

IVO SJEKAVICA

Određivanje geografskih koordinata

nova metoda određivanja sistematske greške s tri ili više opažanja i mogućnost zamjene hiperbola kružnicama položaja

Uvod

U današnjoj navigaciji kod određivanja geografskih koordinata s tri ili više opažanja redovito se eliminira sistematska greška primjenom hiperbola položaja. To je zbog toga što je hiperbola, kao geometrijsko mjesto opažanja, određena razlikom udaljenosti od dviju fiksnih točaka (fokusa), koji su u navigaciji dati položajem radio stanica ili projekcijom nebeskih tijela na Zemlji. Računanjem razlike udaljenosti automatski se eliminira ista sistematska greška koja je sadržana u svakoj pojedinoj udaljenosti.

U astronomskoj navigaciji, kad se opažaju tri nebeska tijela, crta se t. z. trokut položaja i povlače simetrale kutova koje, u stvari, aproksimiraju hiperbole i davaju u presjecištu poziciju bez sistematske greške.

Radio navigacija radi u cjelini na osnovi hiperbola položaja, t. j. mjerenja razlike udaljenosti od predajnih radio stanica, što je lakše izvedivo od mjerenja udaljenosti. Naime, za mjerenje udaljenosti bilo bi potrebno prethodno sinhronizirati sat u radio prijemniku sa satom radio odašiljača.

Sadašnja satelitska navigacija, također, radi s hiperbolama. Mjere se promjene frekvencija radio valova koje nastaju zbog Dopplerovog efekta i na temelju toga formiraju hiperbole.

U ovom članku pokazat će se mogućnost prethodnog određivanja veličine sistematske greške na osnovi triju opažanja, a time i mogućnost zamjene hiperbola kružnicama položaja u astronomskoj, radio i satelitskoj navigaciji. Na taj način dobila bi se značajna prednost,¹ jer je sustav kružnica pogodniji od hiperbola za određivanje pozicije. Prednost je u tome što pojedine kružnice imaju stalno istu zakrivljenost i što skup kružnica podjednako dobro pokriva sva područja. Hiperbole, nasuprot tome, formiraju se između dva fokusa (mjesta) i različito divergiraju od spojnice između fokusa, te time nejednoliko i različito pokrivaju pojedina područja. Posljedica je toga da je za isti kvalitet pokrivanja nekog područja, na primjer, u radio navigaciji potreban veći broj radio stanica, kad se koriste hiperbole umjesto kružnica položaja.

Nova metoda određivanja sistematske greške s tri ili više opažanja

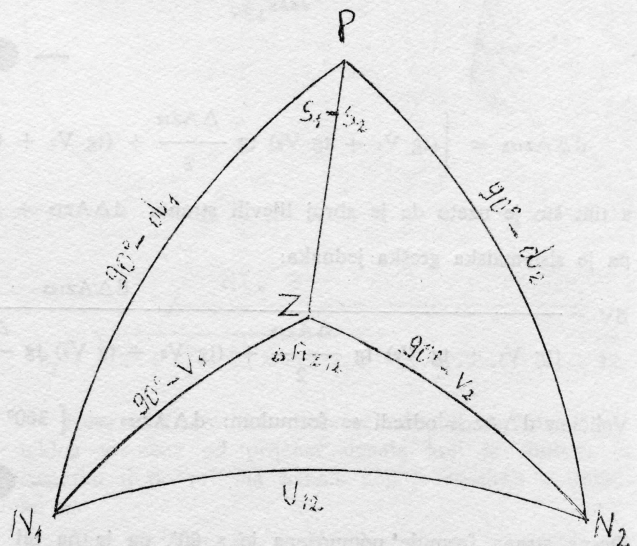
Metoda se bazira na tome što se mjerenjem kutne udaljenosti od triju objekata, nebeskih tijela ili radio stanica, mogu izračunati i njihove međusobne razlike azimuta, kad se znadu njihove međusobne udaljenosti. Ako su udaljenosti objekata od opažanja točno izmjerene tada kružni zbroj izračunatih razlika azimuta mora biti točno 360° . Međutim, ako su izmjerene udaljenosti pogrešne za

neki isti iznos, zbog sistematske greške, tada će izračunati zbroj razlika azimuta biti veći ili manji od 360° .

