IZ NASTAVNE PRAKSE

Popoviciujeva nejednakost

RADOMIR LONČAREVIĆ[1]

Rumunjski matematičar Tiberie Popoviciu (1906. – 1975.) dokazao je 1965. poznatu nejednakost iz područja konveksne analize (vidi [1.]), koja ima primjene, medu ostalim, u brojnim zadatcima koji se pojavljuju u matematičkim natjecanjima. Dokazat ćemo Popoviciujevu nejednakost, nakon čega ćemo pokazati primjenu na nekoliko zadataka te dati nekoliko zadataka za vježbu.

Definicija 1. Neka je I interval u $\mathbb{R}$. Kažemo da je funkcija $f: I \to \mathbb{R}$ konveksna ako za sve $x, y \in I$ i za svaki $\beta \in [0,1]$ vrijedi

$$f((1-\beta)x + \beta y) \le (1-\beta) f(x) + \beta f(y).$$

Funkcija f je strogo konveksna ako za $x \ne y$ i za sve $\beta \in (0,1)$ vrijedi stroga nejednakost.

Definicija 2. Funkciju $f: I \to \mathbb{R}$ nazivamo konveksnom u Jensenovom smislu ili J-konveksnom na I ako za sve $x, y \in I$ vrijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Funkcija f je strogo J-konveksna ako za sve $x, y \in I, x \ne y$ vrijedi stroga nejednakost.

Teorem 1. Funkcija $f: I \to \mathbb{R}$ konveksna je ako i samo ako za sve $x\ ,\ldots,x\ \in I$ i za sve $\beta_1,\ldots,\beta_n \in [0,1]$ takve da je $\sum_{k=1}^{n} \beta_k = 1$ vrijedi

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \beta_k f(x_k).$$

Napomena 1. Poseban slučaj prethodne nejednakosti kada je $\beta_i = \frac{1}{n}, i = 1,\ldots,n$, tj.

[1]Radomir Lončarević, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n},$$

jedna je od najčešćih oblika Jensenove nejednakosti koja se koristi u rješavanju klasičnih zadataka vezanih uz nejednakosti. Dokazao ju je danski matematičar J. L. W. V. Jensen (1859. – 1925.) u člancima objavljenim 1905. i 1906. godine.

Teorem 2. Neka je $f: I\to\mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Funkcija f konveksna je ako i samo ako je J-konveksna.

Prethodni teorem koristit ćemo u dokazu Popoviciujeve nejednakosti, a govori nam o jednakosti pojmova konveksnosti i J-konveksnosti za neprekidne funkcije.

Teorem 3. (Popoviciujeva nejednakost) Neka je $f: I\to\mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je f konveksna ako i samo ako je

$$\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}+f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\geq\frac{2}{3}\left[f\left(\frac{x+y}{3}\right)+f\left(\frac{x+z}{3}\right)+f\left(\frac{y+z}{3}\right)\right]$$

za sve $x,y,z\in I$. U slučaju da je f strogo konveksna funkcija tada vrijedi stroga nejednakost za sve $x,y,z\in I$ osim za $x=y=z$.

Dokaz. $(\Rightarrow)$ Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x\leq y\leq z$. Ako je $y\leq\frac{x+y+z}{3}$, slijedi da je $y\leq\frac{x+z}{2}$, tj.

$$\frac{x+y+z}{3}\leq\frac{x+\frac{x+z}{2}+z}{3}=\frac{x+z}{2}\leq z.$$

Budući da je $x\leq\frac{y+z}{2}$, imamo da je

$$\frac{x+y+z}{3}\leq\frac{\frac{y+z}{2}+y+z}{3}=\frac{y+z}{2}\leq z.$$

Odavde slijedi da postoje $s,t\in[0,1]$ takvi da je

$$\frac{x+z}{2}=s\cdot\frac{x+y+z}{3}+(1-s)\cdot z$$

$$\frac{y+z}{2}=t\cdot\frac{x+y+z}{3}+(1-t)\cdot z.$$

Zbrajanjem prethodnih jednakosti te sređivanjem izraza dobivamo

$$(x+y-2z)(s+t-\frac{3}{2})=0.$$

Ako je $x+y-2z=0$, onda je nužno $x=y=z$, i time je Popoviciujeva nejednakost očita.

