbroje ordinate točaka *B* i *C*, pa novi polupravac određuju točke $O(0, 0)$ i $D(6, y_B + y_C)$.

I – zadatak je riješen! Trebamo samo očitati apscisu presjeka *E* polupravca *OD* i pravca $y = a$ (Slika 4.). Dakle, rješenje je $x = 4$, što odgovara vremenu od 1 sata i 20 minuta.



Slika 4.

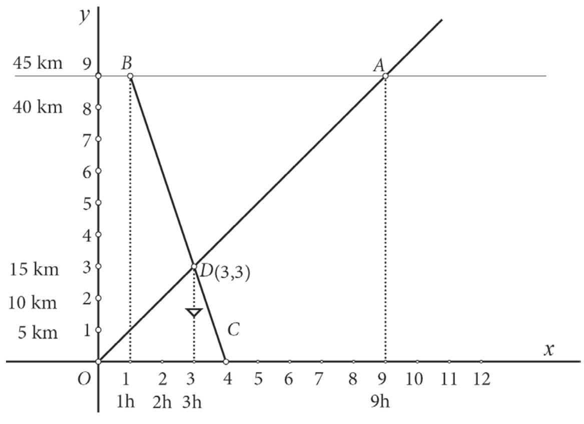
U slučajevima kad jedna cijev počinje kasnije puniti spremnik, njezin pravac ne prolazi ishodištem nego tom kasnijom točkom.

Ako se spremnik jednom cijevi puni, a drugom prazni, onda se umjesto zbroja ordinata uzima njihova razlika.

Sasvim se slično grafički rješavaju problemi s više cijevi ili problemi gdje više djelatnika različite kakvoće radi isti posao.

Primjer 2 . Iz grada A pođe prema gradu B pješak koji svakoga sata prijeđe 5 km. Gradovi su udaljeni 45 km. Prema njemu iz grada B jedan sat kasnije krene biciklist brzinom od 15 km na sat. Kada će se i na kojoj udaljenosti od grada A oni sresti?

Rješenje. Na osi apscisa jedinična dužina predstavlja 1 sat, a na osi ordinata 5 km. Polupravac kojim opisujemo kretanje pješaka određen je točkama $O(0, 0)$ i $A(9, 9)$, tj. $x_A = 9$ sati, $y_A = 45$ km. Kretanje biciklista opisano je polupravcem $B(1,9)$ ($x_B = 1$ sat i $y_B = 9 \cdot 5 = 45$ km) i $C(4,0)$ (Slika 5.).



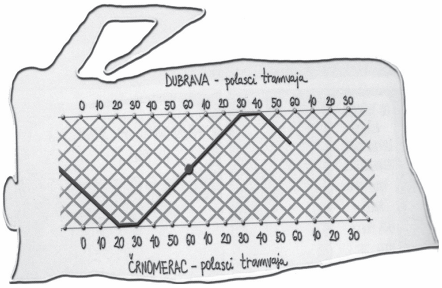
Slika 5.

Sjecište ovih pravaca je točka $D(3,3)$.

Dakle, oni su se sreli nakon što je pješak hodao tri sata, i to na udaljenosti 15 km od grada *A*.

Primjer 3. U knjizi *Zgode i mozgalice družbe Matkači* objavljen je zadatak *Koliko ima jedanaestica*? Evo preslike tog zadatka.

