

# Catalanovi brojevi i putevi u cjelobrojnoj mreži

Ema Dogančić\*, Ivica Martinjak†

## Sažetak

Niz brojeva koji odgovaraju broju triangulacija konveksnih mnogokuta nazivamo niz Catalanovih brojeva. Ovi brojevi imaju i mnoštvo drugih kombinatornih interpretacija te se pojavljuju u više područja matematike. U radu dokazujemo osnovna svojstva i konvoluciju za Catalanov niz. Prikazujemo interpretacije koje nazivamo fundamentalnima zbog lake vidljivosti dotične konvolucije ili postojanja jednostavne korespondencije među tim interpretacijama. Posebno se bavimo enumeracijom značajnijih familija puteva u cjelobrojnoj mreži. Promatramo dvije familije Dyckovih puteva s uvjetom na korak  $(1, -1)$ . Na kraju, prikazujemo prekrasnu Nicholsovu bijekciju između Shapirovih i Whitworthovih puteva.

**Ključne riječi:** *Catalanovi brojevi, putevi u cjelobrojnoj mreži, Dyckovi putevi, Shapirovi putevi, Whitworthovi putevi, konvolucija*

## Catalan numbers and lattice paths

### Abstract

---

\*studentica, Prirodoslovno-matematički fakultet - Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, email: ema.doganacic@gmail.com

†Prirodoslovno-matematički fakultet - Fizički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, email: imartinjak@phy.hr

We define Catalan numbers as the sequence of numbers corresponding to the number of triangulations of a convex polygon. The Catalan numbers appear in various mathematical contexts and there are many other combinatorial interpretations of these numbers as well. In this overview firstly we present basic properties and the Catalan convolution. We describe fundamental interpretations, which are those for which the Catalan convolution can be easily seen or there is a simple correspondence with some of the other interpretations. We enumerate some notable families of lattice paths. In particular, we show two families of Dyck paths with constraint on the step  $(1, -1)$ . Finally, we present the beautiful Nichols' bijection between Shapiro and Whitworth paths.

**Keywords:** *Catalan numbers, lattice paths, Dyck paths, Shapiro paths, Whitworth paths, convolution*



Leonhard Euler (1707.–1783.), švicarski matematičar, fizičar i astronom



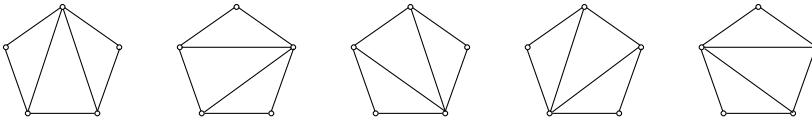
Eugene Charles Catalan (1814.–1894.), belgijski matematičar



Johann Andreas von Segner (1704.–1777.), njemački znanstvenik, fizičar i matematičar

## 1 Uvod

U širokom spektru izuzetnih problema kojima se bavio, Leonhard Euler je postavio i sljedeće pitanje: na koliko se načina konveksni mnogokut može podijeliti na trokute? Ukoliko se radi o trokutu, imamo trivijalan slučaj – jednu moguću podjelu. U slučaju četverokuta imamo dvije mogućnosti, a za peterokut imamo 5 različitih podjela, kao što prikazuje slika 1. Potpuni odgovor na ovo pitanje vodi do važnog i vrlo raširenog brojevnog niza čiji su članovi poznati pod nazivom Catalanovi brojevi, a ime su dobili po E. Catalanu koji je dao odgovor na pitanje koliko različitih postavljanja zagrada postoji u nizu od  $n + 1$  broja. Catalan je taj niz brojeva nazivao Segnerovi brojevi jer je upravo J. A. von Segner bio taj koji je dokazao rekurzivnu relaciju za Catalanove brojeve i time dao odgovor na gore postavljeno Eulerovo pitanje. Sada ćemo formalizirati ovo uvodno razmatranje i definirati Catalanove brojeve.



Slika 1: Triangulacija peterokuta.

Neka je  $n \in \mathbb{N}$  i  $\mathcal{P}_{n+2}$  konveksni mnogokut s  $n + 2$  stranice. Tada je *triangulacija* mnogokuta  $\mathcal{P}_{n+2}$  rastav na trokute kojima su nutrine disjunk-

ne, bez uvođenja novih vrhova. Dakle, potrebno je povući  $n - 1$  dijagonala koje se ne smiju sjeći. Jedna dijagonala dijeli ga na dva dijela, dvije na tri, i tako dalje. Definiramo  $n$ -ti Catalanov broj, u oznaci  $C_n$ , kao broj triangulacija konveksnog mnogokuta  $\mathcal{P}_{n+2}$ . Uz dogovor  $C_0 = 1$ , prvih nekoliko članova ovog niza su brojevi

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \dots$$

Catalanovi brojevi su jedan od najpoznatijih brojevni nizova. Pojavljuju se ne samo u kombinatorici, nego i u kontekstu teorije brojeva, algebre te drugih grana matematike. Poznato je mnogo kombinatornih interpretacija Catalanovih brojeva te se i dalje zapažaju nove interpretacije. U svojoj nedavno izdanoj knjizi *Catalan numbers*, poznati američki matematičar R. Stanley prikazuje čak 214 interpretacija ovih brojeva<sup>1</sup>. Vrijedi napomenuti da se među njima navode i rezultati nekih hrvatskih suvremenih matematičara, točnije Tomislava Došlića sa Sveučilišta u Zagrebu [7].

