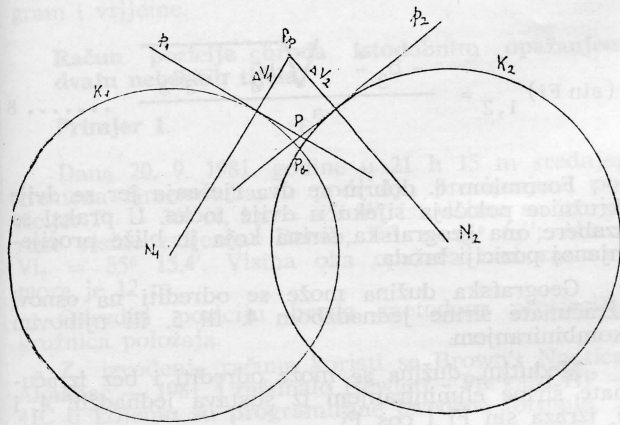


Astronomska navigacija

— direktno određivanje koordinata presjecišta dviju kružnica položaja i jedno indirektno rješenje —

U astronomskoj navigaciji danas se skoro isključivo upotrebljava metoda Marcq St. Hilaire-a za određivanje pozicije broda. Kao što je poznato tom metodom se određuju pravci koji aproksimiraju lukove kružnica položaja u blizini procijenjene pozicije broda.



Slika 1.

Na slici 1. shematski je prikazana pozicija broda (P) dobivena pravcima položaja (p_1, p_2) metodom Marcq St. Hilaire-a i prava pozicija (P_b) u presjecištu kružnica položaja. Razlika među tim pozicijama u praksi je redovito zanemarivo mala, pa se u navigaciji uzima da je pozicija dobivena metodom Marcq St. Hilaire-a dovoljno točna.

U ovom članku pokazat će se mogućnost određivanja prave pozicije (P_b) direktnim postupkom rješavanja koordinata presjecišta dviju kružnica položaja bez korištenja procijenjene pozicije (P_p). U tom slučaju koordinate se izravno dobivaju rješavanjem sustava od dvije jednadžbe kružnica položaja bez rješavanja sfernih trokuta. Na taj način dobivene koordinate teoretski su točnije jer na njih ne utječe pogreška u procijenjenoj poziciji.

Ta direktna metoda nije se upotrebljavala u navigaciji, jer nije bila prikladna za logaritamsko ili tablično rješavanje zbog složenosti i dužine formula. Međutim, današnje mogućnosti rješavanja trigonometrijskih jednadžbi i formula, na osnovi programiranih računala, otklanjaju ranije poteškoće za upotrebu metode, pa se može očekivati da će se uskoro početi primjenjivati u praksi.

Direktno određivanje koordinata presjecišta dviju kružnica položaja

Mogućnost određivanja pozicije broda direktnim računanjem koordinata presjecišta dviju kružnica položaja vjerojatno je već davno uočena. Međutim, zbog toga jer metoda nije bila upotrebljiva za praksu, nije se ni obrađivala u astronomsko-nautičkoj literaturi. U poznatim knjigama: *A History of Nautical Astronomy*, izdanje 1968. godine, od Charlesa Cottera i *American Practical Navigator-Bowditch*, izdanje 1977. godine, obrađene su sve metode astro-

nomske određivanja pozicije broda, a ta direktna mogućnost računanja koordinata presjecišta dviju kružnica položaja nije obuhvaćena. Da je ipak ta direktna mogućnost računanja koordinata već ranije uočena, vidi se i u knjizi *Astronomska navigacija*, izdanje 1954. godine, od Miloša Lipovca u kojoj se metoda spominje kao mogućnost. Ističe se da je rješavanje jednadžbi kružnica položaja veoma dugo i da se zbog toga u praksi ne upotrebljava.

Izvod jednadžbi i formula za direktno računsko određivanje koordinata presjecišta dviju kružnica položaja

Jednadžba kružnice položaja određena je kosinusovim poučkom za astronomsko-nautički sferni trokut.

$$\sin V = \sin F_i \sin d + \cos F_i \cos d \cos (S-La)$$

U jednadžbi su:

V — visina nebeskog tijela

F_i — geografska širina

d — deklinacija

S — satni kut Greenwicha nebeskog tijela

La — geografska dužina

S — La — mjesni satni kut nebeskog tijela

Sustav dviju jednadžbi s indeksima 1 za prvo opažanje, a indeksima 2 za drugo opažanje glasi:

$$\sin V_1 = \sin F_i \sin d_1 + \cos F_i \cos d_1 \cos (S_1-La) \dots 2$$

$$\sin V_2 = \sin F_i \sin d_2 + \cos F_i \cos d_2 \cos (S_2-La) \dots 3$$

U jednadžbama su dvije nepoznanice geografska širina (F_i) i geografska dužina (La), koje se mogu odrediti rješavanjem sustava.

