DINKO ZOROVIĆ

Prilog nautičkoj praksi

Rješavanje loksodromskih zadataka

SAŽETAK

Sa sigurnošću se može utvrditi da su u navigacijskoj praksi među najčešćim zadacima oni iz loksodromske plovidbe: tako zvani prvi loksodromski problem kojim se iz poznate točke polaska i točke dolaska traži kurs i udaljenost, i drugi problem — problem zbrojene navigacije — kojim se iz poznate točke polaska, kursa i udaljenosti koju brod prevali traže koordinate točke dolaska.

Tako zvana loksodromska plovidba rješava ova dva problema pomoću tri loksodromska trokuta:

— prvog trokuta ili trokuta kursa i malih udaljenosti
— drugog trokuta ili trokuta srednjih širina i
— trećeg trokuta ili Merkatorovog trokuta.

Za rješavanje oba loksodromska problema nudi se jedan trokut koji eliminira netočnosti uzete »srednje širine« i koji ne limitira loksodromsku udaljenost.

UVOD

Plovidba zasigurno spada u red onih malobrojnih područja ljudskih djelatnosti u kojima su se u posljednje vrijeme zbili tako značajni koraci napretka. Razlog tome je zasigurno značaj kojeg plovidba ima u međunarodnoj ekonomici (trgovini i prijevozu roba i putnika) s jedne strane te bespomoćnosti mornara na pustom i nepoznatom moru s druge. S filozofskog aspekta gledano, navigacija pomorcu (kao stručno rješavanje zadatka) treba da odgovori na dva vrlo važna, fundamentalna pitanja: »gdje sam« i »kuda idem«. Slijedom tih potreba pojavio se radar, žirokompas, ultrazvučni dubinomjer, radiogoniometar sistemi hiperbolične navigacije pa sve do najmodernijih sistema satelitske i inercijalne navigacije, a sve u cilju da pomogne pomorcu u što točnijem i što jednostavnijem određivanju pozicije broda.

No uza sve ove najmodernije aparate i metode, neki vrlo stari računi su još uvijek u upotrebi, pogotovo u loksodromskoj plovidbi.

U vrlo malo slučajeva brod plovi po ortodromi: kada vizuelno plovi prema nekom svjetioniku ili markantnom objektu, kada kormilari prema nekoj radiogoniometrijskoj stanici promatrajući sliku na radiogoniometru ili kada plovi prema nekom objektu promatrajući sliku na radarskom ekranu. Čak i ova dva posljednja slučaja ne nailaze na praktičnu primjenu. Uvijek inače brod plovi po loksodromi, čak i onda kada plovi po velikom krugu u oceanografskoj navigaciji, jer tada plovi po loksodromskim tetivama ortodrome. Praktički nemoguće je ploviti po ortodromi uz današnja navigacijska pomagala.

Gerhard Mercator (1512—1594) dao je teoriju loksodromske navigacije definirajući pomorsku kartu. Mercator je matematički korigirao cilindričnu projekciju da bi dobio izogoničnu, konformnu projekciju. Mercator je — rečeno matematički modernim jezikom — pomnožio širine cilindrične projekcije sa cosFi, gdje je Fi geografska širina.
Kako je vrijednost funkcije cos uvijek manja od jedinice, Mercator je umanjio širine cilindrične projekcije tako da dandanašnje pomorske karte (a tim imenom smo u navigacijskoj praksi nazvali Mercatorovu projekciju) imaju umanjene Mercatorove širine.

Problemi loksodromske navigacije mogu se riješiti na dva načina: grafički i računski. Grafički je vrlo jednostavan jer se rješava direktno na pomorskoj karti. Ako međutim točka polaska i točka dolaska ne padaju unutar jedne karte, potrebno je pribjeći računskom rješavanju. Računski put će u svakom slučaju dati preciznije rezultate.

Loksodromska navigacija postavlja zadaću da riješi dva problema:

— iz poznate točke polaska i točke dolaska odrediti loksodromski kurs i loksodromsku udaljenost
— iz poznate točke polaska, loksodromskog kursa kojim će se ploviti i loksodromske udaljenosti koju će se prevaliti odrediti točku dolaska.

Prvi problem se svakodnevno nameće i pomorac je vrlo često primoran da ga rješava. Drugi problem se nameće u plovidbi na jedra kada pomorac ne može po svojoj volji odabrati kurs već mu ga nameće smjer vjetra, nadalje kada pomorac želi da dobije koordinate pozicije broda u astronomskoj navigaciji kao presječnicu dva pravca položaja.

