

Matematika i računalno razmišljanje u informatici

PETAR MLADINIĆ¹

U ovom ću tekstu pokušati naznačiti koje matematičke sadržaje treba informatika i koji se i kada poučavaju (ili ne poučavaju) u nastavi matematike. Isto tako, osvrnut ću se na pitanje koji se sadržaji i kada poučavaju u nastavi informatike.

Moje veliko iskustvo u nastavi matematike ukazuje na oprez kako se ne bi, zbog objektivnih ali i subjektivnih loših poteza, postigao suprotan efekt od namjeravanog. Između ostalog, uporaba alata u matematici „izoštruje” pojmove i stavlja u prvi plan bitno, a ne sporedno ili „receptualno”. S obzirom na to kako se matematika novim kurikulumom planira uporabiti u nastavi informatike u RH, meni se čini da je u prvom planu „receptualna” matematika.

Možete li me uputiti (pitao sam jednog od stručnjaka koji „guraju” informatiku u naše školstvo) na neki izvor/izvore u kojem ću naći konkretne primjere povezanosti informatike i matematike koji su i vremenski i sadržajno usklađeni u nastavnom planu? Ili takvih primjera baš i nema?

Nikada nisam dobio odgovor na svoju zamolbu. Zato sam se potrudio potražiti matematičke sadržaje koji trebaju informatici i zaključiti o čemu je riječ u RH.

1. Matematika za digitalno doba

Pođimo prvo od naznake koji matematički sadržaji trebaju u nastavi informatike. To se vrlo lijepo vidi u knjizi *Matematika za digitalno doba i programiranje u Pythonu* koju su napisali **Maria i Gary Litvin**.

Naslovi poglavlja i popis pojmova na kraju poglavlja u knjizi ukazuju na te matematičke sadržaje:

1. Skupovi i funkcije
 - skup, konačni skup, beskonačni skup, podskup, prazan skup, funkcija, preslikavanje, domena, slika domene, argument, prirodna domena, algoritam...

¹Petar Mladinić, Zagreb

2. Uvod u programiranje
3. Varijable
 - varijabla, izraz, brojevi s pomičnim zarezom, lokalna i globalna varijabla, argument funkcije, formalni parametar, definirajući argument...
4. Nizovi, zbrojevi, iteracije
 - niz, član (niza), konvergentni niz, limes niza, aritmetički niz, geometrijski niz, sigma označavanje, redovi, parcijalne sume, konvergentni redovi, divergentni redovi...
5. Brojevni sustavi
 - pozicijski brojevni sustav, baza brojevnog sustava, binarni sustav, oktalni sustav, heksadecimalni sustav, dvije komplementarne prezentacije negativnih brojeva, racionalni broj, iracionalni broj, zlatni rez...
6. Boolova algebra
 - sud, konjunkcija, disjunkcija, negacija, Boolova algebra, operator „i”, operator „ili”, operator „ne”, tablica istinitosti, de Morganovi zakoni, predikat, istiniti skup, presjek skupova, unija skupova, komplement skupa, Vennov dijagram, racionalni operatori, logički operatori
7. Digitalni krugovi i bitstream operatori
8. Računanje
 - kombinatorika, pravilo umnoška, permutacije, faktorijela, kombinacije, n-povrh-k, $n!$, $\binom{n}{k}$
9. Nizovi, liste i datoteke
10. Paritet, invarijante i konačne strategije
11. Rekurentne relacije i rekurzije
 - rekurentna relacija, Fibonaccijevi brojevi, zlatni rez, rekurzija, rekurzivne funkcije, rekurzivne procedure, matematička indukcija
12. Polinomi
 - polinom, koeficijent polinoma, stupanj polinoma, linearni polinom, kvadratni polinom, dijeljenje polinoma, poučak o ostatku, poučak o faktorizaciji, binomni koeficijent, Pascalov trokut
13. Vjerojatnost
 - vjerojatnost, vjerojatnosni prostor, nezavisni događaji, pravilo umnoška u vjerojatnosti, pravilo zbroja i razlike u vjerojatnosti, simulacije Monte-Carlo
14. Matrice, skupovi i rječnici
 - matrica, element matrice, vektor, skalarni umnožak, umnožak matrica...

