Kvalitativni, analitički i numerički pristup u nastavi matematike[1]

Boris Čulina[2] i Sanja Vitaljić[3]

Ključne riječi: kvalitativno rješavanje, analitičko rješavanje, numeričko rješavanje, matematički software

Sažetak. U našem sustavu poučavanja matematike dominira analitički pristup, dok je zanemaren kvalitativni i numerički pristup. To ima negativne posljedice za ispravan matematički razvoj učenika. Ograničava mu se pristup rješavanju problema i opseg problema koje može riješiti. Gledano konceptualno, učenik ne razvija kvalitativan način razmišljanja i ne usvaja bitne ideje numeričke matematike. Kvalitativan i numerički pristup podrazumijevaju odgovarajući software, što dodatno potencira nužnost uvođenja adekvatnog matematičkog softwarea u nastavu matematike. Na primjeru rješavanja jednadžbi pokazana je prednost izbalansiranog kvalitativnog, analitičkog i numeričkog pristupa.

1. Opća razmatranja

Pogledamo li nastavni program iz matematike za osnovnu i srednju školu [1], lako je uočiti da u našem sustavu obrazovanja dominira analitički pristup. Višestruki su negativni učinci takvog pristupa.

Analitički pristup, kako idemo prema težim problemima, postaje sve kompleksniji. Inzistiranjem na analitičkom pristupu previše se vremena u nastavi mora utrošiti na svladavanje specijalnih tehnika, npr. rješavanja jednadžbi ili pak integriranja, koje su u svojoj primjeni previše ograničene, a u izvršenju dugotrajne. One tako negativno djeluju na razvoj učenikova zanimanja za matematiku jer se tu matematika svodi na formalnu kombinatoriku upotrebe specijalnih tehnika i mehaničku upornost u njihovom izvršenju.

No, i takvi teži problemi su na umjetan način izdvojeni upravo kao oni problemi koji se mogu analitički riješiti. Većina problema uopće se ne može analitički riješiti, ili

[1]Predavanje održano na 7. kongresu nastavnika matematike RH, 2016. godine u Zagrebu
[2]Boris Čulina, Veleučilište Velika Gorica
[3]Sanja Vitaljić, Druga gimnazija, Split

su pak analitički načini rješavanja toliko komplicirani da je i pobornicima analitičkog pristupa jasno da se ne mogu uvesti u sustav obrazovanja. Sjetimo se samo ogromne formule za rješenje polinomne jednadžbe trećeg stupnja. Inzistiranje na analitičkom rješavanju postavlja umjetne granice na rješavanje problema i ograničava učenikov razvoj na tako ograničene probleme i tehnike rješavanja.

Inzistiranje na analitičkom pristupu zanemaruje kvalitativan i numerički pristup koji s jedne strane nadopunjuje analitički pristup, a s druge omogućuje rješavanje problema koje analitički ne možemo riješiti. Usvajanje tih pristupa ne samo da učeniku daje načine za rješavanje daleko šireg skupa problema, već razvija nove bitne elemente matematičkog načina razmišljanja i adekvatno ga priprema za stvarnu upotrebu matematike u njegovoj budućoj struci.

Smisao kvalitativnog pristupa određenom tipu problema je da se razvije aparat kojim možemo jednostavno doznati neka kvalitativna svojstva rješenja problema, a koja nam mogu biti osnova za sigurnije precizno nalaženje rješenja. Nadalje, kvalitativan pristup, pored toga što doprinosi rješavanja problema, pomaže i razvijanju ispravne intuicije o području iz kojeg dolazi taj tip problema. Kvalitativan pristup najčešće se zasniva na razvijanju odgovarajućeg vizualnog okruženja za određeni tip problema. Spomenimo samo jednostavan školski primjer uvođenja koordinatnog sustava preko kojeg se mogu vizualizirati jednadžbe i funkcije.

Obično su rješenja problema brojevi ili pak numeričke funkcije. Sama zamisao o realnim brojevima leži na bitnoj matematičkoj ideji aproksimacije – iracionalne brojeve aproksimiramo racionalnima. Isto tako i iracionalne funkcije aproksimiramo jednostavnijim polinomnim funkcijama. Tako je pojam aproksimacije, zajedno s njim povezanim numeričkim tehnikama računanja rješenja do na traženu točnost, u samoj osnovi sustava realnih brojeva i veza među realnim brojevima. Cijeli ovaj matematički bitan i moćan aparat numeričkih ideja, principa i tehnika zanemaren je u našem sustavu školovanja. Time je i učenik oštećen za numerički način razmišljanja zasnovan na ideji aproksimacije i pojmu točnosti aproksimacije, kao i za numerički pristup rješavanju problema, koji je često i algoritamski pristup rješavanju problema.

