IVO SJEKAVICA

YU ISSN 0469—6255
NAŠE MORE 35 (3 — 4) 113 (1988)

Opći pristup za određivanje pozicije i reduciranje pogrešaka u navigaciji

UDK 527.6

Sažetak

U članku je obrađen jedan matematički model kojim se, u općem pristupu, jedinstveno određuje pozicija i reduciraju pogreške u svim vrstama navigacije. Obrađena su opažanja jednog, dva, tri i više objekata. Pojedina opća rješenja data su u matričnom obliku. Za cjelovitu primjenu modela pretpostavlja se korištenje odgovarajućeg kompjutora. Na kraju članka se zaključuje da su u datom modelu obrađene samo osnove za jedan mogući širi i sveobuhvatniji model u kojemu bi bili uključeni svi navigacijski podaci koji su potrebni za jedan jedinstveni integrirani navigacijski sustav.

Uvod

Općenito se u navigaciji pozicija određuje direktno pomoću mjerenih podataka ili indirektno na osnovi zbrojene ili procijenjene pozicije i mjerenih podataka. Prvi način više se upotrebljava u obalnoj navigaciji, pri određivanju pozicije grafički na pomorskoj karti, a drugi u oceanskoj navigaciji kad se pozicija određuje numeričkim postupkom.

U ovom članku obradit će se osnove za opći pristup određivanja pozicije i reduciranja pogrešaka pomoću zbrojene pozicije, mjerenih podataka i poznatih koordinata opaženih objekata. Kod toga će se dati i opći model matematičkog rješenja koji se može uspješno primjenjivati kod opažanja jednog ili više objekata u svim vrstama navigacije. U postupku rješavanja pretpostavlja se upotreba odgovarajućeg programiranog kompjutora.

Opća jednadžba pravca položaja

Opća jednadžba krivulje položaja u navigaciji, s obzirom na zbrojenu poziciju, može se napisati u obliku:

$$F(f_o, L_o, M_o) = 0 \qquad (1)$$

gdje su:

f_o – zbrojena geografska širina opažača,

L_o – zbrojena geografska duljina opažača

M_o – izračunati podatak opaženog objekta

Kad se jednadžba (1) razvije u Taylorov red i zadrže samo linearni članovi, dobije se:

$$F_{f_o}\,df + F_{L_o}\,dL + F_{M_o}\,dM = 0 \qquad (2)$$

U relaciji (2) su F_{f_o}, F_{L_o} i F_{M_o} parcijalne derivacije funkcije $F(f_o, L_o, M_o) = 0$ po varijablama f_o, L_o i M_o, a diferencijalne veličine su:

$$df = f - f_o \qquad (3)$$

$$dL = L - L_o \qquad (4)$$

$$dM = M - M_o \qquad (5)$$

Vrijednosti f i L su pretpostavljene prave koordinate opažača, a M izmjereni podatak opaženog objekta. Ako se pretpostavi da je u mjerenom podatku sadržana i neka sistematska (stalna) pogreška (dMs), bit će: $dM = (M - dMs) - M_o$ ili $dM + dMs = M - M_o$, što uključeno u jednadžbu (2), daje:

$$F_{f_o}\,df + F_{L_o}\,dL + F_{M_o}\,dMs + F_{M_o}\,dM = 0 \qquad (6)$$

Relacije (2) i (6) predstavljaju opće jedadžbe pravca položaja kojima se aproksimira krivulja položaja opažača u blizini njegove zbrojene pozicije.

Normalni oblik ovih jednadžbi u relativnom koordinatnom sustavu (df, cos f dL), glasi:

$$\cos A\,df + \sin A\cos f_o\,dL = d \qquad (7)$$

$$\cos A\,df + \sin A\cos f_o\,dL + C\,dMs = d \qquad (8)$$

gdje su:

$$\cos A = \frac{F_{f_o}}{\pm\left(F_{f_o}^2 + F_{L_o}^2/\cos^2 f_o\right)^{1/2}} \qquad (9)$$

$$\sin A = \frac{F_{L_o}}{\pm\cos f_o\left(F_{f_o}^2 + F_{L_o}^2/\cos^2 f_o\right)^{1/2}} \qquad (10)$$

$$C = \frac{F_{M_o}}{\pm\left(F_{f_o}^2 + F_{L_o}^2/\cos^2 f_o\right)^{1/2}} \qquad (11)$$

$$d = \frac{F_{M_o}\,dM}{\pm\left(F_{f_o}^2 + F_{L_o}^2/\cos^2 f_o\right)^{1/2}} \qquad (12)$$

Predznak ispred zagrada uzima se suprotan od predznaka veličine $F_{M_o}dM$. Argument A u funkcijama sin A i cos A je azimut normale (d) pravca položaja.