Za Catalanove brojeve vrijedi prekrasna *konvolucija* koju u ovom kontekstu zovemo fundamentalna rekurzija,

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}, \quad (1)$$

gdje je  $C_0 = 1$  i  $n \geq 0$ . Kako bismo dokazali relaciju (1), promotrimo skup svih triangulacija mnogokuta  $\mathcal{P}_{n+3}$ .

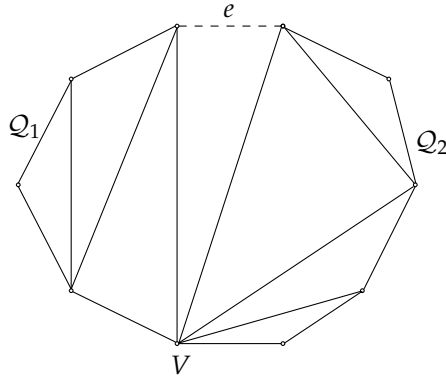
Neka je  $T$  bilo koja triangulacija mnogokuta  $\mathcal{P}_{n+3}$ . Nakon uklanjanja brida  $e$  mnogokuta  $\mathcal{P}_{n+3}$ , dobivamo dva triangulirana mnogokuta, nazovimo ih  $\mathcal{Q}_1$  i  $\mathcal{Q}_2$ . Mnogokuti  $\mathcal{Q}_1$  i  $\mathcal{Q}_2$  imaju točno jedan zajednički vrh  $V$ . Mnogokut  $\mathcal{Q}_i$  ima dva do najviše  $n + 2$  vrha. Rubni slučaj imamo kada trokut iz triangulacije  $T$  koji sadrži brid  $e$  ima njemu susjedni brid koji također pripada mnogokutu  $\mathcal{P}_{n+3}$ . Podsjetimo da u tom slučaju brid smatramo 2-terokutom koji ima  $C_0 = 1$  triangulacija. Dakle, ako  $\mathcal{Q}_i$  ima  $k + 2$  vrhova, može se triangulirati na  $C_k$  načina,  $0 \leq k \leq n$ .

Ako  $\mathcal{Q}_1$  ima  $k + 2$  vrhova, onda  $\mathcal{Q}_2$  ima  $n - k + 2$  vrhova. Prema tome, za dani  $k$  broj triangulacija iznosi  $C_k C_{n-k}$ . Naposljetku, sumiranjem po  $k$  za broj triangulacija od  $\mathcal{P}_{n+3}$  dobivamo

$$C_n C_0 + C_{n-1} C_1 + \dots + C_0 C_n,$$

čime je relacija (1) dokazana.

<sup>1</sup>Radi se o sveobuhvatnom djelu koje je nastalo na osnovi skripata u kojima je Stanley dugi niz godina prikupljao rezultate o Catalanovim brojevima. Knjiga sadrži i prilog s povijesnom građom o Catalanovim brojevima, kojeg je pripremio ruski matematičar Igor Pak.



Slika 2: Trokut s bridom  $e$ .

Fundamentalna rekurzija za Catalanove brojeve omogućuje nam izvesti zatvorenu formu za funkciju izvodnicu Catalanovih brojeva  $C(x)$  [10, 11],

$$C(x) = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + 42x^5 + 132x^6 + \dots .$$

Množenjem relacije (1) s  $x^n$  i sumiranjem po  $n$  dobivamo

$$\sum_{n \geq 0} C_{n+1} x^n = \sum_{n \geq 0} x^n \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}.$$

Lijeva strana prethodne jednakosti jednaka je

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} C_{n+1} x^n &= C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots \\ &= 1 + 2x + 5x^2 + \dots \\ &= \frac{C(x) - 1}{x}. \end{aligned}$$

Kako su koeficijenti uz  $x^n$  u  $C(x)^2$  jednaki upravo  $\sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}$ , na lijevoj strani dobivamo  $C(x)^2$ . Dakle, imamo

$$\frac{C(x) - 1}{x} = C(x)^2,$$

odnosno,

$$xC(x)^2 - C(x) + 1 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Preostaje još odrediti ispravan predznak. Prema binomnom teoremu imamo

$$\sqrt{1 - 4x} = (1 - 4x)^{\frac{1}{2}} = 1 - 2x + \dots.$$

Ako uzmemo pozitivni predznak u rješenju prethodne jednadžbe, dobivamo

$$C(x) = \frac{1 + (-2x + \dots)}{2x} = \frac{1}{2x} - 1 + \dots.$$

Vidimo da to nije točno, što znači da moramo uzeti negativni predznak. Time dobivamo traženu zatvorenu formu za  $C(x)$ , tj.

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}. \quad (2)$$

Nadalje, na osnovi relacije (2) možemo dokazati eksplicitnu formulu za Catalanove brojeve

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \quad (3)$$

Taj dokaz, kao i još neki mogu se vidjeti u [22]. Osim toga, prije relacije (3) mogli smo uočiti da Catalanovi brojevi jako brzo rastu, što upućuje na vezu s binomnim koeficijentima. Catalanov  $n$ -ti broj također je jednak razlici centralnog binomnog koeficijenta i njemu susjednog elementa u Pascalovom trokutu, odnosno

$$C_n = \binom{2n+1}{n} - \binom{2n+1}{n-1},$$

što se lako vidi (za parne i neparne retke u Pascalovom trokutu).

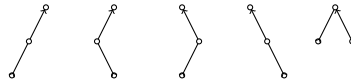
## 2 Fundamentalne kombinatorne interpretacije

Među mnogobrojnim kombinatornim interpretacijama Catalanovih brojeva, posebno se izdvajaju one kod kojih je fundamentalna rekurzija lako vidljiva ili pak postoji jednostavna korespondencija s nekom drugom od tih interpretacija. Nazivamo ih fundamentalnim interpretacijama. Obično se među te interpretacije ubrajaju one koje navodimo u definiciji 2.1 a to su *binarno stablo*, *planarno stablo*, *izborni niz* i *Dyckov put*.