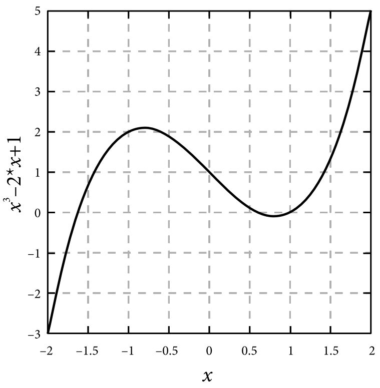
Smatramo vrlo važnim za matematičko obrazovanje da se, za razliku od sadašnjeg stanja, na svim nivoima obrazovanja povede adekvatna briga i o kvalitativnoj i o numeričkoj komponenti matematike. Rješavanje određenih tipova problema su prirodna mjesta za razvijanje odgovarajuće kvalitativne i numeričke matematike. Naravno, najbolje je adekvatno kombinirati kvalitativni, analitički i numerički pristup.

Valja napomenuti da kvalitativni i numerički pristup obično podrazumijevaju odgovarajući software da bi se mogli efektivno izvesti. Zbog toga, kao i zbog drugih sadržaja u nastavi, danas postaje nužno razmisliti kakav bi matematički software valjalo dizajnirati za potrebe našeg sustava obrazovanja, kao odgovarajuću pomoć i nadopunu u nastavi. Ono što su nekad bile logaritamske tablice, a poslije džepna računala, danas mora biti odgovarajući matematički software. Za razliku od logaritamskih tablica i džepnih računala, koji su u osnovi nezanimljivi, odgovarajući software može nastavu matematike učiniti kreativnijom i zanimljivijom.

Osnovni srednjoškolski primjeri kvalitativnog, analitičkog i numeričkog pristupa rješavanju problema su rješavanje jedne jednadžbe s jednom nepoznanicom, rješavanje dviju jednadžbi s dvjema nepoznanicama te ispitivanje svojstava funkcija. Mi ćemo ovdje ilustrirati kombiniranje tih pristupa na rješavanju jedne jednadžbe s jednom nepoznanicom.

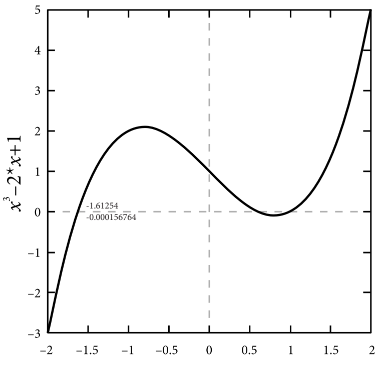
2. Primjer rješavanja jedne jednadžbe s jednom nepoznanicom

Koristeći odgovarajući software (ovdje ćemo koristiti open source software Maxima opisan u [2]) možemo, ne samo kvalitativno već i kvantitativno prilično precizno, nacrtati graf funkcije $f(x)$. Svaku jednadžbu možemo prebacivanjem svih članova na lijevu stranu svesti na oblik $f(x) = 0$. To znači da su rješenja jednadžbe isto što i nul-točke funkcije $f(x)$. A njih je iz grafa funkcije lako kvalitativno odrediti – to su zajedničke točke grafa funkcije i x – osi. Na taj način imamo jednostavan postupak kojim možemo kvalitativno riješiti sve jednadžbe! A to nije mala stvar. Uzmimo za primjer jednadžbu $x^3 = 2x - 1$. Prebacimo li sve članove na lijevu stranu, dobit ćemo jednadžbu $x^3 - 2x + 1 = 0$. Tako rješavanje jednadžbe svodimo na traženje nul-točaka funkcije $f\left(x\right) = x^3 - 2x + 1$. Nacrtamo li ovu funkciju pomoću nekog softwarea (ovdje je upotrijebljen paket Maxima) (Slika 1.), traženje nul-točaka smo sveli na vizualno identificiranje zajedničkih točaka grafa funkcije i x – osi.



Slika 1.

Tako vidimo da funkcija ima tri nul-točke i približno im možemo očitati vrijednosti; to su (približno) -1.7, 0.6 i 1. Ako želimo neku vrijednost preciznije odrediti, npr. negativno rješenje, možemo pozicionirati kursor na odgovarajuću zajedničku točku grafa i x – osi. Na ekranu se pojave koordinate kursora: (Slika 2.)



Slika 2.

Tako možemo točnije očitati negativno rješenje: ono je približno -1.6.

