Prof. BORIS FRANUŠIĆ
Dubrovnik

# Putanje umjetnih zemljinih satelita i njeni elementi

Živimo u eri očekivanja da se čovječja noga dotakne mjesečeva tla. Danas i mala djeca znaju o umjetnim satelitima i malo je onih koji još nijesu za neke vedre noći vidjeli brzo gibanje jedne »zvijezde« po nebeskom svodu. Međutim, mali je broj onih koji bar približno znaju po kojim zakonima i uvjetima se ta umjetna tijela gibaju. Svak tko pozna elementarnu matematiku, Keplerove i Newtonove zakone može lako shvatiti koje sve uvjete mora zadovoljiti jedno tijelo poslano sa Zemlje da bi postalo njezin satelit.

Po gore spomenutim zakonima dva se nebeska tijela kreću oko težišta svojih masa po jednom od konusnih presjeka i to: elipsi (zajedno sa slučajem kruga), paraboli i hiperboli. Težište je u jednom fokusu krivulje. Ujedno radius vektori datih tijela opisuju u jednakim vremenskim razmacima jednake površine, a sila koja ovo kretanje izaziva proporcionalna je masama tijela i opada sa kvadratom odstojanja između njih.

Kakvu će putanju imati tijelo izbačeno sa Zemlje zavisi o početnoj brzini koju će to tijelo imati na određenom mjestu iznad površine Zemlje, gdje će pravac brzine biti u smjeru tangente na putanji. Ako za kretanje tog tijela zanemarimo uticaj ostalih masa sistema u kojem se giba, onda se brzina može izračunati iz ove jednadžbe:

$$v^2 = k\,(m_0 + m)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \qquad (1)$$

U ovoj jednadžbi k je konstanta gravitacije i iznosi 6,67 x $10^{-8}$ c. g. s.: $m_0$ je masa velikog tijela iz kojeg se ispaliva raketa; r udaljenost od težišta velikog tijela do tačke gdje malo tijelo postiže željenu brzinu; a velika poluos krivulje konusnog presjeka po kojoj se malo tijelo giba.

Pošto je masa malog tijela zanemarljivo mala prema masi velikog tijela onda možemo smatrati da je težište masa u težištu mase velikog tijela, koje će biti u jednom fokusu krivulje putanje. Prema tome m u jednadžbi (1) zanemarimo i dobijemo jednadžbu:

$$v^2 = km_0\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \qquad (2)$$

Za elipsu je poluos a pozitivna i konačna, pa će $v^2$ biti manji od $\frac{2km_0}{r}$. Za krug je $a = r$ i $v^2 = \frac{km_0}{r}$. Za parabolu je a beskonačno i $v^2 = \frac{2km_0}{r}$. Za hiperbolu je a negativno i konačno, pa je $v^2$ veće od $\frac{2km_0}{r}$.