Ako se kod izračunavanja pozicije odredi i sistematska pogreška (dMs), tada će ispravljena normala biti jednaka:

$$di = d - C\ dMs \tag{13}$$

Jednadžba (7) koristi se pri opažanju jednog ili dva objekta, a jednadžba (8) pri istovrsnom opažanju triju ili više objekata, kad se u postupku određivanja pozicije želi istodobno eliminirati i moguća sistematska pogreška (dMs).

ODREĐIVANJE POZICIJE I REDUCIRANJE POGREŠAKA

U postavljenom matematičkom modelu se uzimlje da se svaki pojedini objekt višekratno opaža u kratkom intervalu vremena. Pri tome se za svaki mjereni podatak postavlja posebna jednadžba pravca položaja, na osnovi zbrojene pozicije u trenutku opažanja, osim u slučaju jednog višekratnog opažanja jednog objekta.

Na taj način se dobije jedan prekobrojni sustav jednadžbi pravaca položaja u kojima mogu biti sadržane sistematska i slučajne pogreške i utjecaj mogućih pogrešaka u kursu i pređenom putu u vremenu opažanja.

Tako dobiveni sustav rješava se metodom najmanjih kvadrata, čime se reduciraju slučajne pogreške pojedinih opažanja i dobivaju točnije relativne koordinate (df, dL). Rješavanje se može uzastopno ponavljati, tako da se izračunata pozicija u slijedećem računu uzme kao zbrojena, sve dotle dok se i dobivena pozicija ne počne ponavljati u okviru tražene točnosti. Radi jednostavnosti i kratkoće postupka rješenja su data u matričnom obliku i to samo za višekratna opažanja, jer se isti postupak može primijeniti i u slučaju jednokratnih opažanja pojedinih objekata.

$$f_o = f_{o-1} + b\ dt \cos K \tag{14}$$

$$L_o = L_{o-1} + \frac{b\ dt \sin K}{\cos f_s} \tag{15}$$

gdje su:

(f_{o-1}, L_{o-1}) – koordinate prethodne zbrojene pozicije,
b – brzina broda,
dt – proteklo vrijeme,
K – kurs broda,
f_s – srednja širina između f_o i f_{o-1}

Praćenje koordinata zbrojene pozicije izvodi se poznatim relacijama:

Opažanje jednog objekta

Kako će se opažati jedan objekt u prvom redu ovisi od brzine promjene njegovog azimuta s obzirom na protok vremena i pređeni put broda. U tom smislu objekti se mogu podijeliti na one kojima se azimut sporo, brzo i vrlo brzo mijenja. Ako se azimut objekta sporo mijenja, tada je pogodan za jedno višekratno opažanje, ako se brzo mijenja za dva uzastopna, višekratna opažanja i kad se vrlo brzo mijenja za tri ili više uzastopnih, višekratnih opažanja. Međutim, pojam brzine promjene azimuta dosta je relativan i znatno ovisi od okolnosti plovljenja. Kao srednja mjera može se uzeti da su spore promjene kad se azimut mijenja manje od 20°, brze ako su promjene između 20° i 40° i vrlo brze ako su veće od 40° u jednom satu plovljenja.

Na osnovi navedenih kriterija postavit će se odgovarajući matematički model za određivanje pozicije i reduciranje pogrešaka.

1. Jedno opažanje

U ovom slučaju, kad se izvode višekratna opažanja, dobije se više pravaca položaja koji se sijeku pod malim kutovima, pa na osnovi njih dobivena pozicija ne bi bila pouzdana. Zbog toga se kao pozicija broda uzimlje tz. rektificirana (ispravljena) pozicija (Pr) koja se nalazi u presjecištu jednog srednjeg pravca položaja i njegove normale.

Postupak se svodi na to da se odredi srednji mjereni podatak (Ms) i srednje vrijeme mjerenja (ts), pa se na osnovi njih postavi sustav jednadžbe pravca položaja (7) i njegove normale.

$$Ms = \frac{M_1 + M_2 + \dots + M_n}{n} \tag{16}$$

$$ts = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \cos A\ df + \sin A \cos f_o dL &= d \\ \sin A\ df - \cos A \cos f_o dL &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

Rješenjem sustava bit će:

$$df = d \cos A \tag{19}$$

$$dL = \frac{d \sin A}{\cos f_o} \tag{20}$$

a primjenom relacija (3) i (4) dobiju se koordinate rektificirane pozicije:

$$f_r = f_o + df \tag{21}$$

$$L_r = L_o + dL \tag{22}$$

gdje su (f_o, L_o) koordinate zbrojene pozicije koja odgovara vremenu ts.