U prije spomenutoj knjizi, *Astronomska navigacija* od Lipovca, samo je prikazan takav jedan sustav jednadžbi kružnica položaja, pa se čitav daljnji izvod provodi bez uzora iz astronomsko-nautičke literature.

Jednadžbe 2. i 3. napisat će se u razvijenom obliku:

$$\sin V_1 = \sin F_i \sin d_1 + \cos F_i \cos d_1 \cos S_1 \cos La + \cos F_i \cos d_1 \sin S_1 \sin La$$

$$\sin V_2 = \sin F_i \sin d_2 + \cos F_i \cos d_2 \cos S_2 \cos La + \cos F_i \cos d_2 \sin S_2 \sin La$$

Radi kraćeg pisanja uvest će se zamjene:

$$\sin V_1 = a_1, \quad \sin V_2 = a_2$$

$$\sin d_1 = b_1, \quad \sin d_2 = b_2$$

$$\cos d_1 \cos S_1 = c_1, \quad \cos d_2 \cos S_2 = c_2$$

$$\cos d_1 \sin S_1 = e_1, \quad \cos d_2 \sin S_2 = e_2$$

i jednadžbe svesti na oblik:

$$c_1 \cos Fi \cos La + e_1 \cos Fi \sin La = a_1 - b_1 \sin Fi$$

$$c_2 \cos Fi \cos La + e_2 \cos Fi \sin La = a_2 - b_2 \sin Fi$$

Rješenjem prednjeg sustava po veličinama $\cos La$ i $\sin La$, nakon sređivanja dobije se:

$$\cos La = \frac{a_1 e_2 - a_2 e_1 + (b_2 e_1 - b_1 e_2) \sin Fi}{(c_1 e_2 - c_2 e_1) \cos Fi}$$

$$\sin La = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1) \sin Fi}{(c_1 e_2 - c_2 e_1) \cos Fi}$$

Uvođenjem novih zamjena:

$$a_1 e_2 - a_2 e_1 = A_1, \quad b_2 e_1 - b_1 e_2 = B_1$$

$$a_2 c_1 - a_1 c_2 = A_2, \quad b_1 c_2 - b_2 c_1 = B_2$$

$$c_1 e_2 - c_2 e_1 = C$$

jednadžbe dobiju oblik:

$$\cos La = \frac{A_1 + B_1 \sin Fi}{C \cos Fi} \dots\dots 4$$

$$\sin La = \frac{A_2 + B_2 \sin Fi}{C \cos Fi} \dots\dots 5$$

gdje su:

$$A_1 = \sin V_1 \cos d_2 \sin S_2 - \sin V_2 \cos d_1 \sin S_1$$

$$B_1 = \sin d_2 \cos d_1 \sin S_1 - \sin d_1 \cos d_2 \sin S_2$$

$$A_2 = \sin V_2 \cos d_1 \cos S_1 - \sin V_1 \cos d_2 \cos S_2$$

$$B_2 = \sin d_1 \cos d_2 \cos S_2 - \sin d_2 \cos d_1 \cos S_1$$

$$C = \cos d_1 \cos d_2 \sin (S_2 - S_1)$$

U daljnjem postupku kvadrirat će se jednadžbe 4. i 5., a zatim zbrojiti lijeve i desne strane. Time će se iz jednadžbi eliminirati izrazi s geografskom dužinom (La), jer je zbroj lijevih strana jednak:

$$\sin^2 La + \cos^2 La = 1$$

Nakon sređivanja dobije se kvadratna jednadžba s nepoznicom $\sin Fi$.

$$\sin^2 Fi (B_1^2 + B_2^2 + C^2) + 2 \sin Fi (A_1 B_1 + A_2 B_2) + A_1^2 + A_2^2 - C^2 = 0 \dots\dots 6$$

Ako se postavi u jednadžbi 6. da je:

$$a_3 = B_1^2 + B_2^2 + C^2$$

$$b_3 = A_1 B_1 + A_2 B_2$$

$$c_3 = A_1^2 + A_2^2 - C^2$$

dobije se:

$$a_3 \sin^2 Fi + 2 b_3 \sin Fi + c_3 = 0 \dots\dots\dots 7$$

Rješenje prednje jednadžbe daje formulu za određivanje geografske širine:

$$(\sin Fi)_{1,2} = \frac{-b_3 \pm \sqrt{b_3^2 - a_3 c_3}}{a_3} \dots\dots\dots 8$$

Formulom 8. dobiju se dva rješenja jer se dvije kružnice položaja sijeku u dvije točke. U praksi se izabere ona geografska širina koja je bliže procijenjenoj poziciji broda.

