IVO SJEKAVICA

YU ISSN 0469—6255
NAŠE MORE 36 (1 — 2) 47 (1989)

Jednadžba ortodrome i njena moguća primjena u navigaciji

UDK 527.6

Izvorni znanstveni rad

Sažetak

U članku su izvedene opća i parametarska jednadžba ortodrome i pokazana je njihova moguća primjena u navigaciji. Transformiranjem opće jednadžbe dobivene su matematičke relacije za određivanje elemenata ortodrome bez uobičajenih rješavanja sfernih trokuta. Izvedene su posebne relacije za određivanje međutočaka ortodrome, kursa ortodromskog, vrha ortodrome, presjecišta ortodrome s ekvatorom i određivanje točaka ortodrome na osnovi izabranih geografskih širina. Posebno je ukazano i na moguću primjenu parametarske jednadžbe ortodrome u slučaju kad se želi određivati međutočke ortodrome na osnovi uzastopno odabranih ortodromskih udaljenosti od pozicije polaska do pozicije dolaska. Kod primjene izvedenih matematičkih relacija pretpostavlja se upotreba običnih ili programiranih računala.

Uvod

Elementi ortodrome u navigaciji određuju se rješavanjem sfernih trokuta ili grafički na gnomonskoj karti. Kod toga se, pri numeričkom rješavanju sfernih trokuta, mogu koristiti logaritmi, razne nautičke tablice ili danas sve više obična ili programirana računala.

U ovom članku izvest će se jednadžba ortodrome i pokazati mogućnost njene primjene u navigaciji. Kod toga će se raznim transformacijama jednadžbe dobiti niz matematičkih relacija za direktno određivanje elemenata ortodrome bez rješavanja sfernih trokuta. Pri kraju članka izveden je i jedan parametarski oblik jednadžbe ortodrome koji se može prikladno upotrijebiti, kad se želi određivati međutočke ortodrome na osnovi uzastopnih ortodromskih udaljenosti. U mogućoj primjeni dobivenih relacija pretpostavlja se upotreba običnih ili programiranih računala.

Jednadžba ortodrome postavit će se i izvesti na osnovi cotangensovog poučka za sferni trokut i činjenice da su u svakoj točki ortodrome cotangensi kursa ortodromskog prema odredištu i prema polazištu jednaki.

Relacije za cotangense kursova su:

$$\mathrm{ctg}\ K_o = \frac{\mathrm{tg}\ f_2 \cos f - \sin f \cos(L_2 - L)}{\sin(L_2 - L)} \tag{1}$$

$$\mathrm{ctg}(K_o + 180^o) = \frac{\mathrm{tg}\ f_1 \cos f - \sin f \cos(L_1 - L)}{\sin(L_1 - L)} \tag{2}$$

odakle se dobije da je:

$$\frac{\mathrm{tg}\ f_2 \cos f - \sin f \cos(L_2 - L)}{\sin(L_2 - L)} = \frac{\mathrm{tg}\ f_1 \cos f - \sin f \cos(L_1 - L)}{\sin(L_1 - L)} \tag{3}$$

U relacijama (1), (2) i (3) argumenti trigonometrijskih funkcija su:
(f_1, L_1) — geografske koordinate pozicije polaska,
($_2$, L_2) — geografske koordinate pozicije dolaska,
(f, L) — promjenljive geografske koordinate ortodrome,
K_0 — ortodromski kurs.

