

MATEMATIKA IZVAN MATEMATIKE

Okretno magnetsko polje Zanimljiva primjena trigonometrije za srednjoškolce

DUBRAVKO SABOLIĆ¹, ROMAN MALARIĆ², ŠIMUN ZLOPAŠA³

Uvod

Okretno magnetsko polje vjerojatno je najvažniji izum Nikole Tesle. Sam Tesla o tome govori u svojim autobiografskim materijalima objedinjenima u knjizi Tesla (2015.). Radi se o jednom od njegovih ranijih izuma, iz razdoblja prije nego je otišao u Sjedinjene Američke Države.

Poput mnogih drugih velikih ideja, i ova počiva na sasvim jednostavnom zapažanju. Cilj ovoga kratkog prikaza je demonstracija da je, koristeći matematički aparat i znanje fizike primjereno srednjoj školi, moguće objasniti fenomen rotacijskog magnetskog polja. Značaj ovog Teslinog otkrića uistinu je velik. Ono je omogućilo jednostavnu tehničku eksploataciju sustava višefazne izmjenične struje u najrazličitijim industrijskim primjenama. Premda je Tesla izvorno razradio dvofazni sustav, danas se koristi trofazni. No, fizikalna i matematička načela su ista. Trofazni izmjenični sustav čini okosnicu sustava za prijenos i distribuciju električne energije, te predstavlja temeljnu tehnološku infrastrukturu modernog svijeta, bez koje današnja razina tehnološkog i ekonomskog razvoja ne bi bila ostvariva.

U ovom radu neće se ići dalje od objašnjavanja načela okretnog magnetskog polja, koje je namijenjeno srednjoškolcima. Fizikalne osnove elektromagnetizma mogu se proučavati u udžbenicima, poput Furčić, Vasilj i Sertić (2015.).

Učenici koji žele steći dodatna znanja mogu se poslužiti i literaturom poput Purcell (1998.) ili pak Lopašić (1979.). Potonje djelo jedan je od najboljih uvoda u ovo područje, koje elektromagnetizmu pristupa tako da vrlo jednostavna i jasno opisana eksperimentalna zapažanja prenosi u teoretski kontekst. Iako se radi o nastavnom materijalu namijenjenom studentima elektrotehnike, preporučamo ga i naprednijim

¹Dubravko Sabolić, Vanjski suradnik, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva

²Roman Malarić, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva

³Šimun Zlopaša, Veleučilište Velika Gorica

srednjoškolicima koji žele dobiti uistinu jasan uvid u „tajne” električnih i magnetskih pojava.

Čitatelji koji se žele upoznati s više inženjerskih znanja u vezi okretnog magnetskog polja te elektromotora koji se koriste tim fizikalnim fenomenom, upućuju se na dopunsku literaturu, npr. Hartl (1988.), odnosno, na razini uvodnog sveučilišnog tečaja, Wolf (1985.).

Ideja

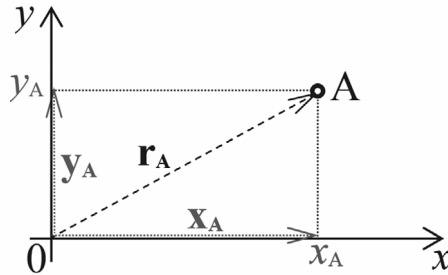
Sudeći prema autobiografskim zapisima, kao i prema dostupnoj pisanoj ostavštini (npr. Tesla, 2008.), Nikola Tesla ne spada u red teoretski naročito dobro potkovanih znanstvenika.⁴ To, naravno, uopće ne umanjuje njegov značaj za razvoj ljudske civilizacije koji je nemjerljivo veći od mnogih teoretski znatno potkovanijih znanstvenika. Baš naprotiv. Radi se o osobi koja je iz minimalnog teoretskog fundusa kojim je raspolagala bila sposobna izvući najveću moguću korist. Utoliko o Tesli možemo govoriti kao o nekoj vrsti proto-znanstvenika, čovjeka koji je preskočio mnoge razvojne faze kroz koje se formira mentalni sklop većine „standardnih” znanstvenika. Njegov doprinos tehničkim znanostima zapravo nije utemeljen ni na kojoj ranijoj znanstvenoj tradiciji, osim na elektromagnetskoj teoriji uvodne razine. Njegov rad nije dio kontinuuma neprestanih malenih nadogradnji do tada nakupljenog znanja, već je to znatan skok, zbijen u jednu točku vremena i jednu osobu.

Sama ideja okretnog magnetskog polja tako je jednostavna da je pravo čudo da je se nitko ranije nije dosjetio. Okretno magnetsko polje u matematičkom je smislu samo jedan poseban slučaj Lissajusove krivulje koju opisuje vrh vektora magnetskog polja, pobuđenog prostorno razmaknutim zavojnicama kroz koje teku višefazne izmjenične struje. Zapravo, motivacija za ovaj kratak pokazni rad i došla je nakon čitanja jednog iznimno zanimljivog članka koji je nedavno izašao u ovom časopisu (Mladinić, 2016.).

Sudeći prema vlastitim Teslinim riječima iz Tesla (2015.), on je imao *viziju* kako bi trebalo nastati takvo polje, bez da je potrebno mehanički okretati bilo kakav permanentni magnet ili pak elektromagnet. Rotiranje elektromagneta dodatno je nezgodno zato što bi s njim rotirale (i stalno se namatale, sve do puknuća) i žice kojima je spojen na izvor struje, pa je spoj žica na zavojnicu elektromagneta potrebno izvesti pomoću kliznih četkica. (Pogledati u Hartl, 1988.) Ako možemo „natjerati“ magnetsko polje da se okreće bez da mehanički vrtimo bilo što, riješit ćemo se četkica i bitno pojednostavniti gradnju mnogih uređaja s elektromotorima.

⁴U autobiografiji (Tesla, 2015.) Nikola Tesla spominje da ga je za elektricitet zainteresirao njegov srednjoškolski profesor fizike, Martin Sekulić, za kojeg kaže da je bio genijalan čovjek. Uloga nastavnika osnovnih i srednjih škola u formiranju osobnosti učenika i odabiru životnog usmjerenja može biti vrlo velika. Svatko od nas vjerojatno ima nekoga tko mu je „otvorio oči”. Predlažemo učenicima i nastavnicima koji čitaju ove retke da se na trenutak prisjete svojih iskustava takve prirode.