Geografska dužina može se odrediti na osnovi izračunate širine jednadžbom 4. ili 5. ili njihovim kombiniranjem.

Međutim, dužina se može odrediti i bez izračunate širine eliminiranjem iz sustava jednadžbi 4. i 5. izraza $\sin Fi$ i $\cos Fi$.

Rješavanjem sustava dobije se:

$$\cos Fi = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{C B_1 \sin La - C B_2 \cos La}$$

$$\sin Fi = \frac{A_1 \sin La - A_2 \cos La}{B_1 \sin La - B_2 \cos La}$$

Kvadriranjem i zbrajanjem lijevih i desnih strana prednjih jednadžbi dobije se izraz bez geografske širine Fi jer je:

$$\sin^2 Fi + \cos^2 Fi = 1$$

Dodatnim sređivanjem dobije se kao rezultat kvadratna jednadžba samo s $\text{tg } La$ kao nepoznicom

$$\text{tg}^2 La \left[C^2 (A_1^2 - B_1^2) + (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2 \right] + 2 \text{tg } La C^2 (B_1 B_2 - A_1 A_2) +$$

$$C^2 (A_2^2 - B_2^2) + (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2 = 0 \dots\dots\dots 9$$

Postavi li se u jednadžbi 9. da je:

$$a_4 = C^2 (A_1^2 - B_1^2) + (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2$$

$$b_4 = C^2 (B_1 B_2 - A_1 A_2)$$

$$c_4 = C^2 (A_2^2 - B_2^2) + (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2$$

dobije se:

$$a_4 \text{tg}^2 La + 2 b_4 \text{tg } La + c_4 = 0 \dots\dots\dots 10$$

Rješenje jednadžbe 10. daje formulu za određivanje geografske dužine.

$$(\text{tg } La)_{1,2} = \frac{-b_4 \pm \sqrt{b_4^2 - a_4 c_4}}{a_4} \dots\dots\dots 11$$

Kao i kod određivanja širine i ovdje se dobiju dva rješenja, pa se izabere ona dužina koja je bliže procijenjenoj poziciji broda.

Jednadžbe 6. i 9. mogu se izvesti i u čisto trigonometrijskom obliku, bez zamjena, ali tada je izvod mnogo složeniji i duži. Osim toga, u tom slučaju je i konačna ukupna dužina jednadžbi znatno veća, te je za njihovo rješavanje potreban duži program i vrijeme.

Račun pozicije broda istodobnim opažanjem dvaju nebeskih tijela

Primjer 1.

Dana 20. 9. 1981. godine u 21 h 15 m srednjeg vremena Greenwicha, u području procijenjene pozicije: $Fi = 36^\circ N$, $La = 45^\circ W$, istodobno su izmjerene visine zvijezda: Deneb, $Vi_1 = 61^\circ 6,6'$; Altair, $Vi_2 = 55^\circ 15,4'$. Visina oka opažača nad razinom mora je 12 m.

Odrediti poziciju broda metodom presjecišta kružnica položaja.

Za izvođenje računa koristi se Brown's Nautical Almanac — 1981. i računalo Hewlett - Packard HP — 41C u kojemu su programirane izvedene formule.

Podaci za izvođenje računa:

Greenwich-ki satni kut Proljetne točke (Sz) u $T_m = 21$ h 15 m je:

$$\begin{aligned} Sz &= -314^\circ 39,5' (21^h) \\ &\quad - 3 \quad 45,6 (15^m) \\ \hline Sz &= -318^\circ 25,1' \end{aligned}$$

	Deneb	Altair
Izmjerena visina:	$Vi_1 = 61^\circ 6,6'$	$Vi_2 = 55^\circ 15,4'$
Korektura:	$kr = 6,8$	$kr = 6,9'$
Ispravljena visina:	$V_1 = 60^\circ 59,8'$	$V_2 = 55^\circ 8,5'$
Surektascenzija:	$Su_1 = -49^\circ 47,7'$	$Su_2 = -62^\circ 31,7'$
Deklinacija:	$d_1 = +45^\circ 13,1'$	$d_2 = +8^\circ 49,3'$
Satni kut Gr. S = Sz + Su :	$S_1 = -368^\circ 12,8'$	$S_2 = -380^\circ 56,8'$

Računalom se dobiju dvostruka rješenja:

$$\begin{aligned} Fi_1 &= 36^\circ 2,9' N & i & & Fi_2 &= 21^\circ 48,9' N \\ La_1 &= 44^\circ 52,1' W & & & La_2 &= 12^\circ 42,9' E \end{aligned}$$

Brod se nalazi u poziciji (1) jer su te koordinate bliže procijenjenoj poziciji.