Aritmetički se ova dva problema rješavaju pomoću tri loksodromska trokuta:[1]

— prvog trokuta ili trokuta kursa i malih udaljenosti
— drugog trokuta ili trokuta srednjih širina, te
— trećeg trokuta ili Mercatorovog trokuta

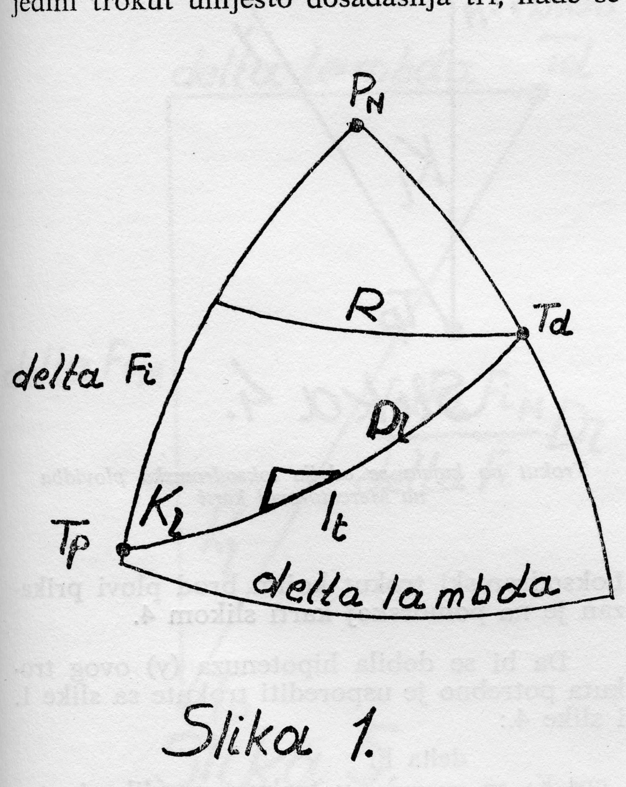
Posljednjih godina porastao je interes pomoraca u rješavanju matematičkim putem problema loksodromske navigacije pojavom jeftinih a vrlo točnih kalkulatora.

LOKSODROMSKI TROKUT

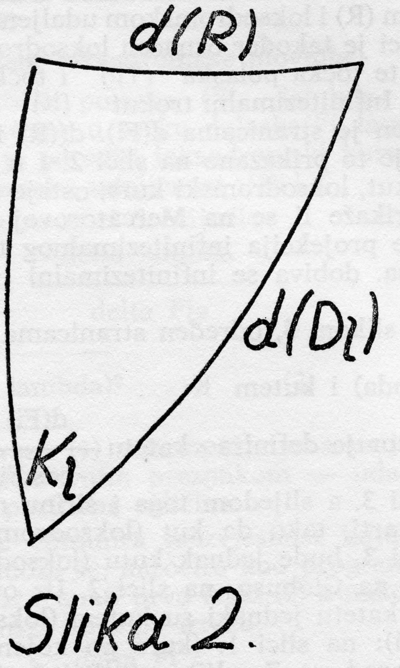
Svi loksodromski problemi rješavaju se pomoću tri loksodromska trokuta aproksimirajući Zemlju kuglom čime se čini izvjesna greška. Mnogo veća greška međutim se pojavljuje u samoj plovidbi uslijed nemogućnosti točnog održavanja kursa preko dna te nemogućnosti točnog određivanja prevaljenog puta preko dna.

Isto tako greške se čine kod grafičkog rješavanja problema loksodromske plovidbe jer je vrlo teško odrediti kurs na karti sa greškom manjom od 1⁰, a zbog rastućih širina na karti nemoguće je točno izmjeriti loksodromsku udaljenost ako se geografske širine točke polaska i točke dolaska razlikuju.