Ako je $s+t-\frac{3}{2}=0$, onda zbrajanjem sljedeće tri nejednakosti:

$$f\left(\frac{x+z}{2}\right)\leq s\cdot f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)+(1-s)\cdot f(z)$$

$$f\left(\frac{y+z}{2}\right)\leq t\cdot f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)+(1-t)\cdot f(z)$$

$$f\left(\frac{x\quad y}{2}\right)\leq \frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y),$$

dobivamo

$$f\left(\frac{x+z}{2}\right)+f\left(\frac{y+z}{2}\right)+f\left(\frac{y+z}{2}\right)\leq (s+t)f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)+\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)+(2-s-t)f(z)$$

pa zbog $s+t=\frac{3}{2}$ imamo

$$f\left(\frac{x+z}{2}\right)+f\left(\frac{y+z}{2}\right)+f\left(\frac{y+z}{2}\right)\leq \frac{3}{2}f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)+\frac{1}{2}(f(x)+f(y)+f(z)),$$

odakle množenjem s $\frac{2}{3}$ dobivamo traženu nejednakost

($\Leftarrow$) Zbog neprekidnosti i Teorema 2. dovoljno je pokazati da je funkcija f konveksna u Jensenovom smislu. Ako je $y=z$, onda iz Popoviciujeve nejednakosti slijedi

$$\frac{f(x)+2f(y)}{3}+f\left(\frac{x+2y}{3}\right)\geq \frac{2}{3}\left(2f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f(y)\right)$$

$$\frac{f(x)}{3}+f\left(\frac{x+2y}{3}\right)\geq \frac{4}{3}f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\frac{1}{4}f(x)+\frac{3}{4}f\left(\frac{x+2y}{3}\right)\geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

za sve $x, y\in I$, pa je f konveksna u Jensenovom smislu.

Navest ćemo, bez dokaza, neke dovoljne uvjete za konveksnost. Dokaz se može vidjeti u [2.].

Teorem 4. Neka je $f: I \to \mathbb{R}$ dva puta derivabilna funkcija na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija f konveksna je na I ako i samo ako je $f'' \geq 0, \forall x \in I$.

Sljedeći korolar namijenjen je čitateljima koji ne poznaju diferencijalni račun, ali poznaju grafove elementarnih funkcija.

Korolar 1. Neka je $f: I \to \mathbb{R}$ dva puta derivabilna funkcija na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Tada je f konveksna na I ako se za bilo koji $x_0 \in I$ sve točke grafa funkcije f nalaze iznad tangente grafa povučene u točki $(x_0, f(x_0))$.

Zadaci su preuzeti iz [3.], [4.] i [5.].

Zadatak 1. Neka su x_1, x_2, x_3 pozitivni brojevi, pri čemu nisu svi istodobno jednaki. Dokažite da je

$$27\prod_{i<j}(x_i + x_j)^2 > 64x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)^3.$$

Rješenje. Promotrimo funkciju $f(x) = -\ln x, x \in (0, +\infty)$. Kako je $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$, za svaki $x \in (0, \infty)$, slijedi da je f strogo konveksna na $(0, \infty)$. Primjenom Popoviciujeve nejednakosti imamo

$$-\ln x_1 - \ln x_2 - \ln x_3 - 3\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) > -2\ln\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\cdot\frac{x_2 + x_3}{2}\cdot\frac{x_3 + x_1}{2}\right),$$

$$\ln(x_1x_2x_3) + \ln\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^3 < \ln\left(\frac{(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)}{8}\right)^2,$$

$$(x_1x_2x_3)\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^3 < \left(\frac{(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)}{8}\right)^2,$$

$$\frac{1}{27}(x_1x_2x_3)(x_1 + x_2 + x_3)^3 < \frac{1}{64}(x_1 + x_2)^2(x_2 + x_3)^2(x_3 + x_1)^2.$$

Odatle množenjem s 27 · 64 dobivamo traženu nejednakost.