Ako se u relaciji (3) razviju sinusi i cosinusi s argumentima (L_1—L) i (L_2—L), nakon sređivanja i reduciranja dobit će se jednadžba ortodrome koja se može pisati u obliku:

$$(\mathrm{tg}\ f_1 \sin L_2 - \mathrm{tg}.\ f_2 \sin L_1) \cos L + (\mathrm{tg}\ f_2 \cos. L_1 - \mathrm{tg}\ f_1 \cos L_2) \sin L - \sin(L_2 - L_1)\ \mathrm{tg}\ f = 0 \tag{4}$$

Budući da su izrazi s indeksima 1 i 2 konstantne veličine jednadžba se može pisati i u obliku:

$$a \cos L + b \sin L - c\ \mathrm{tg}\ f = 0 \tag{5}$$

gdje su:

$$\mathrm{tg}\ f_1 \sin L_2 - \mathrm{tg}\ f_2 \sin L_1 = a \tag{6}$$

$$\mathrm{tg}\ f_2 \cos L_1 - \mathrm{tg}\ f_1 \cos L_2 = b \tag{7}$$

$$\sin(L_2 - L_1) = c \tag{8}$$

Određivanje elemenata ortodrome

Na temelju jednadžbe ortodrome (5) mogu se odrediti svi njeni elementi koji se koriste u navigaciji, osim ortodromske udaljenosti koju je potrebno odrediti cosinusovim poučkom za sferni trokut.

1. Međutočke ortodrome

Međutočke ortodrome mogu se direktno dobiti jednadžbom (5) tako da se na osnovi izabranih geografskih duljina (L_i) odrede geografske širine (f_i) pojedinih točaka ortodrome.

$$f_i = \text{arc tg} \frac{a \cos L_i + b \sin L_i}{c} \tag{9}$$

2. Kurs ortodromski

Relacija za određivanje kursa izvest će se na osnovi činjenice da je koeficijent smjera tangente na krivulju ortodrome jednak tangensu kursa ortodromskog.

Jednadžba tangente na krivulju (5) u koordinatnom sustavu (df, cos f dL), jednaka je:

$$F_f \, df + \frac{F_L}{\cos f} dL = 0 \tag{10}$$

gdje su F_f i F_L parcijalne derivacije jednadžbe ortodrome po varijablama f i L, a df i dL njihove diferencijalne veličine.

Koeficijent smjera tangente, odnosno tangens kursa ortodromskog dobije se iz relacije (10):

$$\text{tg } K_o = - \frac{F_f \cos f}{F_L} \tag{11}$$

Kad se u relaciju (11) uvrste parcijalne derivacije i izraz sredi, dobije se konačna formula za određivanje kursova ortodromskih za pojedine točke ortodrome (f, L).

$$K_o = \text{arc tg} \frac{c}{(b \cos L - a \sin L) \cos f} \tag{12}$$

3. Vrh ortodrome

Vrh ortodrome može se odrediti prema uvjetu određivanja maksimuma funkcije, tj. izjednačavanjem prve derivacije jednadžbe ortodrome s nulom.

$$\frac{df}{dL} = - \frac{F_L}{\cos f \, F_f} = 0 \tag{13}$$

Uvrštavanjem parcijalnih derivacija u relaciju (13), dobije se da je geografska duljina (L_V) vrha ortodrome, jednaka:

$$L_V = \text{arc tg} \frac{b}{a} \tag{14}$$

Geografska širina vrha ortodrome dobije se relacijom (9):

$$f_V = \text{arc tg} \frac{a \cos L_V + b \sin L_V}{c} \tag{15}$$

4. Presjecište ortodrome s ekvatorom

Ako se u jednadžbi ortodrome (5) uzme da je geografska širina (f) jednaka nuli, dobije se izraz:

$$\text{tg } L_E = - \frac{a}{b} \tag{16}$$

ili geografska duljina (L_E) presjecišta ortodrome s ekvatorom, jednaka je:

$$L_E = \text{arc tg} \left(- \frac{a}{b}\right) \tag{17}$$

5. Određivanje točaka ortodrome na osnovi izabranih geografskih širina

Određivanje međutočaka ortodrome redovito se obavlja na osnovi uzastopno izabranih geografskih duljina, jer je takav postupak praktičniji i jednostavniji. Međutim, ovdje će se pokazati i mogućnost određivanja točaka ortodrome i na osnovi izabranih geografskih širina, radi kompletnijeg prikaza moguće primjene jednadžbe ortodrome.