Kako bi se olakšalo aritmetičko rješavanje problema loksodromske plovidbe, jedan jedini trokut umjesto dosadašnja tri, nude se



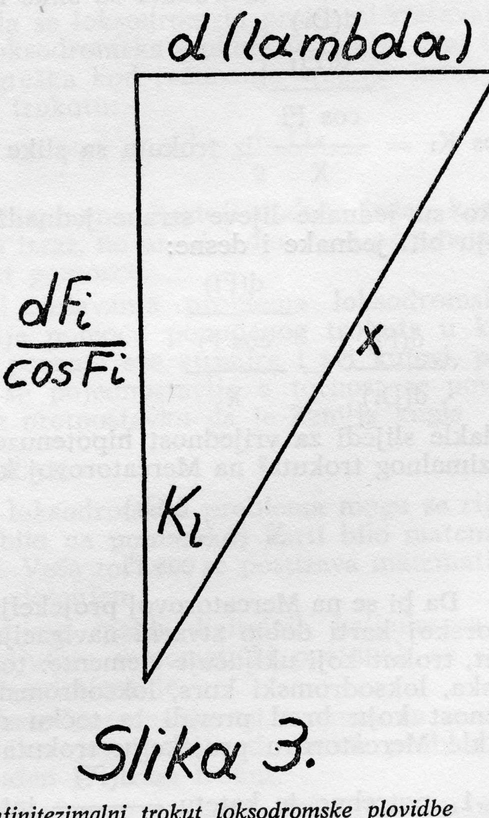
Trokut po kojem se odvija loksodromska plovidba na Zemlji



Infinitezimalni trokut loksodromske plovidbe na Zemlji

pomorcu u ovom radu. Time se ujedno postizava veća točnost jer se izbjegava trokut srednjih širina koji uvijek unosi izvjesnu grešku.

Da se dobije ovaj trokut potrebno je analizirati stvarni loksodromski trokut na Zemlji (aproksimiranom kuglom) (Slika 1.) definira-



Infinitezimalni trokut loksodromske plovidbe na Mercatorovoj projekciji nim stranicama: razlikom širine (delta Fi), razmakom (R) i loksodromskom udaljenošću (D_1). Na slici je također označen loksodromski kurs (K_1) te točka polaska (Tp) i točka dolaska (Td) Infinitezimalni trokut (It) sa slike 1. određen je stranicama d(Fi). d((R) i d (D_1) kako je to prikazano na slici 2. I u ovom trokutu kut, loksodromski kurs, ostaje sačuvan.

Prikaže li se na Mercatorovoj projekciji Zemlje projekcija infinitezimalnog trokuta sa globusa. dobiva se infinitezimalni trokut prikazan slikom 3, određen stranicama $\frac{d(Fi)}{\cos Fi}$, d(lambda) i kutem K_1

Mercator je definirao katetu $\frac{d(Fi)}{\cos Fi}$ trokuta na slici 3. a slijedom toga i širinu na pomorskoj karti, tako da kut (loksodromski kurs) na slici 3. bude jednak kutu (loksodromskom kursu) na Globusu, na slici 2. Uz ovako odabranu katetu jednaki su kutevi (loksodromski kursevi): na slici 1. (kurs po kojem stvarno plovi brod na Zemlji), na slici 2. (infinitezimalnom trokutu plovidbe na Globusu), na slici 3. (Mercatorovoj projekciji infinitezimalnog trokuta sa Globusa).

Ako je loksodromski kurs (K_1) u infinitezimalnom trokutu na Globusu jednak loksodromskom kursu u infinitezimalnom trokutu na Mercatorovoj karti, onda su jednake i sve njihove trigonometrijske funkcije, posebno:

$\cos K_1 = \frac{d(Fi)}{d(D_1)}$ iz trokuta sa slike 2., te

$\cos K_1 = \frac{\frac{d(Fi)}{\cos Fi}}{X}$ iz trokuta sa slike 3.

Ako su jednake lijeve strane jednadžbi, moraju biti jednake i desne:

$$\frac{d(Fi)}{d(D_1)} = \frac{\frac{d(Fi)}{\cos Fi}}{X}$$

odakle slijedi za vrijednost hipotenuze infinitezimalnog trokuta[2] na Mercatorovoj karti:

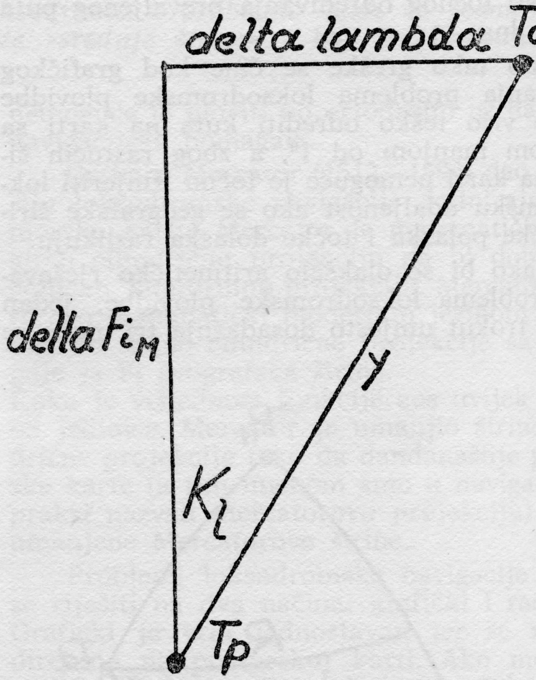
$$X = \frac{d(D_1)}{\cos Fi}$$

Da bi se na Mercatorovoj projekciji — pomorskoj karti dobio stvarni navigacijski trokut, trokut koji uključuje elemente: točku polaska, loksodromski kurs, loksodromsku udaljenost koju brod prevali te točku dolaska, dakle Mercatorovu projekciju trokuta sa slike 1., potrebno je katetu $\frac{d(Fi)}{\cos Fi}$ integrirati od širine točke polaska (Fi_p) do širine točke dolaska (Fi_d) . Vrijednost određenog integrala nazvana je razlikom Mercatorovih širina, delta Fi_M:

$$\text{delta } Fi_M = \int_{Fi_p}^{Fi_d} \frac{d(Fi)}{\cos Fi} =$$

$$= \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{Fi}{2}\right) \Bigg|_{Fi_p}^{Fi_d} =$$

$$= \ln \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{Fi_d}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{Fi_p}{2}\right)}$$



Slika 4.

Trokut po kojem se odvija loksodromska plovidba na Mercatorovoj karti

Loksodromski trokut kojim brod plovi prikazan je na pomorskoj karti slikom 4.

Da bi se dobila hipotenuza (y) ovog trokuta potrebno je usporediti trokute sa slike 1. i slike 4.:

$\cos K_1 = \frac{\text{delta } Fi}{D_1}$ u trokutu sa slike 1., te

$$\cos K_1 = \frac{\text{delta } Fi_M}{y} \text{ u trokutu sa slike 4.}$$

Izjednačavanjem desnih strana dobiva se:

$$y = \frac{\text{delta } Fi_M}{\text{Delta } Fi} D_1$$

Trokut po kojem se stvarno odvija plovidba na pomorskoj karti prikazan je slikom 5. i njime se mogu rješavati oba loksodromska problema.[3]

—o—

$$D_1 = \frac{\text{delta } Fi}{\text{delta } Fi} \sqrt{(\text{delta } Fi_M)^2 + (\text{delta lambda})^2} \quad . \; . \; . \quad (2)$$

ili jednostavnije iz već izračunatog kursa:

$$D_1 = \frac{\text{delta } Fi}{\cos K_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Drugi problem loksodromske plovidbe

Iz točke polaska (Fi_p, $lambda_p$) brod isplovi loksodromskim kursem K_1 i prevali loksodromsku udaljenost D_1. Traže se koordinate točke dolaska (Fi_d, $lambda_d$). Iz trokuta na slici 5. slijedi:

delta Fi = D_1 cos K_1 i tada : . . . . (4)

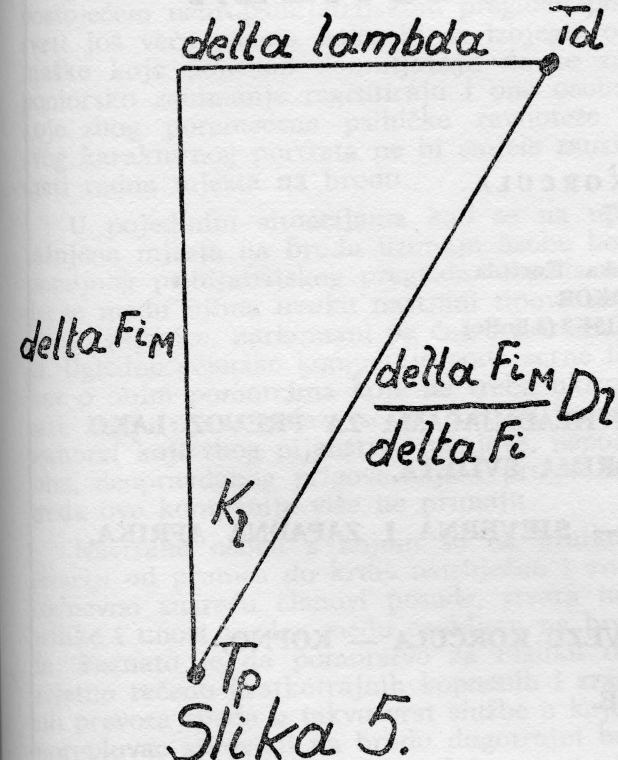
Fi_d = Fi_p + delta Fi . . . . . (5)

također:

delta lambda = delta Fi_M tang K_1 . (6)

$lambda_d$ = $lambda_p$ + delta lambda . (7)

U gornjim matematičkim izrazima pomorac treba voditi brigu o kvadrantu u kojem je



Slika 5.