15. Grafovi

- graf, vrh ili čvor (uzao), brid ili luk, multigraf, petlja, jednostavni graf, potpuni graf, ciklus, izomorfizam, izomorfni grafovi, relacija ekvivalencije, klase ekvivalencije, povezani graf, stupanj vrha, Eulerova staza, Eulerov ciklus, Hamiltonov ciklus, usmjereni graf, graf s težinom, optimalni put

16. Još grafova

- adjungirana matrica, ravninski graf, pravilno bojenje, potpuno triangulirani graf, poučak o četiri boje, Kempeov lanac, poučak o pet boja

17. Teorija brojeva i kriptografija

- teorija brojeva, ostatak, djelitelj, najveći zajednički djelitelj, Euklidov algoritam, relativno prosti brojevi, diofantska jednačina, temeljni poučak aritmetike, kongruencije po modulu d , djelitelji, Fetmatov mali poučak, svojstvo eksponenata, diskretni algoritam

Već ovaj „površinski” osvrt, tj. samo nabranje matematičkih pojmova koji trebaju informatičari ukazuje na dva bitna problema koja trebaju riješiti moderni kurikuli i matematike i informatike.

Prvi je problem da se veliki dio ovih sadržaja ne nalazi u prijedlogu našeg matematičkog kurikula i da bi ga trebalo osuvremeniti/„popuniti” ovim sadržajima.

Dakle, matematika treba „prirediti” temelje koje će onda informatika uporabiti u svojoj domeni *Računalno razmišljanje i programiranje*.

Od nabrojanih pojmova tek se vrlo mali dio poučava u sadašnjoj nastavi matematike (kao i u prijedlogu novog kurikula), a i taj dio tek u srednjoj školi – i to u višim razredima.

Drugi je problem tko će, kada i kako poučavati ove sadržaje u hrvatskom školstvu. Mogu li se vremenski, sadržajno i sukladno uzrastu učenika uskladiti poučavanje matematičkih sadržaja i potrebe informatike u spomenutoj domeni?

2. Matematika u prijedlogu kurikula informatike u RH

Pogledajmo koji se od ovih matematičkih sadržaja i kada nalaze u prijedlogu kurikula iz informatike.

U domeni *Računalno razmišljanje i programiranje* u kurikulu pišu sljedeći sadržaji:

a) od 1. – 4. razreda OŠ

- logički zadatci, brojevni nizovi (brojevni pravac, tablica...), komutativnost i asocijativnost u zbrajanju, veza zbrajanja i oduzimanja, magični trokut i kvadrat, jednostavni Sudoku, pravila sa zgradama, stvaranje nizova, veza množenja i dijeljenja, prikazivanje podataka tablicama i dijagramima prema primjerima iz matematike, klasificiranje likova prema broju stranica, opseg likova,

prikazivanje podataka s pomoću simbola, kodiranje kratkih poruka skupom simbola, broj kombinacija (mogući ishodi događaja kod vjerojatnosti), logički zadatci, rješavanje složenijih zadataka, razvijanje strategije za rješavanje problema (Polya, Descartes), iskazivanje i opisivanje vjerojatnosti ishoda.

- b) 5. razred
 - razumijevanje naredbe pridruživanja i pojma varijable, zadatci logičkog tipa
- c) 6. razred
 - nizovi brojeva ili brojeva s određenim svojstvima, kretanje likova, koordinatni sustav s cjelobrojnim koordinatama, računanje opsega, površine trokuta i četverokuta, računanje postotnog iznosa, razvijanje strategije za rješavanje problema (Polya, Descartes), zadatci logičkog tipa, logičke zagonetke, zadatci s kombinacijama.
- d) 7. razred
 - jednostavnije funkcije, sekvencionalno pretraživanje, razlikovati parametre, analizirati/predvidjeti trend, podatke oblikovati, grafički prikazati i analizirati, analizirati i argumentirati različite trendove proučavanjem grafičkih prikaza podataka (npr. put i vrijeme u različitim vrstama gibanja).
- e) 8. razred
 - izrada računalnog programa/scenarija za uvježbavanje pojedinih matematičkih/fizikalnih operacija, postupaka, trokut Sierpinskog, Kochova pahuljica, rekurzivni fenomeni iz svakodnevnog života, opisati i pokazati osnovne korake rekurzivnog postupka.

Pitanja i komentar. Što se od ovoga do sada učilo u matematici? I ako jest, kada se to učilo? U matematici se samostalno ne poučava logika, niti se ovako rano poučava pojam funkcije, vjerojatnost, kombinacije i rekurzije. Autori očito ne znaju ili ne uvažavaju argumente matematičke struke protiv ranog poučavanja ovih sadržaja, nego ih „hrabro” uvode u školstvo i na ovim razinama.

