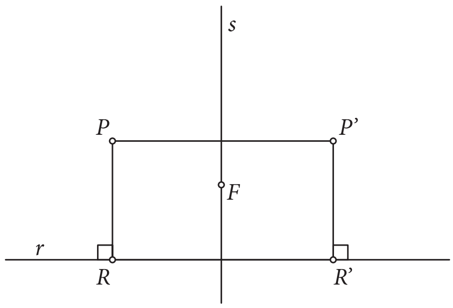
Geometrijska definicija parabole

MAJA STARČEVIĆ[1]

Parabola je krivulja koja može biti zadana jednadžbom. Ta jednadžba ovisi o izboru koordinatnog sustava. Najjednostavniji oblik koji može poprimiti je $y = cx^2$, za neki $c \in \mathbb{R}$. Parabola se može definirati i jednostavnije, neovisno o koordinatnom sustavu. Preciznije, možemo ju definirati kao skup točaka za koje vrijedi da im je udaljenost od zadanog pravca r (ravnalice ili direktrise) jednaka udaljenosti od zadane točke F, koja ne pripada pravcu r (zovemo ju fokus ili žarište parabole). U radu polazimo od pretpostavke da nam nije poznat izgled parabole već samo prethodno spomenuta geometrijska definicija. Na temelju te definicije otkrivat ćemo svojstva parabole. Pokazat ćemo i kako promjene ravnalice i fokusa utječu na parabolu.



Slika 1.

1. Svojstva parabole

1.1. Simetričnost parabole

Za početak ispitujemo simetričnost parabole. Neka je stoga P neka točka parabole i neka je R nožište okomice iz P na pravac r (Slika 1.). Tada prema definiciji parabole vrijedi $|PR| = |PF|$. Nadalje, neka je P' točka koja je simetrična točki P s obzirom na pravac s koji prolazi točkom F i okomit je na pravac r. Označimo s R' nožište okomice iz točke P' na pravac r. Kako je pravac PP' okomit na s, on je paralelan s pravcem r. Dakle, četverokut $PRR'P'$ je pravokutnik pa je $|P'R'| = |PR|$. Dakle, vrijedi $|P'R'| = |PR| = |PF| = |P'F|$ pa je i P' točka parabole. Drugim riječima, zadana parabola simetrična je s obzirom na pravac s.

[1]Maja Starčević, PMF-Matematički odsjek, Zagreb

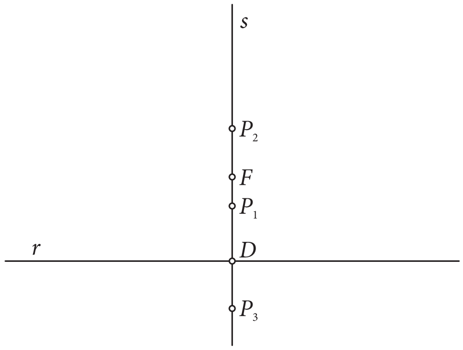
1.2. Pozicija parabole

Sada ćemo locirati parabolu, odnosno odredit ćemo kojem dijelu ravnine pripada.

Kako je $d(F, r) > 0$, lako je uočiti da F ne pripada paraboli. Isto vrijedi i za bilo koju točku pravca r.

U nastavku ćemo odrediti postoje li točke parabole koje se nalaze na pravcu s. Označimo s D nožište okomice iz F na pravac r.

Ako se točka parabole P_1 nalazi između točaka D i F (Slika 2.), onda mora vrijediti $|P_1F| = |P_1D|$. To svojstvo zadovoljava polovište dužine $\overline{FD}$. U nastavku ćemo tu točku parabole zvati tjeme parabole i označavat ćemo ju s T.

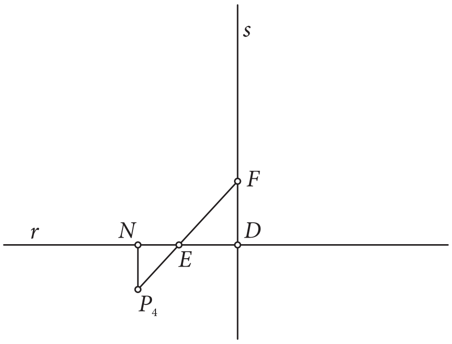


Slika 2.

Ako imamo točku P_2 na pravcu s, ali izvan dužine $\overline{FD}$, koja je bliža točki F nego točki D (Slika 2.), onda vrijedi $|P_2F| < |P_2D|$ pa P_2 ne može pripadati paraboli.