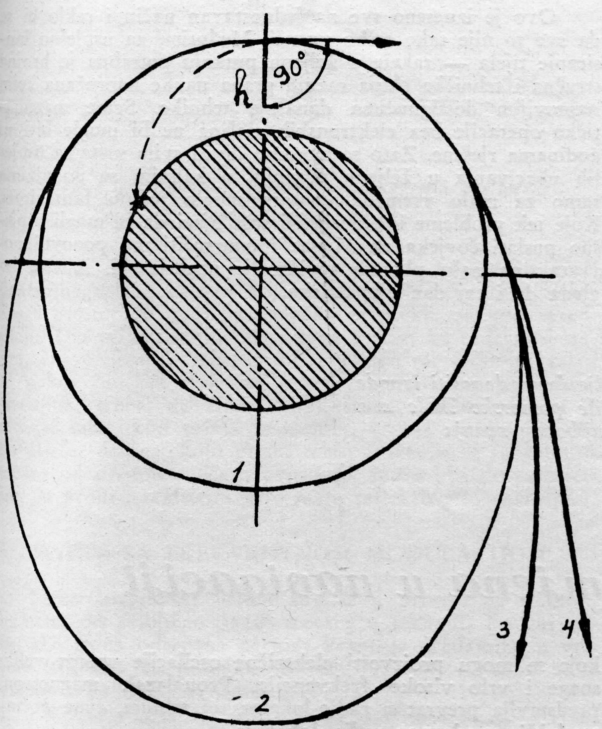
Kao primjer uzmimo da se traži kakvu početnu brzinu treba dati raketi na površini Zemlje zanemarujući atmosferu, da bi ona pošla u beskonačnost. Da bi raketa pošla u beskonačnost treba da je u jednadžbi (2) a beskonačno tj. $v^2 = \frac{2km_0}{r}$. Odatle je $v = \sqrt{2k}\,\sqrt{\frac{m_0}{r}}$. Veličina $\sqrt{2k}$ ne ovisi o masi i rastojanju od težišta velikog tijela i iznosi 3,65 x $10^{-6}$. Masa Zemlje je 5,98 x $10^{27}$ g, a radius 6,37 x $10^8$ cm. S ovim vrijednostima izračunata brzina je v = 11,2 km/sec. Ovo je minamalna brzina da raketa ode van djelovanja gravitacije Zemlje, ali ona ostaje u polju sunčeve gravitacije.

Ako bi raketu ispaljivali sa površine Mjeseca, čija je masa 7,35 x $10^{25}$ g. i radius 1,74 x $10^8$ cm, onda bi nam bila početna brzina 2,37 km/sec. Zato se Mjesec planira za startnu stanicu međuplanetarnih letova u budućnosti.

Kad bi raketu htjeli poslati i van polja sunčeve gravitacije tj. van planetskog sistema onda bi za r morali uzeti srednje odstojanje Zemlje od Sunca r = 1,50 x $10^{13}$ cm, i masu Sunca $m_\odot$ = 1.99 x $10^{33}$ gr. S ovim veličinama izračunata brzina bit će 42,1 km/sec.

Dakle, kad bi raketu izbacivali sa Zemlje i željeli da se giba po elipsi kao njen umjetni satelit, onda bi joj morali dati početnu brzinu manju od 11.2 km/sec. na izvjesnoj visini h iznad Zemlje. Najmanja početna brzina koju je potrebno dati raketi da se ne vrati na Zemlju iznosi 7,9 km/sec i zove se prva kozmička brzina, dok se brzina od 11,2 km/sec zove druga kozmička brzina.

Za slučaj kretanja po krugu težište velikog tijela je u središtu kruga, a smjer brzine je uvijek normalan na radius vektor. Kružnica bi bila najbolja putanja, ali je nju praktički nemoguće ostvariti, jer se ne mogu postići vrlo tačni početni uvjeti: 1) da pravac brzine rakete bude strogo tangencijalan na putanju u određenoj tački ulaska u putanju i 2) u toj tački tačno određenu početnu brzinu, a to je prva kozmička brzina.




Slika 1. nam pokazuje različite putanje prema vrijednosti početne brzine na visini h iznad površine Zemje. Putanja 1 odgovara prvoj kozmičkoj brzini, putanja 2 brzini između prve i druge kozmičke brzine, putanja 3 drugoj kozmičkoj brzini, te putanja 4 brzini većoj od druge kozmičke brzine. Isprekidana linija predstavlja gibanje rakete do tačke gdje ona ulazi u putanju.