Ta Teslina *vizija*, kao i mnoge druge, obično se medijski predstavljaju kao nešto nadnaravno. No, kao što je već rečeno, radi se o sasvim jednostavnoj ideji. Za njeno dokazivanje zapravo i ne treba ništa više od Pitagorinog poučka te malo trigonometrije. Pogledajmo na slici 1 jedan običan ravninski Kartezijev koordinatni sustav.



Slika 1. Koordinatni sustav u kojemu je vektor \mathbf{r}_A prikazan kao zbroj vektora \mathbf{x}_A i \mathbf{y}_A , kolinearnih s koordinatnim osima. Izvor: autor.

Uočimo u njemu jednu točku, A. Ona ima dvije komponente: x_A i y_A . Kvadrat udaljenosti od ishodišta do točke A jednak je:

$$r_A^2 = x_A^2 + y_A^2 \quad (1)$$

Ako vektor \mathbf{r}_A spaja ishodište i točku A, tada su njegove komponente u ovom koordinatnom sustavu također vektori \mathbf{x}_A i \mathbf{y}_A . Vrijedi:

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{x}_A + \mathbf{y}_A \quad (2)$$

Sad zamislimo da se duljina vektora \mathbf{x}_A mijenja u vremenu kao funkcija kosinusa:

$$x_A = X_A \cos(\omega t) \quad (3)$$

Ovdje je X_A amplituda, tj. najveća duljina koju poprima vektor \mathbf{x}_A . Kutna brzina označena je slovom ω , koja je u dobro poznatoj vezi s frekvencijom f , naime $\omega = 2\pi f$. Da ponovimo, frekvencija je broj punih perioda neke periodičke pojave u jednoj sekundi. U jednadžbi (3) t je oznaka za vrijeme.

Zamislimo dalje da se duljina vektora \mathbf{y}_A mijenja jednakom frekvencijom, ali sinusoidno:

$$y_A = Y_A \sin(\omega t) \quad (4)$$

Ovdje je Y_A amplituda titranja duljine vektora \mathbf{y}_A . Jednadžbe (3) i (4) specificiraju trenutni iznos duljine vektora \mathbf{x}_A i \mathbf{y}_A u svakom trenutku vremena t . Koliki je onda trenutni iznos duljine vektora \mathbf{r}_A , u nekom trenutku t ? Njega dobivamo jednostavno, korištenjem Pitagorinog teorema, odnosno uvrštavanjem (3) i (4) u (1):

$$r_A^2 = x_A^2 + y_A^2 = X_A^2 \cos^2(\omega t) + Y_A^2 \sin^2(\omega t) \quad (5)$$

Pažljiviji učenik odmah će vidjeti da je (5) jednadžba elipse s poluosima duljina X_A i Y_A .⁵ Vrh vektora \mathbf{r}_A opisuje takvu elipsu obilazeći je $\omega/(2\pi)$ puta u sekundi. Duljina tog vektora, r_A , nije konstantna, i mijenja se između X_A i Y_A .

No, što bi bilo kad bi dvije amplitude bile međusobno jednake, tj. $X_A = Y_A = R$? Tada bi jednadžba (5) poprimila vrlo jednostavan oblik:

$$r_A^2 = x_A^2 + y_A^2 = R^2 \cos^2(\omega t) + R^2 \sin^2(\omega t) = R^2 \quad (6)$$

Primijetite da duljina vektora \mathbf{r}_A više ne ovisi o vremenu. Ona je nepromjenjiva, iako su duljine komponentnih vektora vremenski promjenjive. Dakle, dobili smo vektor kojemu je iznos stalan i uopće se ne mijenja u vremenu. Koji je smjer toga vektora u promatranoj Kartezijevoj ravnini? Tangens kuta ϕ_A , kojega vektor \mathbf{r}_A zatvara s pozitivnom apscisnom polu-osi, jest:

$$\tan \phi_A(t) = \frac{y_A}{x_A} = \frac{R \sin(\omega t)}{R \cos(\omega t)} = \tan(\omega t) \quad (7)$$

Iz toga slijedi da se $\phi_A(t)$ mijenja jednoliko u vremenu, tj. vektor \mathbf{r}_A rotira ulijevo, jednolikom kutnom brzinom ω , odnosno frekvencijom (brojem obrtaja u sekundi) od $f = \omega/(2\pi)$:

$$\phi_A(t) = \omega t = 2\pi f \cdot t \quad (8)$$

Sad se prisjetimo da je kosinus u stvari isto što i sinus pomaknut u fazi za $+\pi/2$ radijana:

$$\cos(\omega t) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad (9)$$

pa uočimo ove tri činjenice:

- vektori \mathbf{x}_A i \mathbf{y}_A razmaknuti su u prostoru za $\pi/2$ radijana, tj. zatvaraju pravi kut;
- oba navedena vektora mijenjaju u vremenu svoju trenutnu duljinu sinusoidno, s jednakom amplitudom, R ,
- pri čemu jedan od njih (u ovom slučaju vektor u smjeru osi apscise) napreduje u fazi za $\pi/2$ radijana u odnosu na drugog.

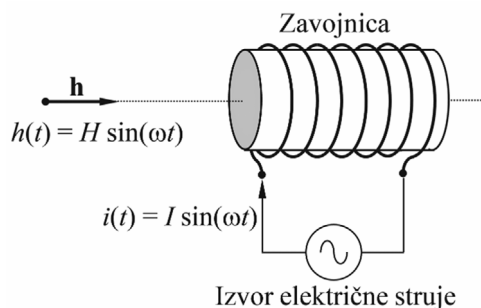
⁵Izrazi (3) i (4) zajedno čine jednadžbu elipse u tzv. *parametarskom obliku*, gdje je *parametar* jednak ωt . Iz njih smo jednostavno izveli izraz (5). Iz (3) možemo izvesti sljedeću jednakost: $\frac{x_A^2}{X_A^2} = \frac{X_A^2 \cos^2(\omega t)}{X_A^2} = \cos^2(\omega t)$. Na isti način iz (4) dobivamo: $\frac{x_B^2}{X_B^2} = \sin^2(\omega t)$. No, tada slijedi: $\frac{x_A^2}{X_A^2} + \frac{x_B^2}{X_B^2} = 1$, a to je *normalan (standardan) oblik* jednadžbe elipse, koji učimo u srednjoj školi. To znači da jednadžbe (3) i (4) zajedno, odnosno (5) pojedinačno, opisuju upravo elipsu s poluosima X_A i X_B .