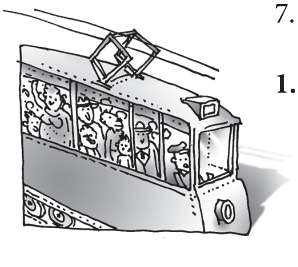
Rješenje. Na slici 6. označeno je kretanje „jedanaestice“. Nakon dolaska na Črnomerec (ili Dubravu) „jedanaestica“ stoji 10 minuta. U trenutku polaska na Črnomerec dolazi nova „jedanaestica“. To je prva koju su Matkači sreli. Isto tako će u trenutku dolaska u Dubravu sresti jednu „jedanaesticu“ koja odlazi. Na pruzi će (vide se kao presjeci pravaca) sresti još 11 „jedanaestica“. To je, s „jedanaesticom“ u kojoj su Matkači, ukupno 14 tramvajskih vlakova. Brojimo li sedam susreta od početka vožnje (na slici je sedmi susret označen kružićem), vidjet ćemo da su točno na pola puta od Dubrave i da će sljedeći tramvaj sresti za 5 minuta.



Slika 6.

3. Zadatci

Evo nekoliko zadataka za vježbu i provjeru metode. Zadatke 5. i 6. zadao je jedan od najvećih matemagičara **Isaac Newton** (1643. – 1727.), a zadatci od 7. i 8. bili su zadani na matematičkim natjecanjima u RH.



1. Danica stanuje na početku Ulice tulipana, a Ante na kraju. Ulica je duga 7 km. U 6 sati i 5 minuta pješice istovremeno krenu jedno prema drugome brzinom od 3.5 km na sat. Ulicom voze tramvaji samo prema Antinu stanu brzinom od 14 km na sat. Prvi tramvaj kreće s početka ulice u 6 sati i 30 minuta, a ostali svakih 10 minuta.

Danicu zanima koliko će tramvaja prije nje stići do kraja ulice, a Antu zanima koliko će tramvaja sresti do početka ulice.

2. Djelatnik *A* završi neki posao za 12 sati, a djelatnik *B* za 8. Za koje će vrijeme oba djelatnika završiti taj posao ako:

- počnu raditi istodobno,
- drugi počne raditi 3 sata kasnije od prvog?

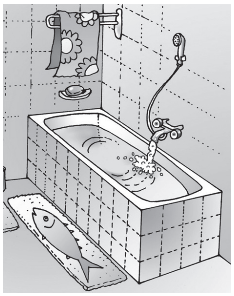
3. Spremnik se može napuniti trima cijevima, prvom za 15, drugom za 12 i trećom za 10 sati. Za koje će vrijeme napuniti spremnik ako se otvore:

- sve 3 cijevi,
- samo 2 cijevi?

4. Programer reda vožnje u pomorskoj tvrtki *Daleka obala* mora povezati luke *A* i *B* brodskim vezama. Istovremeno iz luka *A* i *B* kreću brodovi u 6 i 18 sati. Plovidba svakog broda traje točno 6 dana. Koliko treba brodova za uspješno održavanje ovakvog reda vožnje? Koliko će brodova prve plovidbene linije sresti svaki brod druge?

5. Tri djelatnika zajedno rade neki posao. Djelatnik *A* može napraviti taj posao za 3 tjedna, djelatnik *B* može napraviti tri puta veći posao za 8 tjedana, a djelatnik *C* pet puta veći posao za 12 tjedana. Za koje će vrijeme posao napraviti zajedno?

6. Dvije skupine vojnika, međusobno udaljene 59 milja, pješače jedna prema drugoj. Skupina *A* za 2 sata prijeđe 7 milja, a skupina *B* za 3 sata prijeđe 8 milja. Skupina *B* krenula je na put jedan sat kasnije od skupine *A*. Koliko milja prijeđe skupina *A* do susreta sa skupinom *B*?



7. Zaboravni profesor otvorio je slavinu za vodu nad kadom i zaboravio začepiti kadu. Poznato je da se prazna kada napuni za 20 minuta, a puna isprazni za 30 minuta. Profesor se sjetio čepa nakon 48 minuta. Je li se voda u kadi prelila?

8. Jedan traktor može sam preorati neku njivu za 7 sati, a drugi za 5 sati. Ako bi oba traktora zajedno orala tu njivu, drugi bi traktor preorao 7 hektara više od prvog. Koliko hektara ima ta njiva?