Kad znamo koliko ima rješenja i otprilike koja su, sigurniji smo u analitičkom i numeričkom traženju preciznog rješenja.

Analitički bismo mogli riješiti ovu jednadžbu tako da s nešto upornosti i sreće faktoriziramo izraz na lijevoj strani:

$$x^3-2x+1=x^3+x^2-x-x^2-x+1=x\left(x^2+x-1\right)-\left(x^2+x-1\right)$$
$$=\left(x-1\right)\left(x^2+x-1\right)$$

Tako dobijemo jednadžbu $\left(x-1\right)\left(x^2+x-1\right)=0$ koja se svede na dvije jednadžbe:

$$x-1=0 \text{ i } x^2+x-1=0$$

s rješenjima $x = 1$ i $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Ova rješenja bismo mogli dobiti i na sljedeći više sistematski način, ali koji traži od učenika i više znanja. Graf nam sugerira da je 1 rješenje jednadžbe, što lako provjerimo uvrštavanjem $x = 1$ u jednadžbu. To znači da je polinom x^3-2x+1 djeljiv polinomom $x - 1$. Algoritam dijeljenja polinoma daje nam za rezultat polinom x^2+x-1. Tako smo dobili traženu faktorizaciju $x^3-2x+1=\left(x-1\right)\left(x^2+x-1\right)$.

Znajući na osnovi kvalitativnog pristupa gdje je rješenje, možemo ga numeričkim pristupom po volji precizno odrediti. To je pogotovo važno u slučaju kad ne znamo analitički naći rješenje ili je postupak kompliciran. Ako je učeniku jasan smisao numeričkog postupka kao nalaženja sve bolje aproksimacije pravog rješenja, i ako mu je jasan jedan konkretan takav postupak, npr. metoda polovljenja koju je vrlo jednostavno objasniti i implementirati, npr. u Excelu, tada učenik može upotrijebiti odgovarajuću naredbu koja mu za danu jednadžbu u danom intervalu daje rješenje do na zadanu točnost. Npr. iz kvalitativnog pristupa znamo da se negativno rješenje jednadžbe $x^3=2x-1$ nalazi u intervalu [-2,-1]. Ako želimo naći rješenje s greškom manjom od tisućinke, utipkat ćemo u program Maxima sljedeću naredbu:

```
find_root(x^3 = 2*x-1, x, -2, -1, abserr = 0.0001).
```

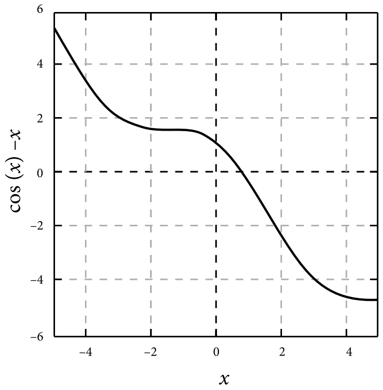
Prvi argument je jednadžba, drugi varijabla po kojoj rješavamo jednadžbu, treći i četvrti granice u kojima tražimo rješenje, a zadnji dopuštena apsolutna greška. Maxima će nam dati rješenje

-1.618032086342136

Naravno, zbog tražene točnosti, samo prve četiri decimale uzimamo za pouzdane znamenke, odnosno za rješenje s traženom točnošću uzimamo broj zaokružen na četiri decimale

$$x=-1.6180\,.$$

Vrlo malu promjenu treba napraviti da bismo od jednadžbe koju je lako riješiti dobili jednadžbu koju je nemoguće analitički riješiti. Takav je npr. prijelaz s najjednostavnije trigonometrijske jednadžbe npr. $\cos x=\frac{1}{2}$ na jednadžbu $\cos x = x$ koju je nemoguće analitički riješiti. No kvalitativan pristup lako nam daje koliko ima rješenja i gdje se nalaze. Prebacimo x na lijevu stranu jednadžbe: $\cos x - x = 0$ i nacrtajmo funkciju $f(x) = \cos x - x$:



Vidimo da je rješenje negdje oko 1. Također vidimo da je rješenje sigurno između 0 i 2, pa ako ga npr. želimo naći s dvije pouzdane decimale, utipkat ćemo u Maximu naredbu

```
find_root(cos(x) = x, x, 0, 2, abserr = 0.01)
```

i dobiti 0.7384368383172162. S obzirom na zahtijevanu točnost, rješenje je $x = 0.74$.

Literatura:

1. *Nacionalni okvirni kurikulum*, Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta RH, Zagreb, 2011.
2. Maxima software https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Maxima_(software)&oldid=701852644