U takvim okolnostima dobili smo rezultantni vektor čija se duljina više uopće ne mijenja u vremenu, ali mu se mijenja orijentacija u prostoru, i to jednoliko, frekven- cijom titranja komponenata.

Ali, kakve to veze ima s magnetskim poljima?

Zavojnica, struja koja teče kroz nju, i magnetsko polje

Slika 2. prikazuje *zavojnica*, metalnu žicu ravnomjerno namotanu oko nekog cilindričnog tijela. Iz fizike znamo da električna struja pobuđuje u okolini vodiča ko- jim teče magnetsko polje čija je jakost proporcionalna iznosu te struje (Furčić, Vasilj i Sertić, 2015).



Slika 2. Zavojnica kroz koju protječe električna struja pobuđuje u prostoru oko sebe magnetsko polje koje je razmjerno toj struji. Ako je zavojnica namotana pravilno i osno simetrično, vektor jakosti polja u svakoj točki koja se nalazi na osi zavojnice kolinearan je s tom osi, a njegov smjer (ka zavojnici ili od nje) određuje se pomoću „pravila desne ruke”. Izvor: autor.

Konkretno, kad je riječ o zavojnici sa Slike 2., jakost magnetskog polja u toč- ki koja se nalazi negdje na osi simetrije zavojnice razmjerna je jakosti struje kroz nju, dok je vektor tog magnetskog polja kolinearan s osi zavojnice. Kad struja teče u jednom smjeru kroz nju, on je usmjeren, na primjer, ravno ka zavojnici, a kad teče u suprotnom smjeru, onda je usmjeren ravno od nje⁶. Ako kroz zavojnica teče *iz- mjenična struja*, koja se mijenja sinusoidno, i to s kutnom brzinom ω , vektor jakosti magnetskog polja \mathbf{h} u nekoj točki na osi simetrije zavojnice bit će kolinearan s tom osi, a mijenjat će se u vremenu na ovaj način:

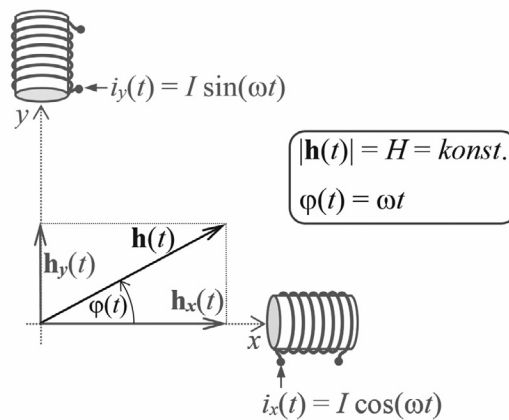
$$h(t) = k \cdot i(t) = k \cdot I \sin(\omega t) = H \sin(\omega t) \quad (10)$$

Ovdje je $h(t)$ trenutna vrijednost jakosti magnetskog polja, $i(t)$ je trenutna vri- jednost jakosti električne struje kroz zavojnica, I je amplituda (maksimalna vrijed-

⁶Smjer vektora magnetskog polja u nekoj točki koja se nalazi na osi zavojnice ovisi o smjeru struje kroz njene zavojice, a određuje se „pravilom desne ruke”. Ako prsti skupljene šake desne ruke slijede smjer struje kroz zavojice, ispruženi palac pokazuje smjer vektora jakosti magnetskog polja, \mathbf{h} . Slika 2. nacrtana je u skladu s tim pravilom. Primijetite da su definicije smjerova struje, odnosno vektora jakosti magnetskog polja, zapravo proizvoljne. Bitno je, međutim, držati se uvijek istih definicija. U tome nam pomažu pravila poput navedenog.

nost) sinusno promjenjive struje kroz zavojnicu, H je amplituda sinusno promjenjive jakosti magnetskog polja u promatranoj točki, dok je k konstanta koja povezuje jakost struje u zavojnici s jakošću magnetskog polja u promatranoj točki. Ta konstanta ovisi o geometrijskim osobinama konstrukcije zavojnice, te o točki na osi zavojnice u kojoj promatramo magnetsko polje.

Zamislamo sada aparaturu kao na Slici 3. Postavimo dvije fizički identične zavojnice u smjer svake od pozitivnih koordinatnih poluosi, i to na način da je svaka od zavojnica motana oko svoje poluosi u istom smjeru, te da je svaka jednako udaljena od ishodišta. Na taj način osigurat ćemo da isti iznos i smjer struje kroz bilo koju od njih proizvodi jednaku jakost magnetskog polja u ishodištu, uz jednako usmjerenje vektora jakosti polja ka ili od odgovarajuće zavojnice. Dobit ćemo vektore razmaknute u prostoru za kut od $\pi/2$ radijana.



Slika 3. Dvjesto zavojnicama čije se osi sijeku pod pravim kutom teku struje jednake amplitude, koje su fazno razmaknute također za $\pi/2$ (tj. 90°). Zavojnice su jednako udaljene od sjecišta svojih osi i motane su u jednakom smjeru u odnosu na svoje osi. U sjecištu dviju osi, tj. u središtu koordinatnog sustava, nastaje okretno magnetsko polje konstantnog iznosa i konstantne brzine rotacije. Izvor: autor.

Kako ćemo osigurati da vektor jakosti magnetskog polja apscisne zavojnice napreduje u fazi za $\pi/2$ radijana u odnosu na vektor ordinatne zavojnice, te da ima jednaku amplitudu H ?