**Definicija 2.1.** Neka je  $n \in \mathbb{N}_0$ . Definiramo binarno stablo, planarno stablo, izborni niz i Dyckov put, kako slijedi:

- Binarno stablo definiramo rekurzivno na način: *i)* prazan skup je binarno stablo, *ii)* binarno stablo ima vrh koji nazivamo korijen te dva podstabla, koja su oba binarna stabla.
- Planarno stablo također definiramo rekurzivno: *i)* postoji istaknuti vrh kojeg nazivamo *korijen*, *ii)* planarno stablo se sastoji samo od korijena ili od podstabala koja su također planarna.
- Izborni niz duljine  $2n$  je niz od  $n$  jedinica i  $n$  negativnih jedinica tako da je svaka parcijalna suma nenegativna.
- Dyckov put duljine  $2n$  je mrežni put u  $\mathbb{Z}^2$  od  $(0, 0)$  do  $(2n, 0)$  s koracima  $(1, 1)$  i  $(1, -1)$  s dodatnim uvjetom da put nikad ne padne ispod  $x$ -osi.

Slijedi nekoliko napomena o prethodno definiranim pojmovima. U binarnim stablima, čvor lijevog podstabla, ako nije prazno, nazivamo lijevo dijete, a čvor desnog podstabla, ako nije prazno, nazivamo desno dijete. Primjerice, postoje dva binarna stabla s dva vrha (lijevo dijete i desno dijete). Slika 3 prikazuje binarna stabla s tri vrha.



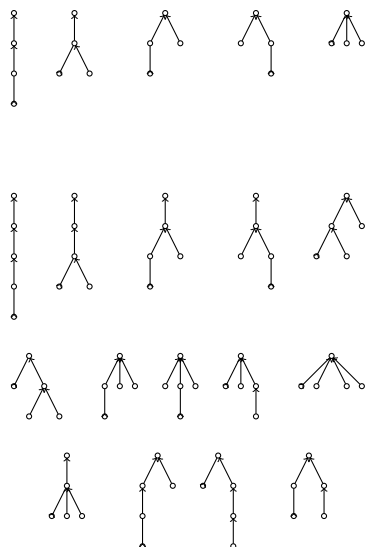
Slika 3: Binarna stabla s tri vrha.

Za razliku od binarnog stabla, planarno stablo ne može biti prazan skup jer sadrži barem jedan vrh - korijen. Slika 4 prikazuje svih pet planarnih stabala s četiri vrha i svih četrnaest takvih stabala s pet vrhova.

U zapisu izbornog niza, broj  $-1$  zapisujemo skraćeno kao  $-$ . Primjerice, postoji pet izbornih nizova duljine šest, i to su

$$111 - - -, 11 - 1 - -, 11 - -1 -, 1 - 11 - -, 1 - 1 - 1 - .$$

Lako se uvjerimo da je svaka parcijalna suma kod ovih nizova nenegativna. Čitatelj za vježbu može sada ispisati sve izborne nizove duljine osam (bit će četrnaest takvih nizova). Izborni nizovi imaju lijepu statističku interpretaciju, o čemu možemo više pronaći u [9].



Slika 4: Planarna stabla s četiri i pet vrhova.

Slika 5 prikazuje Dyckove puteve za  $n = 3$ . Primijetimo jednakobrojnost tih puteva s binarnim stablima s tri vrha te izbornim nizovima duljine šest. Te jednakosti vrijede i općenito, o čemu nam govori sljedeći teorem.

**Teorem 2.1.** [27, Theorem 1.5.1] Catalanov broj  $C_n$  jednak je:

- (i) broju binarnih stabala s  $n$  vrhova,
- (ii) broju planarnih stabala s  $n + 1$  vrhom,
- (iii) broju izbornih nizova duljine  $2n$ ,
- (iv) broju Dyckovih puteva od  $(0, 0)$  do  $(2n, 0)$ .

*Dokaz.* Navest ćemo dokaz tvrdnje (i), a za preostale tvrdnje pogledati [22]. Označimo s  $B_n$  broj binarnih stabala s  $n$  vrhova. Želimo pokazati da je  $B_n = C_n$  za svaki  $n \geq 0$ . Dokaz provodimo indukcijom.

Ako je  $n = 0$ , onda binarno stablo ne sadrži niti jedan vrh a za to imamo samo jednu mogućnost - prazno stablo. Dakle, vrijedi  $B_0 = 1 = C_0$ . Za  $n = 1$  ponovno imamo samo jednu mogućnost, taj vrh čini korijen stabla, tj.

$B_1 = 1 = C_1$ . Također za  $n = 2$  postoje točno dva binarna stabla - jedan vrh čini korijen stabla, a drugi je ili lijevo ili desno dijete. Slijedi  $B_2 = 2 = C_2$ .