Na temelju prednje postavke moguće je, prethodno, prije određivanja geografskih koordinata, izračunati veličinu eventualne sistematske greške u izmjerenim udaljenostima. Nakon toga, s ispravljenim udaljenostima mogu se odrediti geografske koordinate direktno metodom kružnica položaja².

Astronomska navigacija

Formula za određivanje sistematske greške izvest će se iz jednadžbi koje se dobiju iz sfernih trokuta što su prikazani na slici 1.



Sl. 1

Na slici su:

- P — nebeski pol
- N_1 i N_2 — nebeska tijela
- Z — zenit opažanja
- $S_1 - S_2$ — razlika Greenwichkih satnih kutova nebeskih tijela
- d_1 i d_2 — deklinacije nebeskih tijela
- ΔAz_{12} — razlika azimuta nebeskih tijela
- U_{12} — međusobna udaljenost nebeskih tijela

¹ O prednosti kružnica položaja nad hiperbolama, vidi American Practical Navigator — Bowditch — 1977, članak 4304.

² Metoda kružnica položaja obrađena je u »Našem moru« br. 6. 1982. u članku: Ivo Sjekavica, Astronomska navigacija — direktno određivanje koordinata presjecišta dviju kružnica položaja i jedno indirektno rješenje.

Iz trokuta ZN_1N_2 dobije se:

$$\cos U_{12} = \sin V_1 \sin V_2 + \cos V_1 \cos V_2 \cos \Delta AZ_{12} \quad 1$$

Veličina U_{12} može se odrediti iz trokuta PN_1N_2 :

$$\cos U_{12} = \sin d_1 \sin d_2 + \cos d_1 \cos d_2 \cos (S_1 - S_2) \quad 2$$

Ako se jednadžba 1. označi s F i diferencira po ΔAZ_{12} , V_1 i V_2 dobije se:

$$\frac{\partial F}{\partial \Delta AZ_{12}} d\Delta AZ_{12} + \frac{\partial F}{\partial V_1} dV_1 + \frac{\partial F}{\partial V_2} dV_2 = 0 \quad \dots \dots \dots 3$$

Parcijalne derivacije jednake su:

$$\frac{\partial F}{\partial \Delta AZ_{12}} = -\cos V_1 \cos V_2 \sin \Delta AZ_{12}$$

$$\frac{\partial F}{\partial V_1} = \cos V_1 \sin V_2 - \sin V_1 \cos V_2 \cos \Delta AZ_{12}$$

$$\frac{\partial F}{\partial V_2} = \sin V_1 \cos V_2 - \cos V_1 \sin V_2 \cos \Delta AZ_{12}$$

U daljnjem postupku riješit će se jednadžba 3. po $d\Delta AZ_{12}$:

$$d\Delta AZ_{12} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial V_1} dV_1 + \frac{\partial F}{\partial V_2} dV_2}{\frac{\partial F}{\partial \Delta AZ_{12}}}$$

i u nju uvrstiti parcijalne derivacije, te uzeti da je:

$$dV_1 = dV_2 = dV$$

t. j. da je sistematska greška ista u prvoj i drugoj izmjerenoj visini, pa se nakon sređivanja dobije:

$$d\Delta AZ_{12} = \frac{(\sin V_1 \cos V_2 + \cos V_1 \sin V_2) (1 - \cos \Delta AZ_{12})}{\cos V_1 \cos V_2 \sin \Delta AZ_{12}} dV$$

U prednjoj jednadžbi uvest će se zamjene za:

$$1 - \cos \Delta AZ_{12} = 2 \sin^2 \frac{\Delta AZ_{12}}{2}$$

$$\sin \Delta AZ_{12} = 2 \sin \frac{\Delta AZ_{12}}{2} \cos \frac{\Delta AZ_{12}}{2}$$

te podijeliti brojnik i nazivnik s: $\cos V_1 \cos V_2$, pa se nakon sređivanja dobije:

$$d\Delta AZ_{12} = (\operatorname{tg} V_1 + \operatorname{tg} V_2) \operatorname{tg} \frac{\Delta AZ_{12}}{2} dV \quad \dots \dots \dots 4$$

Analogno rješenje se dobije i za razliku azimuta između drugog i trećeg, kao i trećeg i prvog opaženog nebeskog tijela, s pretpostavkom da je i u trećoj izmjerenoj visini ista sistematska greška.