Tako da te dvije zavojnice napajamo strujama iste amplitude I , ali faza pomaknutih za $\pi/2$. Drugim riječima, tako da ih priključimo na dvofazni izmjenični sustav napajanja. U takvom sustavu postoje dvije faze koje su međusobno fazno razmaknute za $\pi/2$, odnosno 90 stupnjeva. Kako su naponi faza u svakom višefaznom sustavu po amplitudi jednaki, oni će kroz identične zavojnice potjerati struje s identičnim amplitudama, samo razmaknute za $\pi/2$ u fazi. Kada to napravimo, ostvarit ćemo istodobno sve okolnosti koje su navedene u trima natuknicama iza jednadžbe (9), a matematički

formalizam iz jednadžbi (1) do (9) bit će identično primjenjiv i na naš slučaj s jakostima magnetskih polja, tako da samo zamijenimo simbole u tim jednadžbama:

- umjesto vektora \mathbf{r}_A , \mathbf{x}_A i \mathbf{y}_A stavit ćemo redom odgovarajuće vektore jakosti magnetskog polja, \mathbf{h} , \mathbf{h}_x i \mathbf{h}_y ;
- umjesto x_A i y_A stavit ćemo jakosti magnetskih polja h_x i h_y ;
- umjesto X_A i Y_A stavit ćemo amplitude jakosti magnetskog polja H_x i H_y , a umjesto amplitude rezultantnog vektora R , stavit ćemo oznaku H ,

dok sve ostalo ostaje isto.

I eto, dobili smo da kad iste zavojnice, jednako udaljene od ishodišta i jednakim smjerom namotane, čije osi čine kut od 90 stupnjeva, napajamo sinusnim strujama iste amplitude, ali pomaknutim u fazi također za 90 stupnjeva, rezultirajući vektor jakosti magnetskog polja u ishodištu ima vrijednost koja se ne mijenja u vremenu, te rotira u ravnini jednolikom frekvencijom jednakom frekvenciji struje kojom se napajaju zavojnice. Zavojnice stoje, a magnetsko se polje vrti. Vrh njegovog vektora opisuje najjednostavniju moguću Lissajousovu krivulju.

Ovaj načelni rezultat mogao je, prema tome, izvesti bilo koji srednjoškolac. U tome i jest ljepota Teslinog otkrića okretnog magnetskog polja. Interesantno je da je sam Jules Antoine Lissajous objavio svoja istraživanja u vezi grafova parametarskih trigonometrijskih jednadžbi još 1857. godine, dakle kada je Nikola Tesla navršio prvu godinu svog života. Više o tim krivuljama pogledajte u Mladinić (2016.) ili Wikipedia (2017.).

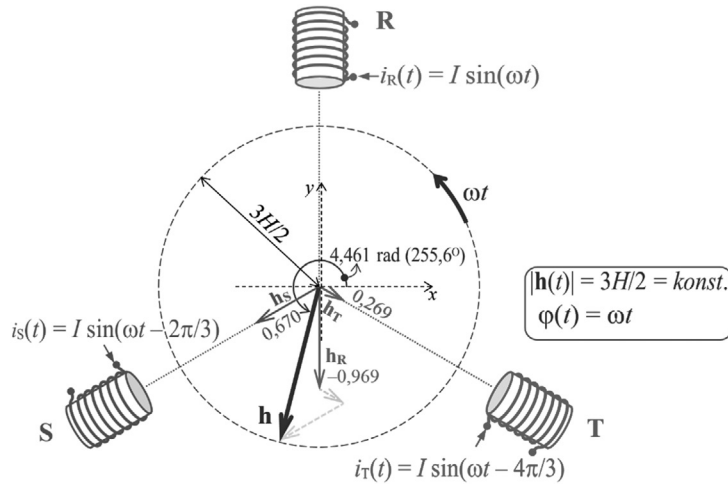
Okretno magnetsko polje u trofaznom sustavu

Za izračunavanje vektora jakosti magnetskog polja u *trofaznom sustavu*, koji se danas koristi u elektroenergetskim sustavima u čitavom svijetu, trebat će nam adicijski teorem za sinus zbroja ili razlike kutova, kao i vrijednosti sinusa i kosinusa za nekoliko karakterističnih kutova, pa ćemo najprije navesti te opće poznate identitete:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad (11)$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (12)$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \quad (13)$$



Slika 4. Uz objašnjenje nastajanja okretnog magnetskog polja u trofaznom sustavu, u kojem polje pobuđuju tri struje iste amplitude, ali s razmakom u fazi od po trećine punog kruga. Amplituda rezultirajućeg vektora ukupnog magnetskog polja, \mathbf{h} , i ovaj put je konstantna, kao i brzina njegove rotacije. Izvor: autor.

Pogledajmo sada sliku 4. Na njoj se nalaze u ravnini simetrično posložene tri identične zavojnice motane u jednakom smjeru u odnosu na svoje osi, na jednakoj udaljenosti od ishodišta koordinatnog sustava, napajane sinusno promjenjivim strujama identičnih amplituda.⁷ Neka osi zavojnica međusobno zatvaraju kutove od $2\pi/3$ radijana (tj. 120 stupnjeva), te neka su napajane strujama koje su također razmaknute u fazi za $2\pi/3$. Stoga sva tri sinusno promjenjiva vektora jakosti magnetskog polja imaju iste amplitude, koje označavamo s H , i međusobno su fazno pomaknute za po $2\pi/3$. Dakle, sustav je mehanički i električki potpuno simetričan.