Zadatak 2. Neka su *x, y, z* pozitivni realni brojevi. Dokažite nejednakost

$$\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} \geq 4\left(\frac{z}{x+y} + \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z}\right).$$

Rješenje. Promotrimo funkciju $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^+$. Kako je $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}^+$, slijedi da je f strogo konveksna na $\mathbb{R}^+$. Primjenom Popoviciujeve nejednakosti imamo

$$\frac{x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}+z+\frac{1}{z}}{3}+\frac{x+y+z}{3}+\frac{3}{x+y+z}\geq\frac{2}{3}\left(\frac{x+y}{2}+\frac{2}{x+y}+\frac{x+z}{2}+\frac{2}{x+z}+\frac{y+z}{2}+\frac{2}{y+z}\right),$$

$$\frac{2}{3}(x+y+z)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{3}{x+y+z}\geq\frac{2}{3}\left(x+y+z+\frac{2}{x+y}+\frac{2}{x+z}+\frac{2}{y+z}\right),$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{9}{x+y+z}\geq 4\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}\right),$$

odakle množenjem s $x+y+z\neq 0,$ dobivamo

$$\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}\geq 4\left(\frac{x+y+z}{x+y}+\frac{x+y+z}{x+z}+\frac{x+y+z}{y+z}\right)-12,$$

$$\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}\geq 4\left(\frac{x+y+z}{x+y}+\frac{x+y+z}{x+z}+\frac{x+y+z}{y+z}-\frac{x+y}{x+y}-\frac{x+z}{x+z}-\frac{y+z}{y+z}\right)$$

$$=4\left(\frac{z}{x+y}+\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}\right).$$

Zadatak 3. Dokaži da za svaki trokut ABC vrijedi nejednakost

$$\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{s}{2R},$$

gdje su α,β,γ njegovi unutarnji kutovi, *s* poluopseg i *R* polumjer trokutu opisane kružnice.

Rješenje. Promotrimo funkciju $f(x)=-\sin x, x\in[0,\pi].$

Kako je $f''(x)=\sin x\geq 0,\forall x\in[0,\pi],$ dana funkcija je konveksna na intervalu $[0,\pi].$ Primjenom Popoviciujeve nejednakosti imamo

$$-\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}-\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\geq-\frac{2}{3}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\frac{\beta+\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\right).$$

Kako je $\alpha+\beta+\gamma=\pi,$ imamo da je u svakom trokutu

$$\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\frac{\beta+\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Odavde slijedi da je

$$-\frac{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\geq-\frac{2}{3}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\right).$$

U svakom trokutu vrijedi

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{s}{4R}.$$

Primjenom prethodne jednakosti pa množenjem s $-\frac{3}{2}$ dobivamo traženu nejednakost

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{s}{2R}\leq\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Zadatak 4. Za svaki šiljastokutni trokut s kutovima α,β,γ vrijedi nejednakost

$$tg\alpha+tg\beta+tg\gamma\geq\frac{2s}{r}-3\sqrt{3}.$$

Rješenje. Promotrimo funkciju $f(x)=tgx, x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

Kako je $f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}>0, \forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$ pa je f strogo konveksna na $(0,\frac{\pi}{2})$. Primjenom Popoviciujeve nejednakosti imamo

$$\frac{tg\alpha+tg\beta+tg\gamma}{3}+tg\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\geq\frac{2}{3}\left(tg\frac{\alpha+\beta}{2}+tg\frac{\beta+\gamma}{2}+tg\frac{\alpha+\gamma}{2}\right),$$

a odavde zbog $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, imamo

$$tg\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\sqrt{3},$$

$$tg\frac{\alpha+\beta}{2}+tg\frac{\beta+\gamma}{2}+tg\frac{\alpha+\gamma}{2}=ctg\frac{\alpha}{2}+ctg\frac{\beta}{2}+ctg\frac{\gamma}{2}=\frac{s}{r}.$$

Sada je

$$\frac{tg\alpha+tg\beta+tg\gamma}{3}+\sqrt{3}\geq\frac{2}{3}\cdot\frac{s}{r},$$

odakle množenjem s 3 dobivamo danu nejednakost.