$$d\Delta AZ_{23} = (\operatorname{tg} V_2 + \operatorname{tg} V_3) \operatorname{tg} \frac{\Delta AZ_{23}}{2} dV \quad \dots \dots \dots 5$$

$$d\Delta AZ_{31} = (\operatorname{tg} V_3 + \operatorname{tg} V_1) \operatorname{tg} \frac{\Delta AZ_{31}}{2} dV \quad \dots \dots \dots 6$$

Zbrajanjem lijevih i desnih strana jednadžbi 4., 5. i 6., dobija se:

$$d\Delta AZ_{123} = \left[(\operatorname{tg} V_1 + \operatorname{tg} V_2) \operatorname{tg} \frac{\Delta AZ_{12}}{2} + (\operatorname{tg} V_2 + \operatorname{tg} V_3) \operatorname{tg} \frac{\Delta AZ_{23}}{2} + (\operatorname{tg} V_3 + \operatorname{tg} V_1) \operatorname{tg} \frac{\Delta AZ_{31}}{2} \right] dV$$

s tim što je uzeto da je zbroj lijevih strana: $d\Delta AZ_{12} + d\Delta AZ_{23} + d\Delta AZ_{31} = d\Delta AZ_{123}$

pa je sistematska greška jednaka:

$$dV = \frac{d\Delta AZ_{123}}{(\operatorname{tg} V_1 + \operatorname{tg} V_2) \operatorname{tg} \frac{\Delta AZ_{12}}{2} + (\operatorname{tg} V_2 + \operatorname{tg} V_3) \operatorname{tg} \frac{\Delta AZ_{23}}{2} + (\operatorname{tg} V_3 + \operatorname{tg} V_1) \operatorname{tg} \frac{\Delta AZ_{31}}{2}} \quad \dots \dots \dots 7$$

$$\text{Veličina } d\Delta AZ_{123} \text{ odredi se formulom: } d\Delta AZ_{123} = [360^\circ - (\Delta AZ_{12} + \Delta AZ_{23} + \Delta AZ_{31})] 60' \quad \dots \dots \dots 8$$

Desna strana formule pomnožena je s $60'$, pa je na taj način veličina sistematske greške izražena u lučnim minutama.

Razlika azimuta ΔAZ_{12} odredi se iz jednadžbe 1.:

$$\cos \Delta AZ_{12} = \frac{\cos U_{12} - \sin V_1 \sin V_2}{\cos V_1 \cos V_2} \quad \dots \dots \dots 9$$

a analogno i razlike azimuta ΔAZ_{23} i ΔAZ_{31} .

Sistematska greška koja se odredi formulom 7., algebarski se dodaje dvjema izmjerenim visinama i metodom kružnica položaja izračunaju geografske koordinate. Treća ispravljena visina može se upotrebiti za kontrolu točnosti izračunate pozicije.

Radio navigacije

U radio navigaciji hiperbole se mogu zamijeniti kružnicama položaja prethodnim određivanjem sistematske greške, slično kao i u astronomskoj navigaciji. To se može

učiniti dosta jednostavno, pogotovo u sustavima u kojima se određuje razlika vremena dolaska signala od predajnih radio stanica kao što je, na primjer, kod Lorana.

Radi jednostavnijeg objašnjenja pretpostavit ćemo da se iz tri predajne radio stanice Ra_1 , Ra_2 i Ra_3 signali za identifikaciju prijema emitiraju istodobno i da je opažaču najbliža stanica Ra_1 , pa Ra_2 , a najudaljenija Ra_3 . Zatim, da su se odredile razlike vremena dolaska signala u prijemnik opažača poznatom metodom koja se upotrebljava kod Lorana.

Neka je Δt_1 razlika vremena dolaska signala od stanice Ra_1 i Ra_2 , a Δt_2 razlika vremena dolaska signala od Ra_2 i Ra_3 . Još je potrebno izračunati udaljenost opažača, prema procijenjenoj poziciji, od jedne predajne radio stanice, uzmimo najbliže Ra_1 . Ako tu udaljenost označimo s D_1 , tada je procijenjena udaljenost od stanice Ra_2 : $D_2 = D_1 + c \Delta t_1$, a od stanice Ra_3 : $D_3 = D_1 + c \Delta t_1 + c \Delta t_2$, gdje je c brzina rasprostiranja elektromagnetskih valova.