U poziciji (Pr) reducirane su slučajne pogreške višekratnim opažanjima, a ostala je sistematska pogreška i pogreška neodređenosti na pravcu položaja, jer je Pr samo vjerojatna pozicija s obzirom na zbrojenu poziciju (Po).

2. Dva uzastopna opažanja

Kad se izvode dva uzastopna opažanja, kod relativno brze promjene azimuta, tada se prva višekratna mjerenja obavljaju na početku, a druga na kraju ukupnog intervala vremena opažanja, tako da se dobiju što povoljniji kutovi presijecanja među pravcima položaja.

Nakon toga se za svako opažanje (mjerenje) postavlja jedna jednadžba pravca položaja (7) prema zbrojenoj poziciji u trenutku opažanja. Na taj način se otklanjaju pogreške koje mogu nastati zbog brze, nelinearne promjene azimuta objekta u slučaju da se rješavanje izvodi sa srednjim mjerenim podacima Ms i ts.

Na osnovi dobivenih jednadžbi može se postaviti prekobrojni sustav jednadžbi (7), čije će se rješavanje izvesti u matričnom obliku.

Matrica koeficijenata sustava označit će se s B, matrica nepoznanica s E, matrica slobodnih članova s G, pa će biti:

$$B = \begin{bmatrix} \cos A_1 & \sin A_1 \cos f_1 \\ \cos A_2 & \sin A_2 \cos f_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cos A_n & \sin A_n \cos f_n \\ \cos A_{n+1} & \sin A_{n+1} \cos f_{n+1} \\ \cos A_{n+2} & \sin A_{n+2} \cos f_{n+2} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cos A_{n+n} & \sin A_{n+n} \cos f_{n+n} \end{bmatrix} \qquad (23)$$

$$E = \begin{bmatrix} df \\ dL \end{bmatrix} \qquad (24)$$

$$G = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n \\ d_{n+1} \\ d_{n+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{n+n} \end{bmatrix} \qquad (25)$$

Indeksi 1, 2, ..., n u matricama B i G označuju koeficijente pravaca položaja prvih mjerenja, a indeksi n+1, n+2, ..., n+n drugih uzastopnih mjerenja opaženog objekta.

Ako se sustav napiše u matričnom obliku:

$$BE = G \qquad (26)$$

njegovo rješenje će biti:

$$E = \left[B^T B\right]^{-1} B^T G \qquad (27)$$

gdje je B^T transponirana matrica matrice B,

a $\left[B^T B\right]^{-1}$ inverzna matrica umnoška $B^T B$.

Rješenjem (27) dobiju se srednje vrijednosti df i dL, a primjenom relacija (3) i (4) i koordinate opažača.

$$f = f_o + df \qquad (28)$$

$$L = L_o + dL \qquad (29)$$

U dobivenim koordinatama reduciran je utjecaj slučajnih pogrešaka, a ostao je utjecaj sistematske pogreške i pogrešaka u kursu i pređenom putu broda. Pogreške u kursu i pređenom putu proporcionalne su s duljinom puta, pa je u ovom slučaju potrebno procijeniti, prema okolnostima plovljenja, što je povoljnije — ići na dulji put odnosno veću promjenu azimuta ili kraći put da bi se dobilo točniju poziciju.

Dva uzastopna opažanja mogu se ponekad primijeniti i u slučaju sporije promjene azimuta, jer tako dobivena pozicija može biti točnija od rektificirane (Pr), a može se s njome i kombinirati uzimajući kao najvjerojatniju poziciju neku njihovu srednju vrijednost.

3. Tri ili više uzastopnih opažanja

Ova opažanja se primjenjuju kad se azimut opažanog objekta vrlo brzo mijenja. Intervale uzastopnih opažanja potrebno je prilagoditi brzini promjene azimuta i ukupnom vremenu opažanja.

Slično kao i kod dva uzastopna opažanja i u ovom slučaju se može postaviti prekobrojni sustav jednadžbi pravaca položaja na osnovi jednadžbe (8).