Kad se raketa ubaciva u putanju oko Zemlje, ona se pomoću energije dovodi do dovoljne visine h, da bi otpor atmosfere bio malen. U toku gibanja prema tački na visini h, raketa postepeno zauzima normalan položaj na radius vektor, a na samoj visini h postiže brzinu veću od prve, a manju od druge kozmičke brzine, da bi se gibala po elipsi kao umjetni satelit. Da bi se postigli svi ovi uvjeti potrebna su komplicirana tehnička sredstva, čija greška u radu mora biti vrlo mala. Vrlo je važno za oblik putanje odrediti tačno visinu nad Zemljom, pravac i smjer izbacivanja prema vertikali i veličinu brzine u trenutku kad prestaje rad pogonskih motora i počimlje slobodni let rakete. Pogreške u određivanju visine imaju manji uticaj od grešaka u pravcu i brzini. Kod lansiranja rakete greška u pravcu mora biti manja od $1^0$, a u brzini $\pm$ 50 m, da bi se postigla putanja koju želimo, jer se samo malim povećanjem brzine dobiju velika povećanja poluosi a.

Kod elipsaste putanje rakete oko Zemlje njen najbliži položaj zove se perigeum, a najdalji apogeum. Na pr. prvi umjetni satelit izbačen 1957. godine u SSSR-u u perigeumu je bio udaljen oko 300 km, a u apogeumu 900 km. Samo u ovim položajima je pravac brzine normalan na radius vektor, dok u ostalim tačkama putanje pravac brzine s radius vektorom zatvara kut različit od $90^0$. U perigeumu je brzina rakete veća, a u apogeumu manja, u skladu sa Keplerovim zakonima.

Ako u jednadžbi (2) znamo r i v možemo iz nje izračunati veličinu poluosi eliptične putanje:

$$a = \frac{r}{2 - \frac{v^2 r}{k m_0}}$$

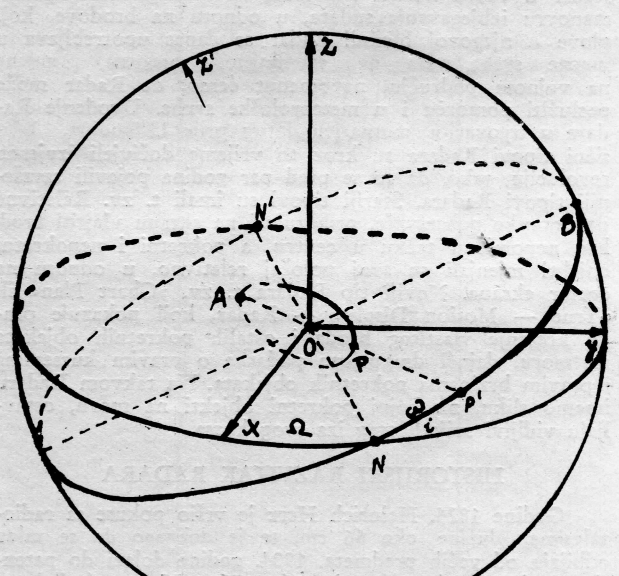
Poznato je da je kod elipse dužina radius vektora od fokusa do najbliže tačke na velikoj osi: r = a (l-e), gdje je e brojni ekscentricitet elipse. Iz ove jednadžbe izračunamo vrijednost $e = 1 - \frac{r}{a}$. To će biti pozitivna veličina, jer je r manje od a. Sa izračunatim veličinama a i e možemo izračunati i veličinu male poluosi eleptične putanje:

$$b = a \sqrt{1 - a^2}$$

Tako smo odredili elipsu po kojoj se raketa kreće, ali da znamo položaj te elipse u prostoru moramo znati još neke elemente s kojim će nas upoznati slika 2, koja predstavlja nebesku sferu čije je središte 0 početak pravokutnog koordinatnog sistema 0xyz.

Ravnina 0xy je u ravnini nebeskog ekvatora, a os z je polarna os. U tački 0 je težište velikog tijela, odnosno fokus elipse po kojoj se malo tijelo (raketa) giba oko velikog pod uticajem njegove gravitacije. Ravnina elipse siječe nebesku sferu lukom NBN', a pol ove ravnine je u tački z'. Tačke u kojima ravnina putanje siječe ravninu ekvatora 0xy zovu se čvorovi, a linija koja ih spaja zove se linija čvorova. Pri tome je u tački N ulazni čvor, jer tijelo prelazi s južne na sjevernu hemisferu, a u tački N' silazni čvor putuje. Kut xON zove se longituda ulaznog čvora i označava s $\Omega$. Drugi kut koji nam služi pri određivanju ravnine putanje u prostoru je nagib i prema ravnini ekvatora (na slici kut yNB). Da bi izračunali položaj tijela na putanji moramo još znati pravac velike poluosi a u ravnini putanje, koji je na slici predstavljen kutom NOP' i zove se argument latitude perigeuma. P i označava sa $\omega$. Zadnji elemenat je trenutak T prolaza tijela kroz perigeum.

