O nejednakosti s državnog natjecanja

Nikola Adžaga, Tvrtko Tadić

Zadatak s državnog natjecanja

Na ovogodišnjem državnom natjecanju (vidi str. 31.) za 1. razrede zadan je sljedeći zadatak:

3. Dokažite da za svaka tri realna broja x, y, z vrijedi nejednakost:

$$|x| + |y| + |z| - |x + y| - |y + z| - |z + x| + |x + y + z| \geq 0.$$

Rješenje. Redom dobivamo

$$|x| + |y| + |z| - |x + y| - |y + z| - |x + z| + |x + z + y| \geq 0$$

$$|x| + |y| + |z| + |x + z + y| \geq |x + y| + |y + z| + |x + z|$$

$$(|x| + |y| + |z| + |x + z + y|)^2 \geq (|x + y| + |y + z| + |x + z|)^2$$

$$x^2+y^2+z^2+x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz+2|xy|+2|xz|+2|x||x+y+z|+2|yz|+2|y||x+y+z|+2|z||x+y+z| \geq 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 2|xy + y^2 + xz + yz| + 2|x^2 + xz + xy + yz| + 2|xy + yz + xz + z^2|$$

$$|xy| + |xz| + |yz| + |yz + xy + y^2| + |xy + xz + x^2| + |yz + xz + z^2| \geq |xy + yz + xz + y^2| + |xy + yz + xz + x^2| + |xy + yz + xz + z^2|,$$

što je očito jer vrijedi (nejednakost trokuta) $|a| + |b| \geq |a + b|$ za svaki $a, b \in \mathbb{R}$, pa vrijedi:

$$\begin{aligned}
|xy| + |yz + xz + z^2| &\geq |xy + yz + xz + z^2| \\
|xz| + |yz + xy + y^2| &\geq |xz + yz + xy + y^2| \\
|yz| + |xy + xz + x^2| &\geq |yz + xy + xz + x^2|
\end{aligned}$$

Što zbrojeno daje traženu nejednakost. Uočimo da se jednakost postiže npr. za $x + y + z = 0$. ■

Napomena. Službena rješenja zadatka išla su preko intervala.

S realnih na kompleksne brojeve

Pravi matematičar ponekad se mora zapitati može li tvrdnju dokazati općenitije. *Možemo li poopćiti tvrdnju ovog zadatka?* **Možemo!** Uz male preinake prethodnog dokaza možemo postići da tvrdnja vrijedi za **kompleksne brojeve**!

Teorem 1. Za svaka tri kompleksna broja t, u, w vrijedi nejednakost:

$$|t| + |u| + |w| - |t + u| - |u + w| - |w + t| + |t + u + w| \geq 0.$$

Dokaz. Postupak dokazivanja provodimo kao u prethodnom primjeru, a ovdje ćemo navesti samo kraj. Za brojeve $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ također vrijedi (nejednakost trokuta) $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$, pa je kao prije

$$\begin{aligned}
|t||u| + |w||u + t + w| = |tu| + |uw + tw + w^2| &\geq |tu + uw + tw + w^2| = |t + w||u + w| \qquad (1)\\
|t||w| + |u||w + t + u| = |tw| + |uw + tu + u^2| &\geq |tw + uw + tu + u^2| = |t + u||u + t| \qquad (2)\\
|u||w| + |t||u + w + t| = |uw| + |tu + tw + t^2| &\geq |uw + tu + tw + t^2| = |t + w||w + t|. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Još nam preostaje pokazati da je $|t|^2+|u|^2+|w|^2+|t+u+w|^2=|t+u|^2+|u+v|^2+|w+t|^2$ $(*)$. To slijedi iz:

$$\begin{aligned}
|t|^2+|u|^2+|w|^2+|t+u+w|^2 &= |t|^2+|u|^2+|w|^2+(t+u+w)\overline{(t+u+w)}\\
&= t\overline{t}+u\overline{u}+w\overline{w}+t\overline{t}+t\overline{u}+t\overline{w}+u\overline{t}+u\overline{u}+u\overline{w}+w\overline{t}+w\overline{u}+w\overline{w}\\
&= (t\overline{t}+t\overline{u}+u\overline{t}+u\overline{u})+(u\overline{u}+u\overline{w}+w\overline{u}+w\overline{w})+(w\overline{w}+w\overline{t}+u\overline{t}+t\overline{t})\\
&= (t+u)\overline{(t+u)}+(u+w)\overline{(u+w)}+(w+t)\overline{(w+t)}\\
&= |t+u|^2+|u+w|^2+|w+t|^2
\end{aligned}$$

Množenjem nejednakosti $(1)-(3)$ s 2 i zbrajanjem s $(*)$ dobivamo:

$$(|t|+|u|+|w|+|t+u+w|)^2 \geq (|t+u|+|u+w|+|w+t|)^2,$$

a budući da su izrazi pod zagradama pozitivni vrijedi tvrdnja. Uočimo da se jednakost postiže npr. za $t+u+w=0$. ■

Geometrijska interpretacija

Za kraj možemo ove algebarske rezultate interpretirati geometrijski. Čitatelji su se već imali prilike upoznati s Gaussovom ravninom u školi. $Z(z)$ znači da točka Z ima kompleksnu koordinatu z u Gaussovoj ravnini. Mi ćemo iz nejednakosti teorema 1. i identiteta $(*)$ izreći sljedeći teorem iz geometrije.

Teorem 2. Dan je trokut ABC i točka D u njegovoj ravnini. Ako su točke P_a, P_b i P_c redom polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$, a T težište tog trokuta, tada vrijedi:

$$|DA|^2+|DB|^2+|DC|^2+9|DT|^2=4|DP_a|^2+4|DP_b|^2+4|DP_c|^2$$

$$|DA|+|DB|+|DC|+3|DT| \geq 2|DP_a|+2|DP_b|+2|DP_c|.$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je $D(0)$, $A(t)$, $B(u)$ i $C(w)$. Tada je:

$$P_a\left(\frac{u+w}{2}\right), \quad P_b\left(\frac{t+w}{2}\right), \quad P_c\left(\frac{u+t}{2}\right) \quad \text{i} \quad T\left(\frac{t+u+w}{3}\right).$$

$|DA|=|0-t|=|t|$, $|DB|=|0-u|=|u|$, $|DC|=|0-w|=|w|$, $|DP_a|=\left|0-\frac{u+w}{2}\right|=\frac{1}{2}|u+w|$, na isti način je $|DP_b|=\frac{1}{2}|t+w|$, $|DP_c|=\frac{1}{2}|u+t|$, te $|DT|=\frac{1}{3}|t+u+w|$. Tada se naše tvrdnje svode na $(*)$ i teorem 1. (Provjerite!) ■

Napomena. Pozivamo čitatelje da pokušaju dokazati tvrdnju ovog teorema planimetrijski (ako je moguće).