U tako određenim udaljenostima D_1 , D_2 i D_3 bit će sadržana ista sistematska greška samo u dijelu D_1 , ako se pretpostavi da su razlike vremena točne i da su zanemariva odstupanja u rasprostiranju radio valova na putu od pojedinih radio stanica.

Za određivanje sistematske greške može se upotrebiti isti postupak i formule, kao i u astronomskoj navigaciji, s tim da se u pojedine formule umjesto visina (V) uvedu njihovi komplementi, t. j. udaljenosti (D) pojedinih radio stanica od opažača.

Formula za sistematsku grešku u tom slučaju glasi:

$$dD = \frac{d\Delta Az_{123}}{(ctg D_1 + ctg D_2) \operatorname{tg} \frac{\Delta Az_{12}}{2} + (ctg D_2 + ctg D_3) \operatorname{tg} \frac{\Delta Az_{23}}{2} + (ctg D_3 + ctg D_1) \operatorname{tg} \frac{\Delta Az_{31}}{2}} \dots 10$$

Tako izračunata sistematska greška algebarski se dodaje dvjema udaljenostima i metodom kružnica položaja određuje geografske koordinate. Kao i u astronomskoj navigaciji, treća udaljenost može se upotrebiti za kontrolu točnosti izračunate pozicije.

Ako se uzme da pojedine predajne radio stanice emitiraju svoje signale uzastopno, u kraćim točno određenim intervalima vremena, kao što je slučaj kod Lorana, opet se može primijeniti isti postupak za određivanje sistematske greške, samo se tada ovi intervali moraju uzeti u obzir kod određivanja procijenjenih udaljenosti od pojedinih radio stanica.

Satelitska navigacija

Sadašnji satelitski sustav poznat pod nazivom Navsat ili Transit ima 4 do 6 satelita u polarnoj orbiti, koji se koriste za određivanje pozicije na temelju Dopplerovog pomaka frekvencije radio valova što ih emitiraju pojedini sateliti. Pozicija se određuje s jednim satelitom uzastopnim mjerenjem Dopplerovog pomaka u najmanje tri uzastopna intervala od po dva minuta. Kada je u orbiti 5 satelita pozicija se može odrediti bilo gdje na Zemlji, približno svakih 1 1/2 sati.

Satelit, uz vremenske signale i ostale podatke, emitira i svoje prostorne koordinate svako dvije minute. Na osnovi tih koordinata i proteklog vremena od prijema prvog signala do prijema drugog i trećeg signala, može se odrediti, slično kao i u radio navigaciji, sistematska greška u procijenjenim udaljenostima od satelita. Zatim se primjeni metoda kružnica položaja i određuje geografske koordinate opažača.

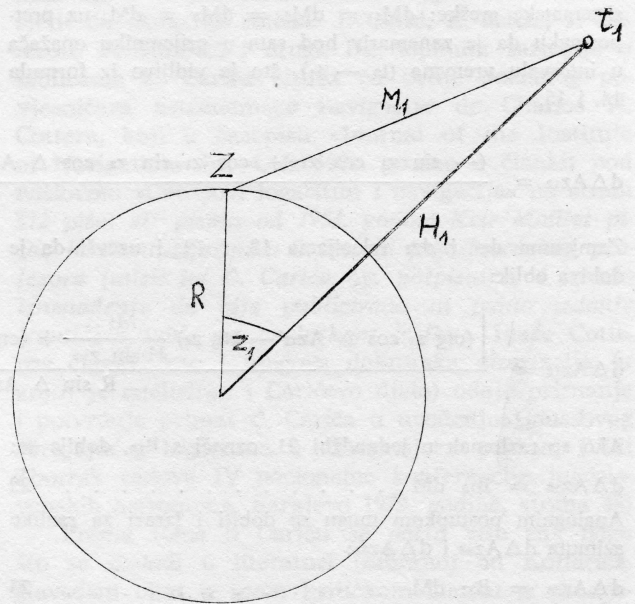
Postupak se u ovom slučaju izvodi tako, da se određuje kosa udaljenosti satelita M_1 , M_2 , M_3 od procijenjenih pozicija opažača u trenucima vremena t_1 , t_2 i t_3 koji odgovaraju počecima dvominutnih emisija satelita. Pojedinih kosim udaljenostima M_1 , M_2 , M_3 odgovaraju udaljenosti satelita z_1 , z_2 , z_3 kao što se vidi na slici 2.