- e) 1. razred (svih vrsta gimnazija i strukovne škole)
 - podatci, cijeli i realni brojevi, logičke vrijednosti, operatori, izrazi: matematički, relacijski, logički, funkcije: ulaza i izlaza, korijeni, apsolutne vrijednosti, matematičke i fizikalne formule (opseg, površina, volumen, oplošje, brzina...), djelitelji nekog broja, rastav prirodnog broja na znamenke, provjera je li broj prost, NZD.
- f) 2. razred (svih vrsta gimnazija i strukovne škole)
 - zbrajanje/ množenje prirodnih brojeva unutar određenog intervala, unos i zbrajanje/množenje n brojeva, prebrojavanje po zadanom kriteriju, vizualizacija jednostavnih problema, uvesti pojam rekurzivne funkcije, Fibonaccijevi brojevi, jednodimenzionalne strukture

- g) 3. razred (svih vrsta gimnazija i strukovne škole)
- primjenjuje osnovne funkcije odabranog grafičkog modula pri crtanju kompozicija, prikaz matematičkih funkcija, crtanje matematičkih funkcija u različitim koordinatnim sustavima, skup, lista, vektor, rekurzivni postupak, rekurzivna funkcija, rekurzivna relacija, vizualne rekurzije, odrediti zbroj prvih n članova reda: $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$, Fibonaccijevi brojevi, kamata, binarno pretraživanje, približna matematička funkcija, kornjačina grafika za crtanje rekurzivnih crteža (fraktali), „spore” rekurzije (omotači), kriptografija, kriptografski osnovni pojmovi, tradicionalni kriptografski algoritmi, kriptototaliza, Cezarovo kriptiranje, kriptiranje s pomakom, afino kriptiranje, Vigenereovo kriptiranje, transpozicijsko kriptiranje
- h) 4. razred (svih vrsta gimnazija i strukovne škole)
- apstraktne strukture podataka (red, stog, stablo, graf), binarno stablo, kombinatorni problemi: permutacije, kombinacije, interpretacije, particije, procesi i trendovi, numeričko integriranje, rješavanje sustava linearnih jednačbi, iterativni postupci, interpolacijski polinom...

Pitanja i komentar. Što se od ovoga do sada učilo u srednjoškolskoj matematici i u kojim školama? I ako jest, kada (u kojem razredu) se to učilo? U matematici se ne poučava kriptografija i kriptototaliza, numeričko integriranje, interpolacijski polinom, fraktali, teorija grafova itd. Autori očito ne znaju ili ne uvažavaju argumente matematičke struke protiv poučavanja ovih sadržaja (a posebice ne na ovaj „prigodničarski”/nesustavni način), nego ih „hrabro” uvode u školstvo i na ovim razinama. Uspoređujući sa sadržajima u osnovnoj školi, čini se kao da autori nisu čitali što tamo piše, pa ponovo uvode iste pojmove. Naravno, sve na razini „praktičnosti” i podređeno računalnom programskom jeziku. Što će od takvog pristupa ostati kad učenici budu (u budućnosti) mogli izravno komunicirati s računalom, tj. usmeno mu zadataci probleme koje računalno treba riješiti?

3. Očiti problemi i pitanja o kurikulumima

Vrlo je očit problem da informatika u domeni *Računalno razmišljanje i programiranje* „prisvaja” vrlo velik dio matematičkih sadržaja koji se danas ne poučavaju u školskoj matematici, a i onaj sadržaj koji se poučava u školskoj matematici vremenski ne korespondira s informatičkim poučavanjem.

Bez te „matematike” ova informatička domena nema smisla, tj. ne može funkcionirati. Informatički pristup matematičkim sadržajima je na razini „uporabne” vrijednosti (da ne kažem „trika”), a ne na smislu matematičkih ideja i procedura (matematičkom razmišljanju) prilagođenih (ako je moguće) uzrastu.

Iz prezentiranih prijedloga kurikulnih dokumenata vidljivo je da ne postoji osmišljeni i zajednički pristup matematičkim sadržajima u informatici.

Ovo „prisvajanje” i/ili ranija uporaba u sebi sadrži neistinitu poruku da je „računalno razmišljanje” u srži informatičkog poučavanja i da matematika s time nema nikakve veze.

Zašto u osuvremenjivanju matematičkog kurikula nisu ugrađeni i ovi sadržaji (koje je pragmatično i preuranjeno „uzurpirala” informatika)?

Više je mogućih odgovora na ovo pitanje. No, to izlazi iz okvira ovog članka.