Matrica koeficijenata sustava isto će se označiti s B, matrica nepoznanica s E, a matrica slobodnih članova s G, pa će biti:

$$B = \begin{bmatrix} \cos A_1 & \sin A_1 \cos f_1 & C_1 \\ \cos A_2 & \sin A_2 \cos f_2 & C_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos A_n & \sin A_n \cos f_n & C_n \\ \cos A_{n+1} & \sin A_{n+1} \cos f_{n+1} & C_{n+1} \\ \cos A_{n+2} & \sin A_{n+2} \cos f_{n+2} & C_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos A_{n+n} & \sin A_{n+n} \cos f_{n+n} & C_{n+n} \\ \cos A_{2n+1} & \sin A_{2n+1} \cos f_{2n+1} & C_{2n+1} \\ \cos A_{2n+2} & \sin A_{2n+2} \cos f_{2n+2} & C_{2n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos A_{2n+n} & \sin A_{2n+n} \cos f_{2n+n} & C_{2n+n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \qquad (30)$$

$$E = \begin{bmatrix} df \\ dL \\ dMs \end{bmatrix} \qquad (31)$$

$$G = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n \\ d_{n+1} \\ d_{n+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{n+n} \\ d_{2n+1} \\ d_{2n+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{2n+n} \\ \cdot \end{bmatrix} \qquad (32)$$

Indeksi 1, 2, ..., n; n+1, ..., n+2, ..., n+n; 2n+1, 2n+2, ..., 2n+n; označuju po redu koeficijente pravaca položaja prvih, drugih i trećih višekratnih opažanja objekta.

Postavljanje i rješavanje sustava u matričnom obliku potpuno je jednako kao i kod dva uzastopna opažanja, pa se formalno relacije (26), (27), (28) i (29) mogu u cjelini primijeniti i u ovom slučaju.

U dobivenim koordinatama reduciran je utjecaj slučajnih pogrešaka, formalno je eliminirana sistematska pogreška, a ostao je samo utjecaj pogrešaka u kursu i pređenom putu broda.

Međutim, zbog relativno duljeg ukupnog vremena opažanja sistematska pogreška redovito neće biti jednaka u svim uzastopnim opažanjima, pa se u ovakvom postupku može očekivati samo reduciranje njenog utjecaja na poziciju broda.

U vezi s pogreškama u kursu i pređenom putu vrijede iste primjedbe kao i kod dva uzastopna opažanja jednog objekta.

Opažanje dva objekta

Kad se opažaju dva objekta formalno se dobije jednaki sustav od jednadžbi pravaca položaja (7) i matrica (23), (24) i (25) kao i kod dva uzastopna opažanja jednog objekta.

Na osnovi toga, matrično postavljanje sustava, njegovo rješavanje i konačno određivanje koordinata izvodi se s istim relacijama (26), (27), (28) i (29).

Kod opažanja dva objekta, u usporedbi s dva uzastopna opažanja jednog objekta, redovito je znatno kraći ukupni interval vremena opažanja i uvijek se nastoji odabrati objekte koji imaju razliku azimuta što bližu 90°.

U dobivenim koordinatama ostao je samo znatniji utjecaj moguće sistematske pogreške, jer su slučajne pogreške reducirane višekratnim opažanjima, a utjecaj pogrešaka u kursu i pređenom putu redovito je zanemariv, s obzirom na kratki interval vremena opažanja.

Opažanja tri ili više objekata

U ovom slučaju formalno se dobije jednaki sustav od jednadžbi pravaca položaja (8) i matrica (30), (31) i (32) kao i kod tri ili više uzastopnih opažanja jednog objekta. Rješavanje je također jednako i izvodi se istim relacijama (26), (27), (28) i (29).

Slično, kao i kod opažanja dva objekta i ovdje je ukupni interval vremena opažanja znatno kraći u usporedbi s tri ili više uzastopnih opažanja jednog objekta.

Kod opažanja se uvijek nastoji odabrati takve objekte kojima je azimut ravnomjerno raspoređen na horizontu. Međutim, u praksi se redovito najviše opažaju tri objekta, po mogućnosti s razlikom azimuta što bližoj 120°.

Točnost dobivenih koordinata u ovakvim opažanjima redovito je najveća, jer je u njima eliminiran utjecaj sistematske pogreške i reduciran utjecaj slučajnih pogrešaka višekratnim opažanjima. Utjecaj pogrešaka u kursu i pređenom putu redovito je zanemariv s obzirom na kratki interval vremena opažanja.

Sustav jednadžbi pravaca položaja (8) koristi se samo u slučaju istovrsnih opažanja, tj. kad se mjere jednaki podaci pojedinih objekata. Naknadno se ove jednadžbe, eliminiranjem sistematske pogreške relacijom (13), mogu svesti na oblik (7). Na taj način se od raznih istovrsnih opažanja, s različitim sistematskim pogreškama, može formirati jedan sustav koji se zatim riješi pomoću relacija (26), (27), (28) i (29).