Korak indukcije ide ovako. Primijetimo da od svakog binarnog stabla s barem jednim vrhom dobivamo dva binarna stabla - lijevo i desno podstablo (od kojih neko može biti i prazno) kojima je zbroj broja vrhova za jedan manji od broja vrhova početnog stabla. Neka je ukupan broj vrhova početnog stabla jednak  $n + 1$ . Eliminacijom korijena stabla ostaje  $n$  vrhova, od kojih se  $k$  nalazi u lijevom, a  $n - k$  u desnom podstablu, gdje je  $0 \leq k \leq n$ . Broj binarnih stabala s  $k$  vrhova jednak je  $B_k$ , a s  $n - k$  vrhova  $B_{n-k}$ . Kako su  $k, n - k \leq n < n + 1$  po pretpostavci indukcije vrijedi  $B_k = C_k$ , i  $B_{n-k} = C_{n-k}$ . Dakle, vrijedi

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \sum_{k=0}^n B_k B_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} \\ &= C_{n+1}, \end{aligned}$$

tj. za svaki  $n \geq 0$  je  $B_n = C_n$ . □

Kako smo već i rekli, postoje jednostavne korespondencije među interpretacijama (i) – (iv) u teoremu 2.1, na koje čitatelja upućujemo na [22] kao i na predavanje N. Wildbergera pod nazivom *Euler's triangulation of a polygon (lecture 8)* iz serije *Famous Math Problems*, iz 2013 (predavanje se može naći na stranici <https://www.youtube.com/watch?v=VqJLED3KT4E>). Sada iz prethodnog teorema odmah slijedi:

**Propozicija 2.1.** [27, Theorem 1.5.1] Broj Dyckovih puteva duljine  $2n$  jednak je broju izbornih nizova duljine  $2n$ .

**Propozicija 2.2.** [27, Theorem 1.5.1] Broj planarnih stabala s  $n + 1$  vrhom jednak je broju izbornih nizova duljine  $2n$ .



Slika 5: Standardni Dyckovi putevi duljine šest.



**Primjer 1.** Na slici 5 vidimo da Dyckovih puteva duljine šest ima pet. Pogledajmo sada koliko ima izbornih nizova duljine šest. Zbog uvjeta da je svaka parcijalna suma nenegativna, svaki niz mora početi jedinicom. Dobijemo sljedeće nizove:

$$111 - - -, 11 - 1 - -, 11 - - 1 -, 1 - 11 - -, 1 - 1 - 1 - .$$

Vidimo da ih također ima pet i odmah vidimo analogiju između Dyckovih puteva i izbornih nizova duljine  $2n$ . Svaki korak  $(1, 1)$  u Dyckovom putu predstavljen je jedinicom u izbornom nizu, dok je svaki korak  $(1, -1)$  predstavljen minusom.

**Primjer 2.** Pogledajmo sada sliku 4. Na prvom dijelu slike vidimo da je broj planarnih stabala s četiri vrha jednak pet. Prema propoziciji 2.2 to znači da je  $n + 1 = 4$ , odnosno  $n = 3$  i broj izbornih nizova duljine  $2n = 6$  je upravo pet, što smo već vidjeli u prošlom primjeru. I u ovom slučaju imamo lijepu analogiju. Naime, gledajući svako od ovih planarnih stabala uočavamo da ako krenemo od korijena, prema dolje tako da idemo vanjskom stranom najljevijeg brida do lista i svaki put kad se spustimo za jedan korak, odnosno obiđemo jedan brid s vanjske strane prema dolje, pišemo jedan, a zatim kada dođemo do lista i obiđemo ga s obje strane i nastavimo se kretati drugom stranom bridova prema gore te za svaki korak prema gore pišemo minus, dobivamo točno izborne nizove napisane u prošlom primjeru. Na primjer, za prvo planarno stablo sa slike 4 krećemo od korijena po najljevišem bridu i prolazimo tri brida vanjskom stranom prema dolje što znači da pišemo tri jedinice, zatim dođemo do lista, obiđemo ga i vraćamo se gore po bridovima. Ponovno imamo tri brida, ali sada se krećemo prema gore i zbog toga pišemo tri minusa. Jednako postupamo za ostala planarna stabla.

Za drugo planarno stablo obilazimo prvo dva brida krećući se prema dolje zbog čega pišemo dvije jedinice, zatim obilazimo najljeviži list i počinjemo kretanje prema gore, obilazimo jedan brid i upisujemo minus. Tada se ponovno počinjemo kretati prema dolje obilazeći samo jedan brid, što znači da pišemo samo jednu jedinicu, u tom trenutku obilazimo sljedeći list i krećemo se prema gore. Prolazimo dva brida prema gore i pišemo još dva minusa. Na kraju, kad sve spojimo, dobivamo niz

$$11 - 1 - - .$$

Istim postupkom iz ostalih planarnih stabala dobivamo ostale izborne nizove napisane u prošlom primjeru.

### 3 Putevi u cjelobrojnoj mreži

Navedimo sada jedan od najstarijih i najpoznatijih primjera koji se vežu uz Catalanove brojeve. To je problem puteva u cjelobrojnoj mreži.

Neka je  $S$  podskup od  $\mathbb{Z}^2$ . Za niz  $L = v_0, v_1, \dots, v_k, v_i \in \mathbb{Z}^2$  kažemo da je *mrežni put* u  $\mathbb{Z}^2$  duljine  $k$ , s koracima u skupu  $S \subseteq \mathbb{Z}^2$ , ako vrijedi  $v_i - v_{i-1} \in S, 1 \leq i \leq k$ . Kažemo da  $L$  počinje u  $v_0$ , a završava u  $v_k$  ili da ide od  $v_0$  do  $v_k$ .