U posljednjem slučaju promatramo točku P_3 izvan dužine $\overline{FD}$, koja je bliža točki D nego F, pa je $|P_3D| < |P_3F|$ i opet nemamo točku koja pripada paraboli. Zaključujemo da imamo samo jednu točku parabole na pravcu s.

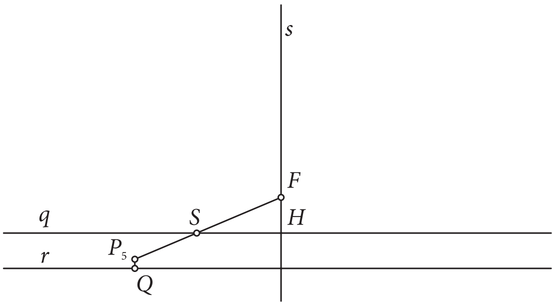
Sad ćemo promatrati dio ravnine s one strane pravca r gdje se ne nalazi točka F. Pretpostavimo da je P_4 točka koja pripada tom dijelu ravnine i ne pripada pravcu s (Slika 3.). Neka je točka E presjek pravaca r i P_4F te neka je N nožište okomice iz P_4 na pravac r. Tada je očito $d(P_4, r) = |P_4N| < |P_4E| < |P_4F|$ pa P_4 ne može pripadati zadanoj paraboli.



Slika 3.

Nadalje, označimo s q pravac koji je paralelan s r i koji se nalazi na jednakoj udaljenosti od pravca r i od točke F. Uzmimo sada točku P_5 koja ne pripada pravcu s, a nalazi se između pravaca r i q, ili na pravcu q (Slika 4.).

Neka je točka Q nožište okomice iz točke P_5 na pravac r, točka S presjek je pravaca q i FP_5, a točka H presjek je pravaca q i s. Označimo $a = d(F, r)$. Tada je $|P_5Q| \leq \frac{a}{2}$, dok je $|FP_5| \geq |FS| > |FH| = \frac{a}{2}$. Dakle, $d(P_5, F) > d(P_5, r)$, pa ni u tom dijelu ravnine nemamo točaka parabole.



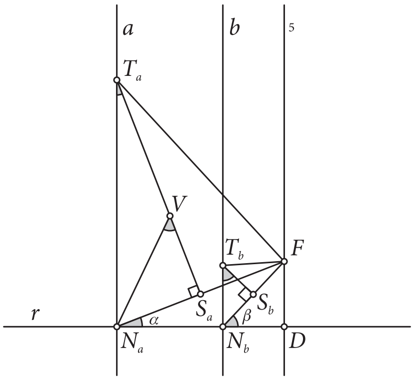
Slika 4.

Konačno, možemo zaključiti da na pravcu q imamo samo jednu točku parabole (tjeme parabole), dok sve ostale točke parabole pripadaju dijelu ravnine koji se nalazi s one strane pravca q kojoj pripada točka F.

1.3. Oblik parabole

Ako je zadan neki pravac b različit od s, koji je okomit na pravac r, s N_b, označimo njegov presjek s pravcem r (Slika 5.).

Na pravcu b tražimo točku parabole, tj. točku T_b za koju je $|T_bN_b| = |T_bF|$. Nju možemo konstruirati tako da nađemo presjek pravca b sa simetralom dužine $\overline{FN_b}$. Taj presjek postoji i jedinstven je.



Slika 5.

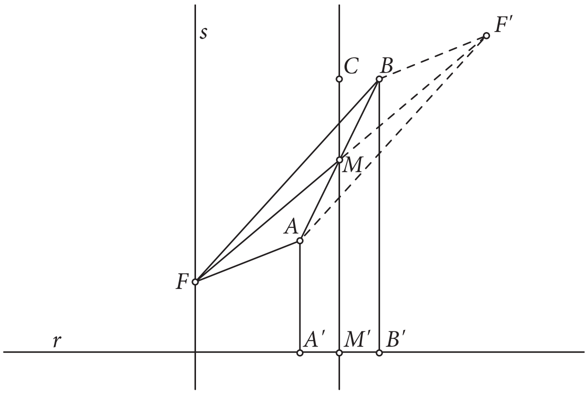
Pitamo se što se događa s točkom T_b kad se pravac b udaljava od točke F. Uzmimo stoga i pravac a, okomit na pravac r i s iste strane pravca s, i neka je a udaljeniji od točke F u odnosu na pravac b (Slika 5.).