Loksodromski trokut s definiranim svim elementima

RJEŠAVANJE PROBLEMA LOKSODROMSKE PLOVIDBE

Prvi problem loksodromske plovidbe

Iz točke polaska (Fi_p $lambda_b$) brod treba da stigne u točku dolaska(Fi_d $lambda_d$) Potrebno je odrediti loksodromski kurs (K_1) i loksodromsku udaljenost (D_1).

Iz trokuta na slici 5. slijedi:

$$\text{tang } K_1 = \frac{\text{delta lambda}}{\text{delta } Fi_M} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

kurs u izrazu (1) a izraz (2) treba uvijek uzimati sa pozitivnim preznakom — udaljenost je uvijek pozitivna veličina.

Da se eliminira neizvjesnost koju unosi izraz (1) može se, naročito kod programiranja zadatka, izračunati prvo izraz (2) a nakon toga loksodromski kurs po izrazu:

$$\cos K_1 = \frac{\text{delta } Fi}{D_1} \quad . \; . \quad (8)$$

Definirani loksodromski kurs u intervalu 0 — 360°, neka bude označen sa K'_1, bit će dat uz uvjete:

$K'_1 = K_1$ uz sin delta lambda > 0

$K'_1 = 360° — K$ uz sin delta lambda < 0

TOČNOST POSTUPKA S JEDNIM TROKUTOM

Kada se loksodromski problemi rješavaju sa tri loksodromska trokuta uvijek se čini izvjesna greška kod računanja srednje širine u drugom trokutu:

$$Fi_s = \frac{Fi_p + Fi_d}{2}$$

što nije ispravno. Postoji doduše jedan komplicirani izraz, no unosi jedan novi parametar, nepoznat pomorcu.

Kod rješavanja problema loksodromske navigacije pomoću ponuđenog trokuta u kojem su poznate sve stranice i svi kutevi, postupak se pojednostavlja a točnost se povećava, uz pretpostavku da je Zemlja kugla.

ZAKLJUČAK

1. Oba loksodromska problema mogu se riješiti bilo na pomorskoj karti bilo matematički. Veća točnost se postizava matematičkim rješenjem.
2. Razvojem malih digitalnih kalkulatora i kompjutora matematički postupak se sve češće primjenjuje.
3. Umjesto dosadašnja tri trokuta za matematičko rješenje loksodromskih problema, ponuđen je jedan trokut.
4. U ponuđenom trokutu definirane su sve stranice i svi kutevi.

5. Ponuđenim trokutom postizava se veća točnost u računu, a točnost ne ovisi o vrijednosti loksodromskog kursa niti o veličini loksodromske udaljenosti.

POPIS KRATICA I SIMBOLA

D_l — loksodromska udaljenost
delta Fi — razlika širine
delta Fi_M — razlika Mercatorovih širina
delta lambda — razlika dužine
$d(D_l)$ — diferencijal loksodromske udaljenosti
d(Fi) — diferencijal širine
d(lambda) — diferencijal dužine
d(R) — diferencijal razmaka
Fi — geografska širina
Fi_d — geografska širina točke dolaska
Fi_p — geografska širina točke polaska
Fi_s — srednja geografska širina
K_l — loksodromska udaljenost
$lambda_d$ — geografska dužina točke dolaska
$lambda_p$ — geografska dužina točke polaska
R — razmak
T_d — točka dolaska
T_p — točka polaska
x — hipotenuza infinitezimalnog loksodromskog trokuta na Mercatorovoj karti
y — hipotenuza loksodromskog trokuta po kojem se odvija navigacija na Mercatorovoj projekciji

LITERATURA

1. A. I. Simović: Navigacija, Školska knjiga, Zagreb, 1972. 125.
2. D. Zorović: Primjena modernih postupaka u navigaciji, Zbornik Fakulteta za pomorstvo i saobraćaj, Rijeka 1979., 347—359.
3. D. Zorović: Terestrička navigacija 2, skripta za Fakultet za pomorstvo i saobraćaj, Rijeka, predana za tisak 1982.