Dvije kružnice i polukružnica

Rudi Mrazović

Neke tvrdnje u geometriji mogu se lako dokazati pomoću nekoliko jednostavnih poučaka. Ovdje je dano rješenje **3. zadatka s dodatnog natjecanja** na ovogodišnjem državnom natjecanju. Uživajte!

3. Dani su polukružnica sa središtem O i promjerom $\overline{AB}$, te pravac koji polukružnicu siječe u točkama C i D, a pravac AB u točki M (pri čemu je $|MB| < |MA|$ i $|MD| < |MC|$). Ako je K sjecište kružnica opisanih trokutima AOC i DOB, različito od O, dokažite da je $\angle MKO$ pravi kut.

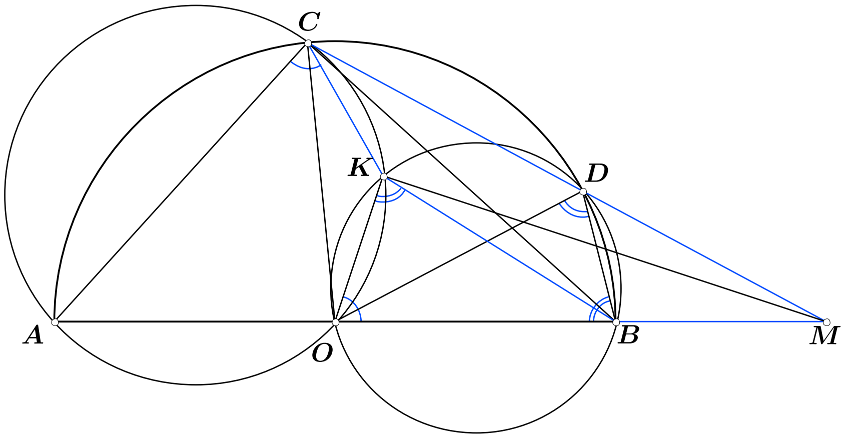
Uočimo da je $ABDC$ tetivni četverokut, pa u njemu vrijedi

$$\angle DCA = 180^\circ - \angle DBA.$$

Također je i $AOKC$ tetivni četverokut, pa vrijedi

$$\angle KCA = 180^\circ - \angle KOA = \angle KOB.$$

Trokut ODB je jednakokračan, pa vrijedi jednakost



Četverokut $MCKB$ je ***tetivan****!*

$$\angle DBO = \angle BDO.$$

Četverokut $OBDK$ je također tetivni, a u njemu je $\overline{OB}$ jedna od tetiva pa je

$$\angle BDO = \angle BKO.$$

Koristeći se ovim četirima jednakostima imamo:

$$\angle MCK = \angle DCK = \angle DCA - \angle KCA = 180^\circ - \angle DBA - \angle KCA = 180^\circ - \angle DBO - \angle KCA$$
$$= 180^\circ - \angle DBO - \angle KOB = 180^\circ - \angle BDO - \angle KOB = 180^\circ - \angle BKO - \angle KOB = \angle KBO.$$

Zato je

$$\angle MCK + \angle MBK = \angle MCK + 180^\circ - \angle KBO = \angle MCK + 180^\circ - \angle MCK = 180^\circ.$$

Ovime smo dokazali da je četverokut $BMCK$ tetivni. Zato je

$$\angle OMK = \angle BMK = \angle BCK.$$

Sada iz druge i posljednje jednakosti slijedi

$$\angle OMK + \angle MOK = \angle BMK + \angle KOB = \angle BCK + \angle KCA = \angle BCA = 90^\circ$$

jer je AB promjer kružnice. Zato vrijedi da je $\angle MOK = 90^\circ$, a to smo i trebali dokazati.