Proračun je najlakše započeti sustavnim popisivanjem prostornih komponenta vektora jakosti magnetskog polja koje proizvode predmetne tri zavojnice, te njihovim zbrajanjem. Sa R, S i T obilježili smo tri zavojnice ravnomjerno kutno raspoređene oko središnje točke, kako je prikazano na slici. Te komponente iznose:

$$h_{R,x} = 0 \quad (14)$$

$$h_{R,y} = h_R(t) \quad (15)$$

⁷Na slici je nacrtan primjer s trenutnim vrijednostima i smjerovima vektora promatranih magnetskih polja u trenutku $t = 14.2$ ms nakon početka periode struje u zavojnici R. Taj trenutak odabran je proizvoljno, ilustracije radi. (Perioda u sustavu s frekvencijom $f = 50$ Hz traje $1/f = 20$ ms.) Na slici su napisani iznosi vektora jakosti polja u tom trenutku (uz pretpostavku da je amplituda svakog od njih jednaka 1), te su naznačeni trenutni smjerovi vektora \mathbf{h}_R , \mathbf{h}_S i \mathbf{h}_T . Vidimo da je vektor \mathbf{h}_R usmjeren vertikalno, u smjeru suprotnom od ordinatne osi, zbog toga što u tom trenutku struje kroz zavojnicu R ima negativan predznak (to je lako vidjeti na slici 5.). Njegova je x -komponenta očito jednaka nuli, a y -komponenta jednaka je iznosu vektora \mathbf{h}_R , samo s negativnim predznakom. Vektor \mathbf{h}_S usmjeren je pod kutom od $7\pi/6$ u odnosu na pozitivnu apscisnu poluos, dok je vektor \mathbf{h}_T usmjeren pod kutom od $11\pi/6$, što je isto što i $-\pi/6$ u odnosu na nju.

$$h_{S,x} = h_s(t) \cdot \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}h_s(t) \quad (16)$$

$$h_{S,y} = h_s(t) \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}h_s(t) \quad (17)$$

$$h_{T,x} = h_T(t) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}h_T(t) \quad (18)$$

$$h_{T,y} = h_T(t) \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}h_T(t) \quad (19)$$

Vremenske ovisnosti trenutnih vrijednosti ovih triju vektora mogu se zapisati kao:

$$h_R(t) = H \sin(\omega t) \quad (20)$$

$$h_S(t) = H \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) = H \left[-\frac{1}{2} \sin(\omega t) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\omega t) \right] \quad (21)$$

$$h_T(t) = H \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) = H \left[-\frac{1}{2} \sin(\omega t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\omega t) \right] \quad (22)$$

Ako pretpostavimo da kroz zavojnicu R teče struja s faznim pomakom 0, tada fazni pomaci (fazna kašnjenja) struja kroz zavojnice S i T iznose redom $2\pi/3$, odnosno $4\pi/3$. Neka faze kasne za navedene iznose redom obilaska u lijevom smjeru po slici 4 (tj. u smjeru obratnom od kazaljke na satu), kao što je i napisano u jednadžbama (20), (21) i (22).

Izračunajmo sada iznose prostornih komponenti rezultantnog vektora jakosti magnetskog polja u ishodištu:

$$\begin{aligned} h_x &= h_{R,x} + h_{S,x} + h_{T,x} = 0 - \frac{\sqrt{3}}{2}h_s(t) + \frac{\sqrt{3}}{2}h_T(t) = \\ &= H \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{1}{2} \sin(\omega t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\omega t) - \frac{1}{2} \sin(\omega t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\omega t) \right] = \\ &= \frac{3}{2} H \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} h_y &= h_{R,y} + h_{S,y} + h_{T,y} = h_R(t) - \frac{1}{2}h_s(t) - \frac{1}{2}h_T(t) = \\ &= H \left\{ \sin(\omega t) - \frac{1}{2}[-\sin(\omega t)] \right\} = \frac{3}{2} H \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (24)$$

Pogledamo li ponovno jednadžbe (3) i (4), vidjet ćemo da dobivene prostorne komponente u trofaznom sustavu slijede isti oblik vremenske zavisnosti kao u dvofaznom: apscisna komponenta razmjerna je kosinusu od ωt , dok je ordinatna razmjerna sinusu od ωt . Korištenjem (23) i (24) izračunat ćemo koliki je iznos rezultantnog vektora jakosti magnetskog polja u bilo kojem trenutku vremena t :

$$h(t) = \sqrt{h_x^2(t) + h_y^2(t)} = \sqrt{\frac{9}{4}H^2 [\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)]} = \frac{3}{2}H \quad (25)$$

Ponovno smo dobili rezultat da iznos vektora jakosti magnetskog polja nije funkcija vremena. On je u vremenu konstantan. Primijetimo i da sada imamo dodatan faktor $3/2$ ispred rezultantne amplitude. U primjeru dvofaznog sustava imali smo dvije zavojnice. Sada imamo tri. Ako su amplitude struje u njima uvijek iste, tri zavojnice proizvode ukupno $3/2$ puta jače magnetsko polje nego dvije. Tangens kuta pod kojim vektor jakosti magnetskog polja stoji u odnosu na pozitivnu apscisnu poluos je:

$$\tan \phi(t) = \frac{h_y(t)}{h_x(t)} = \frac{H \sin(\omega t)}{H \cos(\omega t)} = \tan(\omega t) \quad (26)$$

Iz toga izravno slijedi da taj kut ovisi o vremenu linearno:

$$\phi(t) = \omega t \quad (27)$$

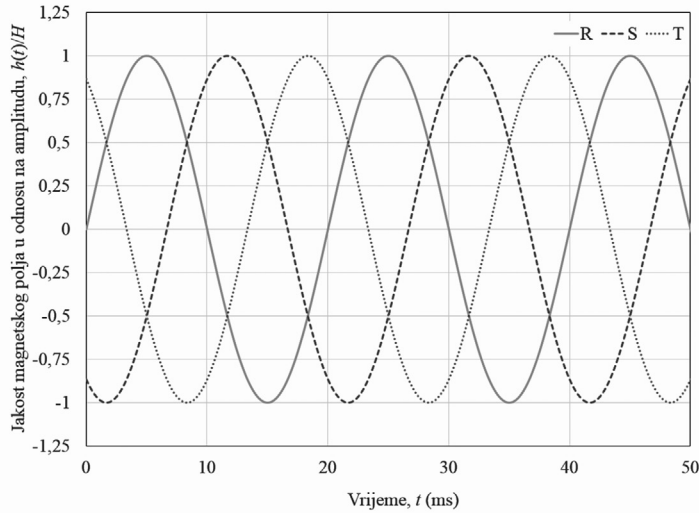
Drugim riječima, rezultantni vektor okretnog magnetskog polja rotira ulijevo, u smjeru suprotnom od kazaljke na satu, konstantnom kutnom brzinom ω , odnosno uz konstantan broj obrtaja u sekundi, $f = \omega/(2\pi)$. Frekvenciji f od 50 Hz, koja se koristi kod nas, odgovara kutna brzina ω od 314,159 rad/s, odnosno 18.000 stupnjeva po sekundi.