Ako se iz dobivene pozicije izračunaju visine opaženih zvijezda dobije se: $V_1 = 60^\circ 59,8'$ i $V_2 = 55^\circ 8,5'$ što odgovara upotrebljenim visinama u računu, pa znači da su izvedene jednadžbe i formule točne.

Račun pozicije broda opažanjem jednog nebeskog tijela u razmaku vremena

Kada se opaža jedno nebesko tijelo u razmaku vremena, kao što je slučaj danju kad se vidi samo

Sunce, tada je potrebno prvu opaženu visinu ispraviti za pređeni put broda u intervalu opažanja, S tako ispravljenom i drugom opaženom visinom određuju se pozicije broda.

Ispravljanje prve visine vrši se poznatom formulom:

$$dV = D \cos L \dots\dots\dots 12$$

gdje je D pređeni put broda, a L pramčani kut opaženog nebeskog tijela.

Primjer 2.

Dana 8. 5. 1981. godine u 10 h 10 m srednjeg vremena Greenwich, u području procijenjene pozicije: $Fi = 35^\circ 10' N$, $La = 30^\circ 5' W$, izmjeri se prva visina Sunca, $Vi_1 = 60^\circ 3,2'$. Nakon toga brod plovi 2 sata i 30 minuta i pređe udaljenost D = 36 milja u kursu K = 230° i u 12 h 40 m srednjeg vremena Greenwicha izmjeri se druga visina Sunca, $Vi_2 = 65^\circ 14'$.

Visina oko opažača nad razinom mora je 12 m. Odrediti poziciju broda metodom presjecišta kružnica položaja

Podaci za izvođenje računa:

Satni kut Greenwicha:

$$\begin{aligned} S_1 &= -330^\circ 53,3' (10^h) & , & & S_2 &= -0^\circ 53,4' (12^h) \\ &\quad - 2 \quad 30,0 (10^m) & & & &\quad - 10 \quad 0,0 (40^m) \\ \hline S_1 &= -333^\circ 23,3' & & & S_2 &= -10^\circ 53,4' \end{aligned}$$

Deklinacija: $d_1 = +17^\circ 7,1'$, $d_2 = +17^\circ 8,8'$

Formulom 12. određen je ispravak dV_1 za pređeni put broda od 36 milja: $dV_1 = -25,7'$.

Izmjerena visina:	$Vi_1 = 36^\circ 38,7'$	$Vi_2 = 65^\circ 14,4'$
Korektura:	$kr = +8,6'$	$kr = +9,4'$
	$dV_1 = -25,7'$	
Ispravljena visina:	$V_1 = 36^\circ 21,6'$	$V_2 = 65^\circ 10,8'$

Računalom se dobiju pozicije:

$$\begin{aligned} Fi_1 &= 34^\circ 37,8' N & i & & Fi_2 &= 4^\circ 33,3' S \\ La_1 &= 30^\circ 37,4' W & & & La_2 &= 23^\circ 5,1' W \end{aligned}$$

S obzirom na procijenjenu poziciju prilikom prvog opažanja, koordinate broda u trenutku drugog opažanja su u poziciji (1).

Određivanjem visina Sunca iz izračunate pozicije dobije se:

$$V_1 = 36^\circ 21,6' \text{ i } V_2 = 65^\circ 10,8'$$

što odgovara upotrebljenim visinama u računu, pa znači da su dobivene koordinate točne.

Može se još istaknuti da se računalo može programirati i tako da daje samo jednu poziciju, u kojoj se brod nalazi, a da drugu izostavlja. U tom slučaju potrebno je u računalo unijeti i procijenjenu širinu zaokruženu, na primjer, na bliži stupanj. Na osnovi te širine računalo izabere pravu širinu kod rješavanja formule 8., a ta širina se zatim koristi za određivanje dužine formulom 4. ili 5.

Naravno, programom se može obuhvatiti i ispravljanje izmjerenih visina, ispravljanje visine formulom 12. kod opažanja u razmaku vremena ili unošenje u računalo pozitivnih satnih kutova kao što je uobičajeno u praksi ili neke druge pogodnosti.

Jedno indirektno rješenje

Koordinate presjecišta dviju kružnica položaja mogu se i indirektno odrediti rješavanjem sustava od dvije diferencijalne jednadžbe koje se dobiju diferenciranjem jednadžbe 2. i 3.