U svrhu izvođenja rješenja, jednadžba ortodrome (5) napisat će se u obliku:

$$a \cos L + b \sin L = c \text{ tg } f$$

i kvadrirati:

$$a^2 \cos^2 L + b^2 \sin^2 L + 2ab \sin L \cos L = c^2 \text{ tg}^2 f.$$

Sada će se desna strana dobivene relacije pomnožiti sa: $\sin^2 L + \cos^2 L$, pa se nakon sređivanja dobije kvadratna jednadžba:

$$\text{tg}^2 L (b^2 - c^2 \text{tg}^2 f) + 2 \text{tg } L \, ab + a^2 - c^2 \text{tg}^2 f = 0 \tag{18}$$

U relaciji (18) izabrana geografska širina označit će se f_i i uzeti da je:

$$b^2 - c^2 \text{tg}^2 f_i = a_1 \tag{19}$$

$$ab = b_1 \tag{20}$$

$$a^2 - c^2 \text{tg}^2 f_i = c_1 \tag{21}$$

pa će se uvrštavanjem dobiti:

$$a_1 \text{tg}^2 L_i + 2 b_1 \text{tg } L_i + c_1 = 0 \tag{22}$$

Rješavanjem jednadžbe (22) dobiva se geografska duljina (L_i) ortodrome koja odgovara izabranoj širini (f_i).

$$(L_i)_{1/2} = \text{arc tg} \frac{-b_1 \pm (b_1^2 - a_1 c_1)^{1/2}}{a_1} \tag{23}$$

Izabrana geografska širina (f_i) treba biti manja ili najviše jednaka širini vrha ortodrome (f_V).

Parametarska jednadžba ortodrome

Parametarski dio jednadžbe ortodrome za geografsku širinu (f) izvest će se na osnovi cosinusovog poučka za sferni trokut i činjenice da su u svakoj točki ortodrome cosinusi kursa ortodromskog prema odredištu i prema polazištu jednaki, ali suprotnog predznaka.

Relacije za cosinuse kursova su:

$$\cos K_o = \frac{\sin f_2 - \sin f \cos D_2}{\cos f \sin D_2} \tag{24}$$

$$\cos(K_o + 180^\circ) = \frac{\sin f_1 - \sin f \cos D_1}{\cos f \sin D_1} \tag{25}$$

odakle se dobije da je:

$$\frac{\sin f_2 - \sin f \cos D_2}{\cos f \sin D_2} + \frac{\sin f_1 - \sin f \cos D_1}{\cos f \sin D_1} = 0 \qquad (26)$$

U relacijama su:

D_1 — duljina ortodrome od polazišta do točke ortodrome geografske širine (f),
D_2 — duljina ortodrome od točke ortodrome geografske širine (f) do odredišta.

Sređivanjem relacija (26), dobije se da je:

$$\sin f = \frac{\sin f_2 \sin D_1 + \sin f_1 \sin D_2}{\sin D} \qquad (27)$$

ili

$$f = \text{arc} \sin \frac{\sin f_2 \sin D_1 + \sin f_1 \sin D_2}{\sin D} \qquad (28)$$

gdje je D ukupna duljina ortodrome:

$$D = D_1 + D_2 \qquad (29)$$

Parametarski dio jednadžbe ortodrome za geografsku duljinu izvest će se na osnovi sinusovog poučka za sferni trokut i činjenice da su u svakoj točki ortodrome sinusi kursa ortodromskog prema odredištu i prema polazištu jednaki, ali suprotnog predznaka.