Rekapitulirajmo sada što smo naučili iz ovog jednostavnog primjera:

Ako su tri zavojnice razmještene u krug tako da čine jednakostraničan trokut, zatvarajući između sebe središnje kutove od 120 stupnjeva, te ako su napajane strujama jednakim po amplitudama, a fazno pomaknutim također za 120 stupnjeva, one će u središnjoj točki proizvesti magnetsko polje koje je konstantno po iznosu, te koje rotira u prostoru frekvencijom električne struje koja prolazi kroz zavojnice. Smjer rotacije poklapa se sa smjerom rastućeg faznog kašnjenja. U našem primjeru, to je smjer R – S – T – R – S – T... itd. Primijetite da bismo zamjenom redoslijeda bilo kojih dviju faza, npr. T i S, dobili obratan smjer rotacije okretnog magnetskog polja.

Slika 5. prikazuje vremenski tijek jakosti magnetskih polja koje pobuđuju tri promatrane zavojnice, normiranih na iznos amplitude, H . Trenutni iznos jakosti magnetskog polja razmjernan je trenutnom iznosu jakosti struje kroz zavojnicu. Primijetite da, dok je jedna od struja u svojem pozitivnom maksimumu (amplitudi), ostale dvije imaju polovicu te vrijednosti, i to suprotnog predznaka. Stoga potonje dvije

zavojnice u tom trenutku proizvode magnetsko polje usmjereno od sebe, a ne prema sebi. Kako vektori magnetskih polja ovih zavojnica nisu kolinearni, njihovi se doprinosi neće zbrojiti algebarski, već vektorski.



Slika 5. Vremenski tijek trenutnih vrijednosti jakosti magnetskih polja pobuđenih u središtu sustava sa slike 4 od strane triju zavojnica (R, S i T). Na apscisnoj osi vrijeme je u milisekundama. Perioda sinusnih funkcija sa slike iznosi 20 ms. To odgovara frekvenciji električne struje od $1 / 20 \times 10^{-3} = 50$ Hz, dakle frekvenciji električne struje koja se koristi u Europi i mnogim drugim dijelovima svijeta. U ostalim područjima, primjerice u Americi, koristi se frekvencija od 60 Hz.

Zaključno, suština ideje okretnog magnetskog polja jest u tome da prostorno razmaknute zavojnice napajamo vremenski razmaknutim sinusnim strujama. Ako je prostorno razmicanje cikličke naravi (dakle, u krug) te ako je ono podudarno s razmakom faza struja kojima se te zavojnice napajaju, rezultatno magnetsko polje rotira, iako se u mehaničkom smislu ništa u takvom stroju ne giba. Ako su amplitude struja u svim zavojnicama jednake, vektor jakosti magnetskog polja opisuje kružnicu. U protivnom, radi se o elipsi. U svakom slučaju, riječ je o jednoj jednostavnoj Lissaj-usovoj krivulji.

Sinkroni motori i generatori

Kada bismo u ishodište koordinatnog sustava sa slike 3 ili 4 postavili kompas, magnetska igla u njemu slijedila bi smjer vektora okretnog magnetskog polja. Drugim riječima, rotirala bi nalijevo kutnom brzinom od $\omega = 2\pi f$ radijana u sekundi. Uz frekvenciju struje koja se primjenjuje u Europi, a iznosi 50 Hz, takva bi igla načinila 50 obrtaja u sekundi, odnosno okretala bi se kutnom brzinom od $2\pi \times 50 = 314.16$ radijana u sekundi, ili $360 \times 50 = 18$ tisuća stupnjeva u sekundi. To je najprimitiv-

niji zamislivi oblik *sinkronog elektromotora* koji se vrti *sinkronom brzinom*, kutnom brzinom jednakom kutnoj brzini okretnog magnetskog polja. Naravno, umjesto magnetske igle mogli bismo tamo staviti bilo kakav drugi permanentni magnet ili pak elektromagnet. Efekt bi bio isti.

U praktičnom svijetu, zavojnice koje su namotane oko tijela sazdanog od bilo čega što nije feromagnetski materijal proizvode male gustoće magnetskog toka, tako da su njihovi elektromagnetski učinci slabašni. Gustoća magnetskog toka u nekoj točki prostora veća je što je veća jakost magnetskog polja. Gustoća magnetskog toka, B , i jakost magnetskog polja, H , povezani su jednostavnom jednadžbom:

$$B = \mu_0 \mu_r H \quad (28)$$

Veličina μ_0 naziva se magnetskom permeabilnošću vakuuma, te iznosi $4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am. To je univerzalna fizikalna konstanta. Simbolom μ_r označena je bezdimenzijska veličina, relativna permeabilnost materijala u kojem je pobuđeno magnetsko polje. Kako je napon induciran u nekoj zavojnici koja zatvara površinu S i ima N zavoja razmjernan *brzini promjene* magnetskog toka:

$$u = -NS \frac{dB(t)}{dt} = -NS \mu_0 \mu_r \frac{dH(t)}{dt}, \quad (29)^8$$

izlazi da će on biti veći što je veći iznos μ_r . Na žalost, za najveći broj prirodnih i sintetičkih materijala relativna permeabilnost ima iznos jednak 1, ili vrlo blizak toj vrijednosti. Samo feromagnetski materijali (željezo, nikal, kobalt i gadolinij, i neke njihove legure i smjese s drugim materijalima) imaju relativne permeabilnosti veće od 1. Najvažniji feromagnetik je željezo, čije relativne permeabilnosti, ovisno o stanju i tehnološkoj obradi materijala, iznose tipično između jedne i deset tisuća. S obzirom da jakost polja H razmjerna struji koja protječe kroz zavojnicu koja pobuđuje polje, evidentno je da željezo omogućuje da uz iste iznose struja učinci elektromagnetske indukcije budu daleko jači.