Označimo $\alpha = |\angle FN_a D|$ i $\beta = |\angle FN_b D|$. Tada je očito $\alpha < \beta$. Označimo sa S_a i S_b polovišta dužina $\overline{FN_a}$ i $\overline{FN_b}$ redom. S obzirom da je $|\angle N_a T_a S_a| = \alpha$ i $\alpha < \beta < 90°$, očito je da postoji točka V na dužini $\overline{T_a S_a}$ takva da je $|\angle N_a V S_a| = \beta$. Kako je i $|\angle N_b T_b S_b| = \beta$, pravokutni trokuti $N_b S_b T_b$ i $N_a S_a V$ su slični. Zbog $|N_a S_a| > |N_b S_b|$ imamo i $|N_a V| > |N_b T_b|$.

Očito je $|\angle N_a V T_a| > 90°$ pa je stranica $\overline{N_a T_a}$ najdulja u trokutu $N_a V T_a$ te imamo $|N_a T_a| > |N_a V| > |N_b T_b|$. Prema tome, točka T_b bliža je pravcu r od točke T_a. Drugim riječima, kako se točke parabole udaljavaju od pravca s, udaljavaju se i od pravca r.

Pogledajmo i zakrivljenost parabole. Uzmimo dvije točke parabole s iste strane pravca s. Neka su to točke A i B (Slika 6.). Označimo s A' i B' nožišta okomica iz tih točaka na pravac r. Neka je točka M polovište dužine $\overline{AB}$, a M' nožište okomice iz nje na pravac r. Tada vrijedi

$$|MM'| = \frac{|AA'| + |BB'|}{2}.$$



Slika 6.

Neka je F' točka centralno simetrična točki F u odnosu na točku M. Tada je $FAF'B$ paralelogram.

Iz nejednakosti trokuta FAF' dobivamo $|FF'| < |FA| + |AF'|$, odnosno

$$|FM| = \frac{1}{2}|FF'| < \frac{|FA| + |FB|}{2}.$$

Kako su točke A i B na paraboli, vrijedi $|FA| = |AA'|$ i $|FB| = |BB'|$, pa je

$$|FM| < \frac{|AA'| + |BB'|}{2} = |MM'|$$

i prema tome točka M ne pripada paraboli.

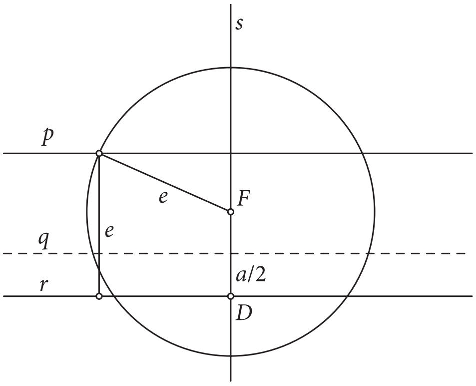
Dokažimo da isto vrijedi i za sve točke koje se nalaze na pravcu MM', nalaze se s iste strane pravca r kao i točka M te su udaljenije od pravca r nego točka M. Uzmimo točku C koja ima to svojstvo. Vrijedi

$$|CM'| = |CM| + |MM'| > |CM| + |FM| > |FC|.$$

Prema tome, takva točka C ne može pripadati paraboli pa je točka parabole koja leži na pravcu MM' bliža pravcu r od točke M. Time smo odredili zakrivljenost parabole, odnosno ako se točka F nalazi iznad pravca r, parabola je okrenuta prema gore.

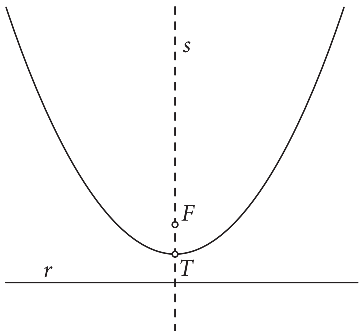
1.4. Ograničenost parabole

Zanima nas i je li parabola možda ograničena u smjeru pravca r ili pravca s. Kako na proizvoljnom pravcu paralelnom sa s možemo naći točku parabole, zadana parabola očito nije ograničena krivulja u smjeru pravca r. S druge strane, neka je $e > \frac{a}{2}$ proizvoljan broj. Povucimo pravac p koji je za e udaljen od pravca r i nalazi se na istoj strani pravca r kao i točka F (Slika 7.). Neka je k kružnica sa središtem u točki F, radijusa e. Kako je $d(F, p) < e$, pravac p i kružnica k sijeku se u dvije točke koje pripadaju paraboli (i simetrične su u odnosu na pravac s). S obzirom da postoji točka parabole na proizvoljnoj udaljenosti od pravca r, većoj od $\frac{a}{2}$, parabola nije ograničena ni u smjeru pravca s.



Slika 7.

Sada, koristeći sva dobivena svojstva, možemo skicirati parabolu (Slika 8.).