Zadatak 5. Dokažite da za svaki šiljastokutni trokut, čiji kutovi zadovoljavaju uvjete $\frac{\pi}{4}<\alpha,\beta,\gamma<\frac{\pi}{2}$, vrijedi nejednakost

$$tg\alpha tg\beta tg\gamma \geq \frac{\sqrt{3}s^2}{9r^2}.$$

Rješenje. Promotrimo funkciju $f(x) = \ln tgx, x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right).$

Kako je $f''(x) = \frac{-4\cos 2x}{\sin^2 2x} > 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right),$ slijedi da je f strogo konveksna na $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right).$ Primjenom Popoviciujeve nejednakosti imamo

$$\frac{1}{3}(\ln tg\alpha + \ln tg\beta + \ln tg\gamma) + \ln tg\frac{\pi}{3} \geq \frac{2}{3}\left(\ln tg\frac{\alpha+\beta}{2} + \ln tg\frac{\beta+\gamma}{2} + \ln tg\frac{\alpha+\gamma}{2}\right),$$

$$\frac{1}{3}\ln(tg\alpha tg\beta tg\gamma) + \ln\sqrt{3} \geq \frac{2}{3}\ln\left(tg\frac{\alpha+\beta}{2}tg\frac{\beta+\gamma}{2}tg\frac{\alpha+\gamma}{2}\right),$$

$$\ln\left(3\sqrt{3}tg\alpha tg\beta tg\gamma\right) \geq \ln\left(tg\frac{\alpha+\beta}{2}tg\frac{\beta+\gamma}{2}tg\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)^2,$$

$$tg\alpha tg\beta tg\gamma \geq \frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\left(tg\frac{\alpha+\beta}{2}tg\frac{\beta+\gamma}{2}tg\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)^2.$$

Nadalje vrijedi da je

$$tg\frac{\alpha+\beta}{2}tg\frac{\beta+\gamma}{2}tg\frac{\alpha+\gamma}{2} = ctg\frac{\alpha}{2}ctg\frac{\beta}{2}ctg\frac{\gamma}{2} = \frac{s}{r}$$

pa odatle slijedi tražena nejednakost.

Zadatci za vježbu

1. Dokažite da za svaka tri pozitivna realna broja *a, b, c* vrijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca)^2.$$

2. Neka su x_1, x_2, x_3 pozitivni brojevi, pri čemu nisu svi istodobno jednaki. Dokažite da je

$$x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + 3x_1^2x_2^2x_3^2 > 2(x_1^3x_2^3 + x_2^3x_3^3 + x_3^3x_1^3).$$

3. Dokažite da za svaki trokut s kutovima α, β, γ vrijedi nejednakost

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \geq \frac{5}{4} + \frac{r}{2R},$$

gdje su R i r polumjeri trokutu opisane i upisane kružnice.

4. Dokažite da za svaki šiljastokutan trokut s kutovima α, β, γ vrijedi nejednakost

$$r tg\alpha tg\beta tg\gamma + 3\sqrt{3}r \geq 2s,$$

pri čemu je r polumjer trokutu upisane kružnice, a s poluopseg trokuta.

Literatura

1. Tiberiu Popoviciu (1965.), „Sur certaines inégalités qui caractérisent les fonctions convexes", Analele ştiinţifice Univ. „Al.I. Cuza" Iasi, Secţia I a Mat., 11: 155–164
2. S. Kurepa, Matematička analiza I. i II. dio, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.
3. Šefket Arslanagić, Matematika za nadarene, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.
4. O. Bottema and others, Geometric Inequalities, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.
5. http://www.imomath.com/
6. Constantin P. Niculescu i Lars-Erik Persson, Convex function and their applications, A Contemporary Approach, Springer, 2006, 7-60.