Zbog toga se električni strojevi gotovo uvijek rade od željeznih materijala. Sve zavojnice, bilo one na *statoru*, ili one na *rotoru*, namataju se oko željeznih jezgri. U slučaju sinkronog motora, statorske zavojnice razmještene su simetrično po obodu rotora, slično kao na slici 4., s tim da su praktične izvedbe, naravno, znatno drugačije od našeg pojednostavnjenog prikaza. Ipak, riječ je o istom fizikalnom fenomenu, pa se s praktičnim problemima u ovom članku nećemo zamarati. Kod svih imalo većih sinkronih strojeva rotor se izvodi kao elektromagnet. To je željezna jezgra oko koje

⁸Za učenike srednjih škola koji se još nisu susreli s derivacijama razlomak $\frac{dB(t)}{dt}$ označuje trenutnu brzinu promjene iznosa varijable B . Slovo „d” označuje diferencijal, odnosno beskonačno malu promjenu varijable. U srednjoškolskoj matematici i fizici za promjene varijabli uobičajeno je koristiti simbol Δ . Izraz $\frac{\Delta B(t)}{\Delta t}$ jednak je navedenom izrazu u slučaju kada su promjene varijabli, označene sa Δ , vrlo male. Kad je vremenski interval Δt u kojem se promatra promjena magnetske indukcije ΔB vrlo kratak, govorimo o trenutnoj brzini promjene varijable B .

je namotana zavojnica. Puštanjem istosmjerne struje kroz tu, rotorsku, zavojnicu, jezgra se magnetizira, i time dobiva svojstva slična permanentnom magnetu, pa se, izložena okretnom magnetskom polju rotorskih zavojnica, vrti sinkronom brzinom.

Zamislimo sada da statorske zavojnice nisu spojene na izvor električne struje, a da rotor magnetiziramo istosmjernom strujom njegovu zavojnicu, kako je maločas opisano, te ga pomoću nekog vanjskog uređaja, *turbine* koju pokreće npr. voda, ili pak izgarajući plin metan, počnemo mehanički okretati. Tada će unutar električnog stroja također biti prisutno okretno magnetsko polje. No, ovaj put radit će se o polju koje se vrti zato što vanjska sila okreće elektromagnet rotora. Takvo polje u vremenu će periodički sjeći zavojnice statora, i u njima će se *inducirati električni napon*. Primijetite da će se taj inducirani napon u svakoj rotorskoj zavojnici mijenjati s primicanjem i odmicanjem polova rotora od te zavojnice, te da će u sve tri rotorske zavojnice on imati isti periodični vremenski tijek, ali s faznim pomakom od trećine punog kruga u odnosu na ostale dvije zavojnice. Na tom principu funkcionira *sinkroni trofazni generator*. On proizvodi napone koji čine trofazni sustav. Većina današnjih generatora su strojevi sinkronog tipa. Oni čine proizvodnu osnovu svakog elektroenergetskog sustava.

Teslino jaje i asinkroni motori

Jedan od najpoznatijih Teslinih eksperimenata, koji je dizajniran tako da bi potaknuo maštu i znatiželju tadašnje javnosti, jest pokus s metalnim jajetom smještenim u plitku „zdjelu” koja je pak smještena u prostor u kojem statorske zavojnice pobuđuju okretno magnetsko polje. Izloženo takvom polju, jaje se počinje okretati sve brže, da bi se na kraju uspravilo i nastavilo rotirati dokle god su statorske zavojnice priključene na višefazni sustav. (Već smo rekli da je Tesla koristio dvofazni sustav, dok danas koristimo trofazni.) Uređaj je prikazan na slici 6., a film s rotirajućim jajetom, snimljen u Muzeju Nikole Tesle u Smiljanu (<http://www.mcnikolatesla.hr/memorijalni-centar/o-nama/>), možete pogledati na sljedećoj internetskoj stranici:

https://www.youtube.com/watch?v=aWTXgQ_IdtI (21. 8. 2017.)



Slika 6. Teslino jaje, inspirirano poznatom pričom o Kolumbovom jajetu. Replika Teslinog uređaja koja se nalazi u Memorijalnom centru Nikola Tesla u Smiljanu. Zavojnice kojima se u prostoru oko jajeta formira okretno magnetsko polje smještene su po obodu ovog uređaja, odmah ispod vidljive tanjuraste plohe.

*Izvor: Memorijalni centar Nikola Tesla, Smiljan, Hrvatska:
http://www.mcnikolatesla.hr/wp-content/uploads/2014/12/IMG_0035a.jpg*

Zbog čega se metalno jaje u okretnom magnetskom polju vrti?

Iz fizike znamo da se u vodiču koji se giba i pritom „siječe” magnetsko polje inducira električni napon. Gibanje je relativan pojam. Isto vrijedi i u situacijama u kojima se magnetsko polje giba, a vodič miruje, odnosno u bilo kojem slučaju u kojem postoji relativno gibanje između vodiča i magnetskog polja.

Kad se u vodiču inducira električni napon, on kroz njega protjera električnu struju. Kao što znamo iz pučkoškolske fizike, električne struje uvijek teku u *zatvorenom krugu*. Metalno jaje omogućuje da se struje zatvaraju unutar njega samoga, tekući po površini u različitim petljama. To su tzv. *vrtložne struje*. No, tako inducirane struje, baš poput svih ostalih električnih struja, pobuđuju u prostoru oko sebe magnetsko polje. Stoga se metalno jaje, koje siječe rotirajuće magnetsko polje, počinje ponašati kao svojevrsan magnet, te počinje slijediti okretno magnetsko polje, vrteći se sve brže. Kad bi jaje dostiglo sinkronu brzinu, inducirani naponi u njemu pali bi na nulu jer više ne bi bilo relativnog gibanja između njega i okretnog magnetskog polja. Zbog toga bi jaje počelo usporavati. No, čim bi ono malo usporilo, inducirani naponi opet bi se pojavili. Na kraju se uspostavi neka ravnotežna kutna brzina jajeta, koja je *nešto manja* od sinkrone brzine, i pri kojoj jaje više ne ubrzava niti ne usporava.