Dobro je poznato da je broj puteva ispod dijagonale s koracima  $(1, 0)$  i  $(0, 1)$  od ishodišta do točke  $(n, n)$  koji diraju, ali ne sijeku dijagonalu jednak  $n$ -tom Catalanovom broju. Takvi se putevi ponekad nazivaju *Whitworthovi putevi*. Pokažimo da oni zadovoljavaju fundamentalnu rekurziju Catalanovih brojeva. Označimo s  $D(n)$  broj Whitworthovih puteva. Puteve od  $(0, 0)$  do  $(n, n)$  koji ne prelaze dijagonalu možemo podijeliti u  $n$  disjunktih skupova:

$A_k = \{\text{putevi ispod dijagonale koji prvi put dijagonalu dodiruju u } (k, k)\}, 1 \leq k \leq n.$

$\text{Card}(A_k) = \text{broj takvih puteva.}$

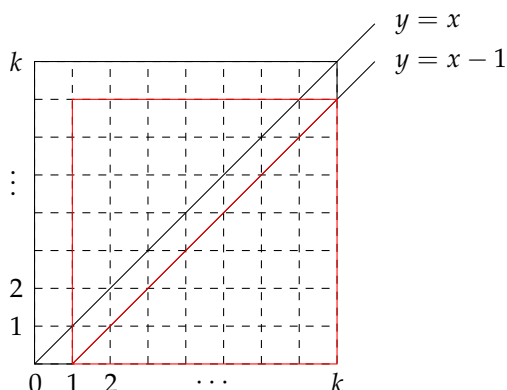
Kako su skupovi  $A_1, \dots, A_n$  međusobno disjunktni, slijedi

$$D(n) = \sum_{k=1}^n \text{Card}(A_k).$$

Odredimo sada  $\text{Card}(A_k)$ . S obzirom da svi putevi u  $A_k$  prvi put dodiruju dijagonalu u točki  $(k, k)$ , do te točke su putevi strogo ispod dijagonale  $y = x$ . Također, putevi od točke  $(k, k)$  do  $(n, n)$  nemaju nikakvih dodatnih ograničenja. Dakle, to su Whitworthovi putevi od  $(k, k)$  do  $(n, n)$ , odnosno putevi duljine  $n - k$ , pa takvih ima  $D_{n-k}$  (vidi se lako translacijom kvadrata određenog točkama  $(k, k)$  i  $(n, n)$  u ishodište). Slijedi da je  $\text{Card}(A_k) = (\text{broj puteva od } (0, 0) \text{ do } (k, k) \text{ koji se nalaze strogo ispod dijagonale}) \cdot D_{n-k}$ .

Kako bismo odredili broj puteva od  $(0, 0)$  do  $(k, k)$  koji se nalaze strogo ispod dijagonale, promotrimo kvadrat određen točkama  $(0, 0)$  i  $(k, k)$  te pravac  $y = x - 1$  (slika 6). Znamo da prvi korak nužno mora biti  $(1, 0)$ , a zadnji  $(0, 1)$  jer u suprotnom odmah diramo dijagonalu. Primijetimo na slici da sada promatramo puteve u kvadratu određenom s  $(1, 0)$  i  $(k, k - 1)$  koji smiju dodirivati dijagonalu  $y = x - 1$ , a ne smiju prijeći preko te dijagonale jer bi inače dodirivali dijagonalu  $y = x$ . Translacijom tog kvadrata u ishodište, dobivamo kvadrat određen ishodištem i točkom  $(k - 1, k - 1)$ , pa takvih puteva ima  $D_{k-1}$ . Stoga slijedi

$$\text{Card}(A_k) = D_{k-1} \cdot D_{n-k},$$



Slika 6: Cjelobrojna mreža  $k \times k$ .

gdje je  $1 \leq k \leq n - 1$ .

Za  $A_n$  imamo da putevi dodiruju samo dvije točke na dijagonali, ishodište i krajnju točku  $(n, n)$ . Tada znamo da prvi korak mora biti  $(1, 0)$  te zadnji  $(0, 1)$ , odmah slijedi da je  $\text{Card}(A_n) = D_{n-1}$  (kao i u prošlom dijelu, gledamo paralelnu dijagonalu i translaticiramo kvadrat u ishodište). Uz dogovor  $D_0 = D_1 = 1$ , uvrštavanjem dobivenih izraza slijedi

$$D_n = \sum_{k=1}^n \text{Card}(A_k) = \sum_{k=1}^n D_{k-1} \cdot D_{n-k}.$$

Osim što je  $n$ -ti Catalanov broj jednak broju standardnih Dyckovih puteva duljine  $2n$ , postoje i druge familije ovakvih puteva u cjelobrojnoj mreži koje prebrojava Catalanov niz. Razmotrimo neke od najzanimljivijih takvih puteva u cjelobrojnoj mreži.

**Definicija 3.1.** Uvodimo oznaku  $G$  (gore) za korak  $(1, 1)$  te  $D$  (dolje) za korak  $(1, -1)$ . Sada pomoću tih oznaka, Dyckov put interpretiramo kao niz sastavljen od znakova  $G$  i  $D$ . Ako iza koraka gore, slijedi korak dolje, tj. ako u nizu imamo  $GD$ , kažemo da je to *vrh* u Dyckovom putu. Obratno, ako iz koraka dolje, slijedi korak gore, imamo  $DG$ , kažemo da je to *dolina* u Dyckovom putu. Ako u nizu imamo podniz

$$\underbrace{DD \dots D}_k$$

kažemo da je to *padina* duljine  $k$ .

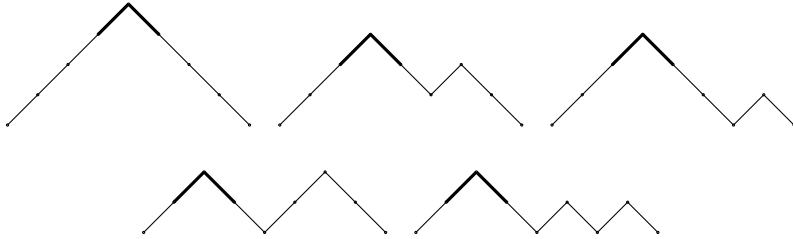
**Propozicija 3.1.** [27, *bijective exercises 29*] Broj Dyckovih puteva duljine  $2n + 2$  takvih da je prva padina duljine najmanje dva, jednak je  $n$ -tom Catalanovom broju.