Na slici je prikazan položaj satelita u trenutku t_1 na kosoj udaljenosti od opažača M_1 , kutnoj udaljenosti z_1 i udaljenosti H_1 od centra Zemlje.

Procijenjena kutna udaljenost satelita z_1 može se odrediti prema procijenjenoj poziciji opažača (F_{i1} , La_{i1}) i poznatim geografskim koordinatama satelita (F_{s1} , La_{s1}), kosinusovim poučkom za sferni trokut:

$$\cos z_1 = \sin F_{i1} \sin F_{s1} + \cos F_{i1} \cos F_{s1} \cos \Delta La_{i1} \dots 11$$

S tako izračunatom z_1 , radijusom Zemlje R i poznatom udaljenosti H_1 može se, prema trokutu na slici 2., odrediti kosa udaljenost M_1 , kosinusovim poučkom za ravni trokut:



Sli. 2

$$M_1 = \sqrt{R^2 + H_1^2 - 2RH_1 \cos z_1} \dots 12$$

Kosa udaljenost M_2 može se odrediti na osnovi proteklog vremena od prijema signala koji je emitiran u trenutku t_1 do prijema signala koji je emitiran u trenutku t_2 .

Ako se uzme da se signal emitiran u trenutku t_1 prima u trenutku $tp_1 = t_1 + \Delta t_1$, a signal emitiran u trenutku t_2 prima u trenutku $tp_2 = t_2 + \Delta t_2$, tada je razlika:

$$dt_2 = (tp_2 - tp_1) - (t_2 - t_1) \dots 13$$

Jednaka razlika vremena koja je potrebna da signal pređe razliku udaljenosti od satelita do opažača u trenucima vremena t_1 i t_2 , jer kada se u formuli 13. zamjene tp_2 i tp_1 , dobije se: $dt_2 = \Delta t_2 - \Delta t_1$.

Na osnovi dt_2 može se odrediti kosa udaljenost M_2 : $M_2 = M_1 + c dt_2 \dots 14$

Analogno se odredi: $M_3 = M_1 + c dt_3 \dots 15$ gdje je

$$dt_3 = (tp_3 - tp_1) - (t_3 - t_1) \dots 16$$

U jednadžbu 12. mogu se uvesti veličine za položaj satelita u trenutku t_2 i s njome odrediti kutnu udaljenost z_2 .

$$\cos z_2 = \frac{R^2 + H_2^2 - M_2^2}{2 R H_2}$$

Analogno se može odrediti i kutna udaljenost z_3 .

Prije određenu kutnu udaljenost z_1 i udaljenost z_2 još je potrebno ispraviti za pređeni put opažača u intervalu vremena ($t_3 - t_1$) i ($t_3 - t_2$), što se može lako izvesti formulom:

$$dz_p = - dDp \cos L \dots \dots \dots 17$$

gdje je dDp pređeni put opažača u intervalu vremena, a L pramčani kut satelita.

U kosim udaljenostima M_1 , M_2 i M_3 sadržane su iste sistematske greške: $dM_1 = dM_2 = dM_3 = dM$, uz pretpostavku da je zanemariv hod sata u prijemniku opažača u intervalu vremena ($t_3 - t_1$), što je vidljivo iz formula 14. i 15.

$$d\Delta Az_{12} = \frac{(-\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \cos \Delta Az_{12}) dz_1 + (-\cos z_1 \sin z_2 + \sin z_1 \cos z_2 \cos \Delta Az_{12}) dz_2}{\sin z_1 \sin z_2 \sin \Delta Az_{12}}$$

Zamjenom dz_1 i dz_2 relacijama 18. i 19. i uzevši da je dobiva oblik:

$$d\Delta Az_{12} = \left[(\text{ctg } z_1 \cos \Delta Az_{12} - \text{ctg } z_2) \frac{M_1}{H_1 \sin z_1} + (\text{ctg } z_2 \cos \Delta Az_{12} - \text{ctg } z_1) \frac{H_2 \sin z_2}{M_2} \right] dM \dots \dots \dots 21$$

Ako se razlomak u jednadžbi 21. označi s B_{12} , dobije se:

$$d\Delta Az_{12} = B_{12} dM \dots \dots \dots 22$$

Analognim postupkom mogu se dobiti i izrazi za razlike azimuta $d\Delta Az_{23}$ i $d\Delta Az_{31}$:

$$d\Delta Az_{23} = B_{23} dM \dots \dots \dots 23$$

$$d\Delta Az_{31} = B_{31} dM \dots \dots \dots 24$$

Zbrajanjem lijevih i desnih strana jednadžbi 22., 23. i 24., te daljnjim analognim postupkom kao kod izvođenja jednadžbe 7., dobije se izraz za veličinu sistematske greške dM .