Neke posebne jednadžbe krivulja položaja u navigaciji

Za razliku od opće jednadžbe krivulje položaja u navigaciji (1), ovdje će se navesti neke posebne jednadžbe za razne vrste navigacija. Njihovim parcijalnim deriviranjem i primjenom relacija (9), (10), (11) i (12) one se uvijek mogu svesti na jednadžbe pravaca položaja tipa (7) ili (8) i daljnjim datim postupkom odrediti poziciju.

Kod toga, općenito, može biti potrebno da se izmjereni podaci prethodno, prije upotrebe, isprave za neke vrijednosti kao što je, npr., slučaj ispravljanja izmjerene visine u astronomskoj navigaciji.

1. Astronomska navigacija

Jednadžba položaja sferne kružnice:

$$F = \sin f_o \sin d + \cos f_o \cos d \cos s_o - \sin V_o = 0 \quad (33)$$

gdje su:

d – deklinacija,

s_o – mjesni satni kut,

V_o – izračunata visina

opaženog nebeskog tijela.

2. Hiperbolična navigacija

Jednadžba položaja sferne hiperbole:

$$\begin{aligned} F = {} & (\sin f_o \sin f_1 + \cos f_o \cos f_1 \cos(L_1 - L_o))^2 + \\ & (\sin f_o \sin f_2 + \cos f_o \cos f_2 \cos(L_2 - L_o))^2 - \\ & 2\,(\sin f_o \sin f_1 + \cos f_o \cos f_1 \cos(L_1 - L_o)) \\ & (\sin f_o \sin f_2 + \cos f_o \cos f_2 \cos(L_2 - L_o)) \cos u_{21} - \\ & \sin^2 u_{21} = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

gdje su:

(f_1, L_1) — koordinate prvog opaženog objekta-stanice,

(f_2, L_2) — koordinate drugog opaženog objekta-stanice,

u_{21}) — izračunata razlika udaljenosti između opažača i objekata—stanica.

3. Satelitska navigacija — GPS

Jedandžba položaja sferne udaljenosti od satelita:

$$\begin{aligned} F = {} & (X_1 - R\cos f_o \cos L_o)^2 + (Y_1 - R\cos f_o \sin L_o)^2 + \\ & (Z_1 - R\sin f_o)^2 - u_o^2 = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

gdje su:

(X_1, Y_1, Z_1) — koordinate satelita u Descartesovom pravokutnom ekvatorskom sustavu,

R — radijus Zemlje,

u_o — izračunata udaljenost opažača od satelita.

4. Radio—goniometrijska i obalna navigacija

Jednadžba položaja jednakih azimuta:

$$\begin{aligned} F = {} & \mathrm{tg}\, A_o (\mathrm{tg}\, f_1 \cos f_o - \sin f_o \cos(L_1 - L_o)) - \\ & \sin(L_1 - L_o) = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

gdje su:

(f_1, L_1) — koordinate radio—goniometrijske stanice ili nekog drugog opaženog objekta,

A_o — izračunati azimut opaženog objekta.

Zaključak

Upotrebom kompjutora u navigaciji praktički je omogućeno korištenje svih mogućih matematičkih modela za određivanje pozicije broda. U izradi takvih modela neprekidno se teži da oni budu što bolji. Kod toga se posebno traži da pojedini model bude što cjelovitiji, sveobuhvatniji, da daje što točnije rezultate i da je jednostavan za korištenje.

U sklopu navedenih težnji, datim modelom određivanja pozicije i reduciranja pogrešaka, objedinjuju se i u općem pristupu jedinstveno rješavaju različiti načini određivanja pozicije u istim i različitim vrstama navigacije. Kod toga su obrađeni samo osnovi jednog mogućeg šireg i sveobuhvatnijeg modela. U takvom širem modelu mogu biti praktički sadržani svi potrebni navigacijski podaci. Takvi podaci, te mjerene i ostale veličine u raznim vrstama navigacije jesu osnova za kompjutorsko određivanje pozicije. Na taj način moglo bi se pomoću jednog nešto složenijeg radio prijemnika i kompjutora povezati i integrirati sve vrste navigacije u jedan jedinstveni sustav.

Literatura:

1. Nathaniel Bowditch: American Practical Navigator, Vol. I., 1977., str. 1064.
2. Ivo Sjekavica: Nove metode određivanja sistematske pogreške pri određivanju geografskih koordinata (doktorska disertacija), 1985., str. 88.