**Primjer 3.** Pogledajmo sliku 7. Kako Dyckovi putevi moraju imati prvu padinu duljine najmanje dva, vidimo da su ovo sve takve kombinacije u slučaju duljine puta osam. Po propoziciji 3.1, uz  $2n + 2 = 8$ , odnosno  $n = 3$ , broj Dyckovih puteva duljine osam trebao bi biti jednak trećem Catalanovom broju, što je upravo broj pet.

**Propozicija 3.2.** [27, *bijective exercises 32*] Broj Dyckovih puteva duljine  $4n$  takvih da svaka padina ima duljinu dva, jednak je  $n$ -tom Catalanovom broju.

**Primjer 4.** Na slici 8 vidimo pet različitih Dyckovih puteva duljine 12 na kojima je svaka padina duljine dva. Vidimo da možemo primijeniti propoziciju 3.2, iz čega slijedi da je  $n = 3$  te da Dyckovih puteva duljine 12 na kojima je svaka padina duljine dva ima točno  $C_3 = 5$ , što je točno.

Slika 8 prikazuje Dyckove puteve s padinama duljine dva, s naglašenim dolinama te početnim i krajnjim korakom.

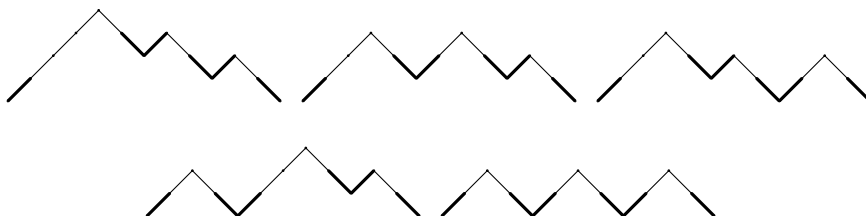


Slika 7: Dyckovi putevi s prvom padinom duljine barem dva.

Od posebnog su interesa Dyckovi putevi s uvjetom da nemaju vrhova na visini  $k$ ,  $k \geq 1$ . Poznato je da u slučaju  $k = 1$  broj takvih puteva duljine  $2n$  odgovara  $n$ -tom *Fineovom* broju<sup>2</sup>, dok u slučaju  $k = 2$  imamo sljedeći teorem:

**Teorem 3.1.** [24, *Theorem 3*] Broj Dyckovih puteva duljine  $2n + 2$  bez vrhova na visini dva jednak je  $n$ -tom Catalanovom broju.

<sup>2</sup>Više o Fineovim brojevima možete pogledati u [6].



Slika 8: Dječki putevi u kojima je svaka padina duljine dva.

*Dokaz.* Za dva skupa  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{B}$  kažemo da su *jednakobrojni* ako postoji bijekcija  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ . Neka je  $\mathcal{P}$  skup standardnih Dječkih puteva duljine  $2n$ , a  $\mathcal{W}$  skup Dječkih puteva duljine  $2n + 2$  bez vrhova na visini dva. Uspostavimo bijekciju  $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{W}$  na sljedeći način (slika 9).

- (i) Dodajemo put  $GD$  na početak puta  $p \in \mathcal{P}$  i tako formiramo Dječkov put  $p'$ .
- (ii) Neka je  $s$  dio puta  $p'$  definiran koracima

$$\underbrace{GG \dots G}_q \underbrace{DD \dots D}_q$$

gdje je  $q > 1$ . Svakom potputu  $s$  od  $p'$  na početak dodajemo  $G$ , a na kraj  $D$  i time dobivamo put  $\tilde{p}$ .

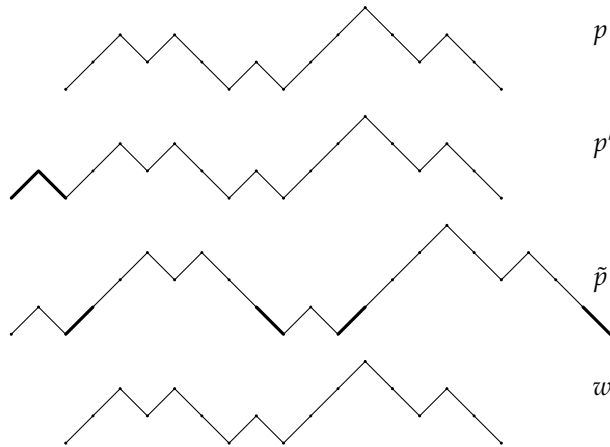
- (iii) Brišemo iz  $\tilde{p}$  svaki put  $GD$  koji se nalazi lijevo do  $s$  i time dobivamo jedinstveni put  $w \in \mathcal{W}$  duljine  $2n + 2$ .

Elemente skupa  $\mathcal{W}$  preslikavamo u skup  $\mathcal{P}$  na sljedeći način.

- (i) Za svaki potput  $s$  od  $w$  umetnemo  $GD$  lijevo od  $s$  i time dobivamo put  $\tilde{p}$ .
- (ii) Svakom potputu  $s$  od  $w$  obrišemo prvi i zadnji korak i time dobivamo put  $p'$ .
- (iii) Putu  $p'$  obrišemo najljeviji Dječkov put duljine dva, ako takav postoji.