Relacije za sinuse kursova su:

$$\sin K_o = \frac{\sin(L_2 - L) \cos f_2}{\sin D_2} \qquad (30)$$

$$\sin(K_o + 180^o) = \frac{\sin(L_1 - L) \cos f_1}{\sin D_1} \qquad (31)$$

odakle se dobije da je:

$$\frac{\sin(L_2 - L)\cos f_2}{\sin D_2} + \frac{\sin(L_1 - L)\cos f_1}{\sin D_1} = 0 \qquad (32)$$

U relaciji (32) razvit će se sinusi s argumentima $(L_1—L)$ i $(L_2—L)$ i nakon sređivanja dobije se da je:

$$\text{tg } L = \frac{\cos f_2 \sin L_2 \sin D_1 + \cos f_1 \sin L_1 \sin D_2}{\cos f_2 \cos L_2 \sin D_1 + \cos f_1 \cos L_1 \sin D_2} \qquad (33)$$

ili

$$L = \text{arc tg} \frac{a_2 \sin D_1 + b_2 \sin D_2}{c_2 \sin D_1 + d_2 \sin D_2} \qquad (34)$$

gdje su:

$$\cos f_2 \sin L_2 = a_2 \qquad (35)$$

$$\cos f_1 \sin L_1 = b_2 \qquad (36)$$

$$\cos f_2 \cos L_2 = c_2 \qquad (37)$$

$$\cos f_1 \cos L_1 = d_2 \qquad (38)$$

Jednadžbe (27) i (33) odnosno (28) i (34) predstavljaju parametarski oblik jednadžbe ortodrome s parametrima D_1 i D_2. Taj oblik jednadžbe ortodrome može se prikladno koristiti u ortdromskoj navigaciji kad se želi odabrati međutočke ortodrome (f_i, L_i) na međusobno određenim, npr. jednakim udaljenostima. U tom slučaju uzastopno se odabire D_{1i}, tako da se uvećava za određeni iznos, a preostali dio ortodrome se dobije prema relaciji (29):$D_{2i}=D—D_{1i}$.

Zaključak

Izvedene jednadžbe i transformiranjem dobivene relacije mogu se uspješno upotrebljavati pri određivanju pojedinih elemenata ortodrome. Prednost dobivenih relacija, u usporedbi s postojećim rješenjimma, je u tome:

1. što se sve relacije zasnivaju na istim veličinama, tj. koordinatama pozicije polaska i dolaska, pa se na osnovi toga javljaju u svim relacijama kao konstantne vrijednosti, što olakšava određivanje pojedinih elemenata ortodrome običnim računalima ili izradu programa za njihovo određivanje programibilnim računalima,
2. što se kod rješavanja izabiru ili dobivaju odmah prave a ne relativne koordinate, pri određivanju geografskih duljina pojedinih točaka ortodrome,
3. što se na osnovi parametarske jednadžbe ortodrome ukazuje na jedan relativno jednostavan način određivanja međutočaka ortodrome, na temelju uzastopnog odabiranja ortodromske udaljenosti od pozicije polaska do pozicije dolaska.

Posebno se može još istaknuti da se datim pristupom i rješenjima došlo do niza novih matematičkih relacija u području ortodromske navigacije, pa je za očekivati da i u drugim područjima navigacije ima još mnogo neistraženih novih mogućnosti za koje se vrijedi angažirati.

GREAT—CIRCLE EQUATION AND ITS POSSIBLE APPLICATION IN NAVIGATION

Summary

A general and a parametric great-circle equations are derived in this article and their possible application in the navigation is shown as well. Mathematical relations for determination of the great-circle elements are achieved by transformation of the general equation without usual solving of the spherical triangles. Special relations are derived to determine points on the great-circle track, great-circle courses, the vertex, the intersection of the great-circle and the equator and to determine points on the great-circle track on the basis of selected geographical latitudes. It is specially shown how parametrical great-circle equation could be applied when points on the great-circle track are determined on the basis of the great-circle distances taken one after another from the position of departure to the position of arrival. Ordinary or programmed calculators should be used in the application of derived mathematical relations.