$$dM = \frac{d\Delta Az_{123}}{B_{12} + B_{23} + B_{31}} \dots \dots \dots 25$$

Sa izračunatom sistematskom greškom dM odrede se jednadžbama 18., 19. i 20. veličine dz_1 , dz_2 i dz_3 , koje se, po redu, algebarski zbroje kutnim udaljenostima z_1 , z_2 i z_3 . Tako ispravljene kutne udaljenosti su bez sistematske greške i primjenom metode kružnica položaja dat će u presjecištu poziciju opažača.

S četiri ili više uzastopnih opažanja satelita u intervalima od po dva minuta, moglo bi se odrediti i eventualni hod sata u prijemniku opažača i dodatno kontrolirati točnost pozicije.

ZAKLJUČAK

Datim rješenjima u astronomskoj, radio i satelitskoj navigaciji prikazane su neke mogućnosti primjene nove metode prethodnog određivanja sistematske greške.

U astronomskoj navigaciji pokazana je mogućnost prethodnog eliminiranja sistematske greške s tri opažanja, a time i mogućnost direktnog, točnog određivanja pozicije

Diferenciranjem jednadžbe 12. po M_1 i z_1 , uzevši da su R i H_1 točni, dobije se:

$$dz_1 = \frac{M_1}{R H_1 \sin z_1} dM_1 \dots \dots \dots 18$$

Analogno su:

$$dz_2 = \frac{M_2}{R H_2 \sin z_2} dM_2 \dots \dots \dots 19$$

$$dz_3 = \frac{M_3}{R H_3 \sin z_3} dM_3 \dots \dots \dots 20$$

Ako se uzme da je U_{12} udaljenost satelita u trenutcima t_1 i t_2 , tada je:

$$\cos U_{12} = \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2 \cos \Delta Az_{12} \dots 21$$

gdje su z_1 i z_2 prije određene njegove kutne udaljenosti.

Diferenciranjem jednadžbe 21., te sličnim postupkom kao kod izvođenja jednadžbe 4., dobije se:

$dM_1 = dM_2 = dM$, te nakon sređivanja prednja jednadžba

metodom kružnica položaja. Na taj način otpada potreba za grafičkim rješavanjem ovoga problema i za primjenom hiperbola položaja.

U radio navigaciji prikazana je mogućnost zamjene hiperbola s kružnicama položaja. Time se dobiva značajna prednost, jer se s manjim brojem predajnih radio stanica može pokriti neko područje. Osim toga, primjenom date metode određivanja sistematske greške, mogla bi se izvršiti i sinhronizacija sata u prijemniku opažača sa satovima predajnih radio stanica. Uzastopnim ponavljanjem sinhronizacije mogao bi se odrediti i hod sata, i u nekom budućem vremenu određivati poziciju mjerenjem udaljenosti od samo dvije predajne radio stanice, ako se, na primjer, u nekom području ne može primati signal treće stanice ili je zbog radio smetnji nepouzdan.

Upotreba date metode određivanja sistematske greške u satelitskoj navigaciji, dala bi jednu novu dodatnu mogućnost određivanja pozicije. Koordinate bi se mogle određivati samo prikazanim postupkom ili, još bolje, paralelno s mjerenjem Dopplerovog pomaka, što bi povećalo točnost utvrđene pozicije.

Primjena prikazanog postupka u astronomskoj navigaciji mogla bi se jednostavno sprovesti putem jednog programiranog računala, a u radio i satelitskoj navigaciji preprogramiranjem postojećih prijemnika.

Može se još spomenuti da bi bilo moguće odrediti sistematsku grešku s tri opažanja i naknadnim postupkom, t. j. nakon određivanja pozicije u presjecištu triju kružnica položaja ili na osnovi izračunatih razlika mjesnih satnih kutova. Nakon toga, ponavljanjem čitavog računa s ispravljenim veličinama, dobila bi se pozicija bez sistematske greške. Takav postupak bio bi znatno duži od prikazanog i ne bi dao neke prednosti, pa ga se u ovom članku neće obrađivati.