Takav sustav jednadžbi prvi je dao M. le Comte du Boisy u — Nautical Magazine — od 1881. godine u članku — New Astronomical Navigation —.

Sustav diferencijalnih jednadžbi glasi:

$$dV_1 = \cos Az_1 dFi + \sin Az_1 \cos Fi_p dLa \dots\dots\dots 13$$

$$dV_2 = \cos Az_2 dFi + \sin Az_2 \cos Fi_p dLa \dots\dots\dots 14$$

U jednadžbama su dV_1 i dV_2 razlike između izmjerenih i računatih visina opaženih nebeskih tijela, a Az_1 i Az_2 azimuti nebeskih tijela koji su određeni prema procijenjenoj poziciji Fi_p i La_p . Veličine dFi i dLa su relativne koordinate koje se odrede rješavanjem sustava (13, 14).

Rješenjem se dobije:

$$dFi = \frac{dV_1 \sin Az_2 - dV_2 \sin Az_1}{\sin(Az_2 - Az_1)} \dots\dots\dots 15$$

$$dLa = \frac{dV_2 \cos Az_1 - dV_1 \cos Az_2}{\sin(Az_2 - Az_1) \cos Fi_p} \dots\dots\dots 16$$

Algebarskim dodavanjem relativnih koordinata (dFi) i (dLa) procijenjenim koordinatama (Fi_p , La_p), dobiju se koordinate koje odgovaraju poziciji (P) na slici 1., što se dobije pravcima položaja metodom Marcq St. Hilaire-a.

$$Fi = Fi_p + dFi \dots\dots\dots 17$$

$$La = La_p + dLa \dots\dots\dots 18$$

Točnost ovako dobivene pozicije može se povećati ponavljanjem računa, tako da se izračunata

koordinate uzmu kao procijenjene u sljedećem rješavanju, što se lako može učiniti jednim programiranim računalom.

Ako se primjer 1. riješi ovim indirektnim postupkom tako da se na primjer, uzme procijenjene koordinate: $Fi_p = 36^\circ 18' N$, $La_p = 44^\circ 37' W$, dobije se pozicija: $Fi = 36^\circ 30' N$, $La = 44^\circ 52,2' W$, koja se razlikuje od prave pozicije dobivene direktnom metodom za 0,1'. Naravno, ponavljanjem računa dobiju se iste koordinate kao i direktnom metodom. Praktički bi se dobile iste koordinate kao i direktnom metodom i bez ponavljanja postupka kad je mala razlika između procijenjene i prave pozicije, što je u praksi redovito slučaj.

Ovaj indirektni postupak nije se održao u praksi jer je duži od metode Marcq St. Hilaire-a. Naime pored računanja visine i azimuta kod određivanja pozicije metodom Marcq St. Hilaire-a, ovim indirektnim postupkom potrebno je još dodatno riješiti i formule 15. i 16.

Zaključak

Prikazane mogućnosti astronomskog određivanja pozicije broda mogu se danas jednostavno i brzo rješavati programiranim računalima. Time otpadaju ranije poteškoće za primjenu tih metoda zbog složenosti i dužine postupka.

Pojavom na tržištu džepnih računala koja se mogu programirati, mogu sada navigatori i sami programirati svoja računala za astronomsko određivanje pozicije broda. Koje će formule programirati zavisi od opredjeljenja navigatora i programskog kapaciteta računala. Ako je računalo dovoljnog kapaciteta tada je najprikladnije programirati direktnu metodu, a kod računala manjih mogućnosti indirektni postupak ili metodu Marcq St. Hilaire-a.

Na kraju, može se pretpostaviti, da će se sve većom upotrebom programiranih računala sve više direktno određivati geografske koordinate, a da će se metoda Marcq St. Hilaire-a, koja je dominirala oko stotinu godina, postepeno napustiti.

Literatura:

- Miloš S. Lipovac, Astronomska navigacija, 1954.
- Charles H. Cotter, A History of Nautical Astronomy New York, 1968.
- Ivo Sjekavica, Magistarski rad, Razvoj i nove mogućnosti astronomskog određivanja pozicije broda, Dubrovnik, 1982.

SLOBODNA PLOVIDBA ~ ŠIBENIK

**VRŠI PREVOZ SVIH VRSTA TERETA PO SVIM MORIMA SVIJETA
S VLASTITIM I UNAJMLJENIM BRODOVIMA**

Održava redovni servis na relaciji Jadran — Crno more — Jadran

Direkcija: Šibenik, Sarajevska 3

P.O.B. 125

Telegram: **Plovidba — Šibenik**

Telefoni: 23-755

Telex: 27325, YU PLOV