Meni se čini da autori prijedloga matematičkog kurikula nisu uopće bili (niti su to danas) svjesni što su radili i pisali informatičari, tj. nisu imali uvida, niti komunikaciju s autorima *Računalnog razmišljanja*. Niti je pak ove bilo briga što matematičari pišu u svojem kurikulu (osim u naznakama nekih poveznica s matematikom).

Neosporno je da matematička zajednica nema pojma što se dogodilo/događa, niti iskazuje namjeru za modernizacijom matematičkog kurikula (koji je takav kakav jest već više od 100 godina) i ovakvog „practiciranja” matematike.

4. Zaključci i predviđanje

1. Prijedlozi kurikula informatike i matematike nisu međusobno usklađeni.
2. Matematički kurikulum sadržajno je zastario i treba ga osuvremeniti.
3. Informatički kurikulum u domeni *Računalno razmišljanje i programiranje* u osnovnoj školi loša je i preuranjena te uzrastu neprilagođena nadopuna srednjoškolskog matematičkog kurikula.

U srednjoj školi niz matematičkih postupaka koje bi učenik trebao upoznati metodom „olovke i papira” (da bi na taj način stekao nužno iskustvo i razumijevanje postupka) eliminira se i svodi na virtualno. Učenika se bez razumijevanja matematike poučava programirati računalo da radi/rješava matematički problem o kojemu učenik nema ni znanje, a ni iskustvo.

4. Matematički sadržaji u *Računalnom razmišljanju i programiranju* na razini su „recepta” koji se ugrađuju u odabrani programski jezik.
5. Preranom i uzrastu neprilagođenom uporabom matematičkih pojmova i procedura iskazuje se nepoznavanje matematike, a učenicima „poručuje” da je matematika skup „recepta” koje onda računalo bolje procesuirala od učenika.
6. Na ovaj se način tvrdi da je matematika dio računalne znanosti, a ne obrnuto – da je računalna znanost dio matematike i da je iz nje nastala.
7. Razmatrajući scenarije poučavanja (sukladno sadržaju i uzrastu), samo se od sebe nameće predviđanje: nepoznavanjem (ili nerazumijevanjem) ovih matematičkih sadržaja učenici će u „potrazi” za boljim ocjenama u predmetu Informatika izlaz tražiti u privatnim instrukcijama i receptima *dajte mi gotovu formulu/program*, a ne u promišljanju problema i odabiru prihvatljivih alata za njegovo

rješavanje. Da bi se alat (u ovom slučaju to je matematika) mogao uporabiti, mora ga se poznavati! A to u ovom predloženom kurikulumu nije slučaj! Učenik nema ni teoretsku mogućnost na pravi način upoznati i razumjeti matematičke pojmove i procedure koji mu trebaju za programiranje.

8. U naslovu spomenute knjige nalazi se matematika za digitalno doba i programiranje, a ne matematički recepti za digitalno doba i programiranje. I time je sve u startu rečeno!
9. Ovaj će dio informatičkog kurikula izazvati u našem školstvu „kreativni” kaos i suprotan efekt od namjeravanog. Posebice kad se dovedu u vezu nabrojani matematički sadržaji i predviđeni brojevi sati nastave za domenu *Računalno razmišljanje i programiranje*.

5. Pitanje za kraj

Zanimljivo bi bilo saznati što o svemu ovome znaju nastavnici, roditelji i ostala javnost. Ja mislim da vrlo malo ili čak ništa!

Što mislite: hoće li ovako koncipiran dio informatičkog kurikula ostvariti dobre namjere i ciljeve koje su autori javno obznani?

Literatura:

1. Litvin, M., & Litvin, G. (2010.). *Mathematics for the Digital Age and Programming in Python*. Andover: Skylight Pub
2. Ministarstvo znanosti i obrazovanja. (2017.) *Nacionalni kurikulum nastavnoga predmeta matematika – prijedlog nakon javne rasprave*.
Dohvaćeno iz: <https://mzo.hr/sites/default/files/dokumenti/2017/OBRAZOVANJE/NACION-KURIK/PREDMETNI-KURIK/matematika.pdf>
3. Ministarstvo znanosti i obrazovanja. (2017.) *Nacionalni kurikulum nastavnoga predmeta informatika – nakon javne rasprave i recenzija*.
Dohvaćeno iz: <https://mzo.hr/sites/default/files/dokumenti/2017/OBRAZOVANJE/NACION-KURIK/PREDMETNI-KURIK/Informatika/informatika2.pdf>