Pascalov[1] trokut i broj *e*

Jens Carstensen i Alija Muminagić

Dobro je poznato da iz Pascalovog trokuta izvire mnogo zanimljivosti. O jednoj od mnogih (manje poznatoj), pišemo u ovom malom članku. Promotrimo Pascalov trokut.

0							1						
1						1		1					
2					1		2		1				
3				1		3		3		1			
4			1		4		6		4		1		
5		1		5		10		10		5		1	
6	1		6		15		20		15		6		1
⋮				...						...			

Vidimo da su u svakom retku sadržani neki binomni koeficijenti. Označimo retke odozgo prema dolje, počevši od 0. Uz takve oznake, n-ti redak sadržava binomne koeficijente

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2} ..., \binom{n}{n}.$$

Lako se pokazuje da je zbroj brojeva u n-tom retku jednak 2^n (ipak dokažite, ili algebarski ili kombinatorno).

Međutim, mi ćemo ovdje promatrati produkt brojeva u n-tom retku, tj.

$$p_n = \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Tako dobivamo niz brojeva (p_n):

$$1, 1, 2, 9, 96, 2500, 162000... .$$

Nije teško zaključiti da ovaj niz raste vrlo brzo. Pogledajmo kako se ponaša niz

$$r_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} \ ,$$

[1]Blaise Pascal (1623.-1662.), francuski matematičar, fizičar i izumitelj

tj. niz

$$1, \frac{2}{1}, \frac{9}{2} = 4.5, \frac{96}{9} = 10.667, \frac{2500}{96} = 26.042, \frac{162000}{2500} = 64.8, \ldots$$

Raste malo sporije, ali opet brzo. Nastavljamo sa

$$t_n = \frac{r_n}{r_{n-1}} = \frac{\dfrac{p_n}{p_{n-1}}}{\dfrac{p_{n-1}}{p_{n-2}}} = \frac{p_n \cdot p_{n-2}}{(p_{n-1})^2}.$$

Tako dobivamo tablicu:

n	p_n	r_n	t_n
1	1	1	1
2	2	2	2
3	9	4,5	2,25
4	96	10,667	2,37
5	2500	20,042	2,441
6	16200	64,8	2,488
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Slijedi iznenađenje. Slutimo da vrijedi

Poučak $t_n \to e$ za $n \to \infty$.

Dokaz: Imamo:

$$p_n = \binom{n}{0} \cdot \binom{n}{1} \cdot \binom{n}{2} \cdot \ldots \cdot \binom{n}{n}.$$

Primjenimo li formulu za binomni koeficijent $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, dobit ćemo

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{n!}{0!n!} \cdot \frac{n!}{1!(n-1)!} \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{n!}{n!0!} \\ &= \frac{(n!)^{n+1}}{(0! \cdot \ldots\, 2! \cdot \ldots \cdot n!)^2}. \end{aligned}$$

Dalje je

$$r_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\dfrac{(n!)^{n+1}}{(0!\cdot 1!\cdot 2!\cdot \ldots \cdot n!)^2}}{\dfrac{((n-1)!)^n}{(0!\cdot 1!\cdot 2!\cdot \ldots \cdot (n-1)!)^2}}$$
$$= \frac{(n!)^{n+1}\cdot [0!\cdot 1!\cdot 2!\cdot \ldots \cdot (n-1)!]^2}{[(n-1)!]^n \cdot [0!\cdot 1!\cdot 2!\cdot \ldots \cdot n!]^2}$$
$$= \frac{(n!)^n \cdot n!}{[(n-1)!]^n \cdot (n!)^2} = \frac{[(n-1)!]^n \cdot n^n}{[(n-1)!]^n \cdot n!}$$
$$= \frac{n^n}{n!}$$

Dalje je

$$t_n = \frac{r_n}{r_{n-1}} = \frac{\dfrac{n^n}{n!}}{\dfrac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}}$$
$$= \frac{n^n \cdot (n-1)!}{n!\cdot (n-1)^{n-1}} = \frac{n^{n-1}\cdot n \cdot (n-1)!}{n!\cdot (n-1)^{n-1}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \frac{n\cdot (n-1)!}{n!}$$
$$= \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{n-1}$$
$$= \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Zbog $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ za $n \to \infty$, slijedi da $t_n \to e$ za $n \to \infty$.

Literatura:

1. Harlan J. Brothers, *Math. Bite: Finding e in Pascal's Triangle*, Mathematics Magazine, 85 (1), 2012.
2. Jens Carstensen, *Pascals trekant og e*, Matematik Magasinet, 64, 2012.