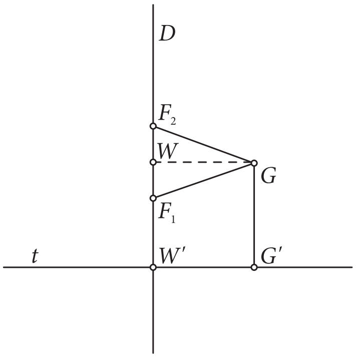


Slika 8.

2. Ovisnost parabole o položaju ravnalice i fokusa

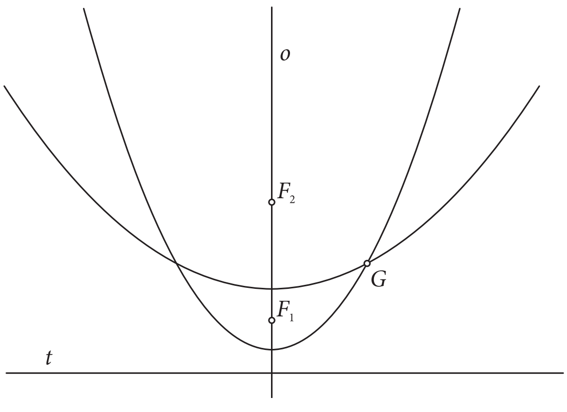
Za kraj ćemo proučiti kako promjene položaja ravnalice i fokusa parabole utječu na njezin izgled i položaj. Očito je da ukoliko fokus translatiramo po pravcu koji je paralelan s ravnalicom, parabola će se translatirati u smjeru ravnalice, odnosno za isti vektor. Također, ako i ravnalicu i fokus translatiramo za isti vektor, i parabola će se translatirati za isti vektor. Ako i ravnalicu i fokus rotiramo oko neke točke za isti kut, i parabola će se zarotirati oko te točke za isti kut.

Pitamo se konačno što će se događati s parabolom ako njezin fokus udaljavamo od ravnalice po pravcu koji je okomit na ravnalicu. Neka je stoga dan pravac o okomit na zadanu ravnalicu t i neka su na njemu dani fokusi F_1 i F_2 dviju parabola s iste strane pravca t (Slika 9.).



Slika 9.

Pretpostavimo sada da te dvije parabole imaju zajedničku točku G. Neka je G' nožište okomice iz G na pravac t. Tada je $|F_1G| = |F_2G| = |GG'|$. Zaključujemo da se G nalazi na simetrali dužine $\overline{F_1F_2}$. Označimo s W polovište dužine $\overline{F_1F_2}$ i neka je W' nožište okomice iz W na t. Tada je $WW'G'G$ pravokutnik pa je $|WW'| = |GG'| = |F_1G|$ te se točka G nalazi i na kružnici sa središtem u točki F_1 radijusa $|WW'|$. Očito je da se ta kružnica i simetrala dužine $\overline{F_1F_2}$ sijeku u dvije točke koje su simetrične



Slika 10.

u odnosu na pravac o. Prema tome, svake dvije parabole koje su definirane na ovakav način imaju presjek u dvije točke jednako udaljene od pravca t. S druge strane, ako je F_1 bliža pravcu t od točke F_2, iz definicije parabole lako slijedi da je tjeme parabole određene točkom F_1 bliže pravcu t nego tjeme parabole određene točkom F_2. Kako smo dokazali da se te dvije parabole sijeku, zaključujemo da parabola definirana pomoću točke F_1 ima uži otvor od parabole definirane pomoću točke F_2 (Slika 10.).

Sada pretpostavimo da su zadane dvije parabole, Γ_1 i Γ_2, određene ravnalicama r_1 i r_2 te fokusima F_1 i F_2 redom, pri čemu se ravnalice i/ili fokusi ne podudaraju.

Ako su pravci r_1 i r_2 paralelni, parabolu Γ_2 dobivamo iz parabole Γ_1 tako da na nju primijenimo barem jednu od sljedećih transformacija: translaciju uzduž pravca r_1, translaciju uzduž nekog pravca okomitog na r_1, zrcaljenje s obzirom na pravac r_1 i promjenu širine otvora parabole.

Ako se pravci r_1 i r_2 sijeku u jednoj točki, zarotiramo prvo parabolu Γ_1 oko točke presjeka tih dvaju pravaca za kut koji oni čine. Na dobivenu parabolu moramo eventualno još primijeniti neke od transformacija iz prvog slučaja da bismo došli do parabole Γ_2.

Konačno, možemo zaključiti da bilo kakva promjena ravnalice ili fokusa parabole utječe na položaj i/ili otvor parabole te stoga ta dva elementa jedinstveno određuju parabolu.