Tako imamo ovih šest elemenata putanje: a, e (odnosno b) $\Omega$, i, $\omega$, T. Pomoću njih i poznate srednje kutne brzine tijela možemo u pravokutnom sistemu 0xyz izračunati za svaki trenutak položaj tijela na putanji. Pri tome mi predpostavljamo da na tijelo ne djeljuju nikakva druga tijela osim mase velikog tijela u fokusu elipse, te da se tijelo kreće u praznom prostoru kojega u prirodi nema. Ali stvarno umjetni Zemljin satelit se neće gibati uvijek po istoj putanji, jer će se zbog uticaja ostalih tijela njegovi putanjski elementi stalno mijenjati, a zemljina atmosfera najviše utiče na promjenu brzine tijela. Već smo naveli da za male promjene brzine dolazi do velikih promjena poluosi a odnosno ostojanja apogeuma.




Spomenuli smo i srednju kutnu brzinu tijela. To je promjena kuta tijela prema osi obrtanja u jedinici vremena. Prvi umjetni Zemljin satelit imao je za period obilaženja oko Zemlje od 96 minuta ovu kutnu brzinu:

$$k_b = \frac{1}{96} : \frac{2\Pi}{60} \sec^{-1} = \frac{\Pi}{2880} \sec^{-1} =$$
$$= 0{,}00109 \sec^{-1}$$

Znajući srednju kutnu brzinu (kb) i visinu umjetnog satelita nad površinom Zemlje (h) možemo brzinu umjetnog satelita izračunati po jednadžbi: $v = (h + r) \times kb$, ako predpostavimo da je putanja krug, čiji je polumjer $h + r$. Za $h$ uzmimo najvišu visinu satelita od 970 km, a polumjer Zemlje 6370 km. Tada imamo: $v = (970 + 6370) \dfrac{\Pi}{2880}$ km/sec $=$ $= 8$ km/sec. A to je kako smo vidjeli brzina bliska prvoj kozmičkoj brzini koja odgovara kružnoj putanji. Dakle, može se predpostaviti da je putanja kružna, jer smo vidjeli i prije da je približna udaljenost umjetnog satelita u perigeumu bila 300 km, a u apogeumu 900 km, što je neznatno odstupanje od kruga, kada se uzme u obzir i zemljin polumjer.

Ovo je izneseno sve na jednostavan način i reklo bi se da sve to nije tako teško postići. Međutim, za uspješno lansiranje tijela — rakete u željenu putanju potrebna je brojna stručna i tehnička ekipa raznih grana nauke naoružana svim najnovijim dostignućima današnje tehnike. Same matematičke operacije bez elektronskih mašina ne bi mogle biti ni godinama rješene. Zato se moramo diviti svim vistama uspjelih ubacivanja u željenu putanju, o kakvim se podvizima samo za malo vremena unatarg moglo jedino fantazirati. Koje tek probleme imaju riješiti stručnjaci da bi mogli uspješno poslati čovjeka na Mjesec i omogućiti mu ponovni povratak na našu planetu suvišno je naglašavati. A eto, izgleda da i taj dan nije daleko.

*Kako smo već najavili u našem prošlogodišnjem broju, ovdje ćemo donositi izvode ili u nastavcima čitave pojedine diplomske radove studenata Više pomorske škole a u želji, da ovi radovi koriste mladim pomorcima na usavršavanju njihovog zvanja*