Kako su oba opisana preslikavanja injektivna i skupovi  $\mathcal{P}$  i  $\mathcal{W}$  konačni slijedi da je  $\phi$  bijekcija.  $\square$

Pozivamo čitatelja da za vježbu, primjenom ove bijekcije, nacrtaju Dječke puteve s danim uvjetom na vrhove, za slučaj  $n = 3$ .



Slika 9: Jednakobrojnost Dyckovih puteva bez vrhova na visini dva i standardnih Dyckovih puteva.

## 4 Shapirovi putevi i Nicholsova bijekcija

Pokazuje se da je broj puteva od  $(0, 0)$  do  $(2n, 2n)$  koji se nalaze ispod dijagonale jednak broju puteva koji ne prolaze točkama koje imaju obje koordinate jednake i neparne [19], dakle, točkama oblika

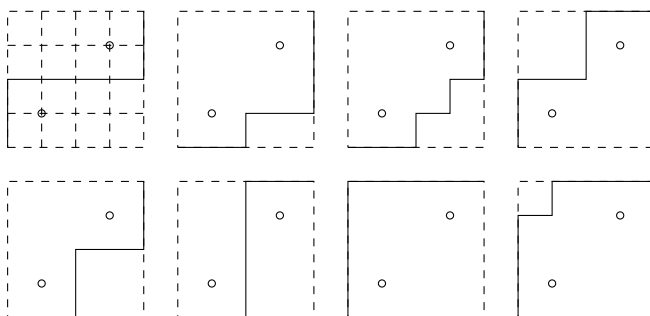
$$(2i - 1, 2i - 1), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Puteve s ovim uvjetom nazivamo *Shapirovim putevima*. Slika 10 prikazuje neke Shapirove puteve za  $n = 4$ . Čitatelj se može sam uvjeriti da za ovu veličinu mreže imamo ukupno četrnaest Shapirovih puteva - jednako kao i Whitworthovih. Takva jednakost vrijedi za svaki parni prirodni broj, što iskazujemo sljedećim teoremom.

**Teorem 4.1.** [26, E2903] Broj puteva na rešetki od  $(0, 0)$  do  $(2n, 2n)$  s koracima  $(1, 0)$  i  $(0, 1)$  koje ne prolaze točkama  $(2i - 1, 2i - 1)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , jednak je  $2n$ -tom Catalanovom broju.

Ovaj je teorem dokazao L. W. Shapiro 1981. godine [19, 21]. Možemo ga kraće iskazati ovako:

za paran broj  $n$ , broj Whitworthovih puteva jednak je broju Shapirovih puteva.



Slika 10: Neki Shapirovi putevi za  $n = 4$ .

U nastavku prikazujemo Nicholsovu bijekciju, koja je ključna u dokazu teorema 4.1.

Uvodimo oznake  $E$  i  $N$  za korake  $(1, 0)$  i  $(0, 1)$ , redom. Primijetimo da dani put iz skupa Whitworthovih i Shapirovih puteva možemo podijeliti na niz puteva kojima su početak i kraj na dijagonali. Neka  $d$  označava put čiji su početak i kraj na dijagonali a ostatak ispod dijagonale. Put dobiven od  $d$  zamjenom koraka  $E$  u  $N$  i  $N$  u  $E$  označimo s  $d'$ . Sada definiramo preslikavanje  $\psi$  sa skupa Shapirovih u Whitworthove puteve, i to rekursivno,

$$\psi(\emptyset) = \emptyset, \quad (4)$$

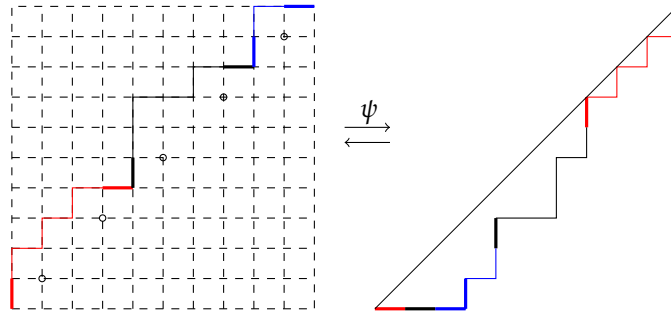
$$\psi(dX) = d\psi(x), \quad (5)$$

$$\psi(d'x) = E\psi(x)Nd^*, \quad (6)$$

gdje je  $d$  prvi dio promatranog puta koji ima krajeve na dijagonali a  $x$  je ostatak tog puta;  $d^*$  je put dobiven iz  $d$  uklanjanjem prvog koraka  $E$  i zadnjeg koraka  $N$ . Dakle, na put  $d$  funkcija  $\psi$  djeluje kao identiteta, dok u slučaju puta  $d'$  između koraka  $E$  i  $N$  dolazi slika puta  $x$  te „skraćeni“ put  $d$  dolazi u nastavku puta  $E\psi(x)N$ . Primjerice, na slici 11, u prvoj iteraciji imamo  $d = NNENENEE$ ,  $x = NNNEENEENEE$ , što rezultira putem  $E$  na poziciji  $(0, 0)$  i putem  $NENENEN$  koji počinje u točki  $(7, 6)$ .

Lagana vježba za čitatelja je crtanje pripadnih Whitworthovih puteva za slučaj  $n = 4$  (slika 10), primjenom funkcije  $\psi$ .