Jaje se u Teslinom eksperimentu uspravlja iz mehaničkih razloga koji nemaju previše veze s okretnim magnetskim poljem. Naime, kad bi umjesto jajeta u uređaju bila metalna kugla, ona bi se također okretala nekom pod-sinkronom brzinom, a zbog simetrije se ne bi imalo što podizati. Bilo bi svejedno oko koje osi rotira. No, kod jajeta je situacija drugačija. U mirovanju ono stoji polegnuto jer mu je tako energija (potencijalna) najmanja moguća. Kad počne rotirati, ukupna energija mu sve više raste zbog porasta brzine rotacije. Kad ta brzina dovoljno poraste, ukupna energija jajeta više neće biti najmanja moguća. Ako se jaje uspravi, rotacija oko dulje osi dovest će do toga da su mase koje rotiraju smještene u prosjeku znatno bliže osi rotacije, pa će kinetička energija rotacije postati manja. S druge strane, uspravljeno jaje imat će nešto veću potencijalnu energiju, jer će mu se težište podići. Stoga, ako je kinetička energija rotacije uspravljenog jajeta u okretnom magnetskom polju barem toliko manja od kinetičke energije položenog da to kompenzira porast potencijalne energije, jaje će se uspraviti. Kako kinetička energija raste, među inim, s kvadratom kutne brzine, jasno je da će se to, ako ikad, dogoditi pri većim brzinama vrtnje.

No, vratimo se elektromagnetizmu. Maločas smo objasnili da se metalno jaje u okretnom magnetskom polju vrti brzinom koja je nešto manja od sinkrone. Kad bismo jaje učvrstili na osovinu, ono bi nam moglo poslužiti kao rotor *asinkronog elektromotora*. Naravno, postoje tehnički mnogo učinkovitiji načini da se načini motor. Obično se kao vodič u rotoru koristi svojevrsni *kavez* od aluminijske ili bakrene. Tako nastaje metalna dobro vodljiva struktura kroz koju, slično kao u primjeru Teslinog jajeta, mogu teći inducirane struje.

Primijetite pritom da kavezni rotor ne zahtijeva dovođenje vanjskog napona na zavojnice rotora. Struja kroz njih teče sama od sebe, zbog elektromagnetske indukcije. Takvom elektromotoru ne trebaju četkice. Sam Tesla razvio je i patentirao asinkroni motor (koji je, sasvim opravdano, nazivao *indukcijskim motorom*). „Eksperiment” s jajetom tek je vješto osmišljena efektna reklama za indukcijski motor.

Više o elektromotorima i generatorima

Do sada smo opisali fizikalne osnove suvremenih izmjeničnih motora i generatora, koje proistječu iz Teslinog otkrića okretnog magnetskog polja. Ulazak u objašnjavanje praktičnih aspekata konstrukcije tih elektromehaničkih uređaja daleko bi premašivao namjeravani opseg i svrhu ovog članka. Stoga čitatelja upućujemo na literaturu. Na srednjoškolskoj razini, uvod u područje električnih strojeva može se naći u knjizi Hartl (1988.). Za upoznavanje ove materije na višoj razini preporučujemo knjigu Wolf (1985.).

Završne napomene i zaključak

Teslino otkriće okretnog magnetskog polja jedan je od najvažnijih doprinosa industrijskoj revoluciji u razdoblju dvadesetog stoljeća. Broj strojeva koji se koriste ovim jednostavnim fizikalnim načelom i u današnje vrijeme je neizmjeran.

Drugi veliki doprinos Teslinog otkrića okretnog magnetskog polja, koje je omogućilo korištenje jednostavnih, jeftinih i pouzdanih električnih strojeva, jest uvođenje višefaznog sustava prijenosa izmjenične električne energije. Sama debata i sukobi Edisona i Tesle oko toga koji je oblik električne energije bolji za prijenos, opće su poznati. Temeljna prednost izmjenične električne energije je u mnogo manjim gubitcima u prijenosu velikih količina energije na velike udaljenosti.

Zbog nemogućnosti tadašnje tehnologije da ostvari transformaciju istosmjernog napona na vrlo visoke vrijednosti potrebne za prijenos s malim gubitcima, s vremenom je prevladao izmjenični sustav prijenosa. Zbog potreba napajanja golemog broja sinkronih i asinkronih strojeva fazno razmaknutim strujama, ali isto tako i zbog same prirode konstrukcije sinkronih generatora, uvriježila se primjena trofaznog izmjeničnog sustava prijenosa koji se danas koristi gotovo isključivo. Veličina i ukupna vrijednost tog temeljnog infrastrukturnog sustava današnjice praktički je neizreciva.

Stoga možemo konstatirati da se radi o pojedinačno možda i najvećem tehničkom izumu suvremenog doba.

Ipak, riječ je o sasvim jednostavnom konceptu koji je objašnjiv na razini srednjoškolskog obrazovanja, te za čije je osnovno shvaćanje potrebno tek nešto malo predznanja iz fizike, kao i poznavanje svega nekoliko osnovnih trigonometrijskih identiteta.

Literatura:

1. Furčić, N., Vasilj, V. i Sertić, A., Osnove elektrotehnike 1 – Udžbenik sa zbirkom zadatka i DVD-om za 1. razred srednjih elektrotehničkih škola, Neodidacta, Zagreb, 2015.
2. Hartl, V. (1988.), Električni strojevi, školska knjiga, Zagreb, 1988.
3. Lopašić, V. (1979.), Predavanja iz fizike – Elektromagnetsko polje, Školska knjiga, Zagreb, 1979.
4. Mladinić, P. (2016.), *Platonova špilja u nastavi*, Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike, Vol. 17, No. 68, Zagreb, 2016.
5. Purcell, E. M. (1988.), Elektricitet i magnetizam – Udžbenik fizike Sveučilišta u Berkeleyu, Svezak 2, Tehnička knjiga, Zagreb, 1988.
6. Tesla, N. (2008.), Od Kolorado Springsa do Long Ajlanda: dnevnik istraživanja (ur. V. Jelenković), Muzej Nikole Tesle, Beograd, 2008.
7. Tesla, N. (2015.), Moji pronalasci, Znanje, Zagreb, 2015.
8. Wikipedia (2017.), *Lissajous curve*, https://en.wikipedia.org/wiki/Lissajous_curve (21. 8. 2017.)
9. Wolf, R. (1985.), Osnove električnih strojeva, Školska knjiga, Zagreb, 1985.