Parnost puta definiramo brojem koraka  $(1, 0)$  koji ga čine. Primijetimo da su Shapirovi putevi  $d$  i  $d'$  uvijek parni. Definiramo sada funkciju  $\phi$  re-



Slika 11: Primjer preslikavanja Shapirovog u Whitworthov put.

kurzivno, na način

$$\begin{aligned}\phi(\emptyset) &= \emptyset, \\ \phi(dx) &= d\phi(x), \text{ ako je } d \text{ paran,} \\ \phi(dx) &= Nx'E\phi(d^*), \text{ ako je } d \text{ neparan,}\end{aligned}$$

i tvrdimo da su  $\psi$  i  $\phi$  inverzne jedna drugoj.

Kao prvo, očito je

$$\phi(\psi(\emptyset)) = \emptyset.$$

Nadalje vrijedi

$$\phi(\psi(dx)) = \phi(d\psi(x)) = d\phi(\psi(x)) = \dots = dx,$$

budući da je u svakom slučaju  $\psi(x)$  paran put, to pa će  $\phi$  djelovati na isti način. Za treću mogućnost imamo

$$\phi(\psi(d'x)) = \phi(E\psi(x)Nd^*).$$

Kako je  $E\psi(x)N$  neparan vrijedi

$$\begin{aligned}\phi(\psi(d'x)) &= N(d^*)E\phi((E\psi(x)N)^*) \\ &= d'\phi(\psi(x)) = \dots = d'x.\end{aligned}$$

Ovime smo pokazali da je kompozicija  $\phi \circ \psi$  identiteta. Sličnim razmatranjem vidi se i da je  $\psi \circ \phi$  identiteta, čime je teorem dokazan.



## 5 Zaključni komentari

Osim podjele konveksnog mnogokuta na trokute, možemo razmatrati i podjelu na četverokute, peterokute odnosno na bilo kakve mnogokute s manjim ili jednakim brojem stranica. Brojevni nizovi koji određuju broj takvih podjela mnogokuta s  $n$  stranica na mnogokut s  $k$  stranica nazivaju se *Fuss-Catalanovi brojevi* [12]. U drugu ruku, možemo promatrati i profinjenja Catalanovih brojeva. Odgovor na pitanje koliko je Dyckovih puteva duljine  $2n$  s  $k$  vrhova daje nam *Narayanin* broj indeksiran parom  $(n, k)$ . Nadalje, ako vrhove u Dyckovom putu razlikujemo, onda njihov broj odgovara određenom *Lahovom broju*. Točnije, broj Dyckovih staza duljine  $2n$  s  $n + 1 - k$  vrhova označenih s  $1, 2, \dots, n + 1 - k$  jednak je Lahovom broju indeksiranom s  $(n, k)$ . Poznate su i druge kombinatorne interpretacije kako za Narayanine [22] tako i za Lahove brojeve [17].

U ovom radu razmatrali smo fundamentalne kombinatorne interpretacije Catalanovih brojeva te posebno nekoliko tipova Dyckovih puteva. Na kraju smo prikazali Nicholsovü bijekciju između Shapirovih i Whitworthovih puteva. Catalanovi brojevi imaju i brojna druga zanimljiva svojstva te su predmetom istraživanja suvremenih matematičara [2, 5, 8, 16]. Između ostalih, C. Krattenthaler je dokazao eksplicitne formule za determinante koje sadrže brojeve iz Catalanove familije [14]. Iz nedavnog rada R. Johanssona i S. Linussona proizlazi da Catalanovi brojevi korespondiraju s brojem kvadratnih matrica reda  $n$  koje pripadaju jednoj familiji *matrica s alternirajućim znakom* [13]. Poopćenjima Catalanovih brojeva pomoću  $q$ -redova bavio se G. Andrews [1].

Prebrojavanje određenih mrežnih puteva (tj. pronalazak eksplicitne formule za njihov broj) bogato je područje koje nije vezano samo za Catalanove brojeve nego i druge srodne nizove. Dio motivacije za izučavanje mrežnih puteva dolazi i iz fizike. Zainteresiranog čitatelja upućujemo na nedavni pregledni rad C. Krattenthalera [15]. Enumerativne i druge rezultate o broju puteva na *zarezanoj ravnini* (*engl. slit plane*) pronašli su M. Bousquet Mérou, G. Schaeffer, P. Nadeau i drugi [3, 4, 18].

## Literatura

- [1] G.E. Andrews, Catalan numbers,  $q$ -Catalan numbers and hypergeometric series, *J. Comb. Theory, Series A*, 44(2)(1987), 267–273.
- [2] Arkady Berenstein, Vladimir Retakh, Christophe Reutenauer, and Doron Zeilberger, The Reciprocal of  $1+ab+aabb+aaabbb+\dots$  for NON-COMMUTING  $a$  and  $b$ , Catalan numbers and non commutative qu-

adratic equations, “Noncommutative Birational Geometry, Representations, and Cluster Algebras” (A. Berenstein and V. Retakh, eds.), *Contemporary Mathematics*, volume 592, 2013, Amer. Math. Soc.

- [3] E. Barcucci, E. Pergola, R. Pinzani, S. Rinaldi, A Bijection for Some Paths on the Slit Plane, *Advances in Applied Mathematics* 26(2001), 89-96.
- [4] M. Bousquet-Mélou, G. Schaeffer, Walks on the slit plane, *Probab. Theory and Related Fields* 124/3(2002), 305–344.
- [5] Y. Chen, W. Jiang, Catalan numbers modulo a prime power, *INTEGERS* 13(2013), A 36.
- [6] E. Deutsch, L. Shapiro, A survey of the Fine numbers, *Discrete Mathematics* 241(2001), 241–265 .
- [7] T. Došlić, Perfect matching in lattice animals and lattice paths with constraints, *Croat. Chem. Acta*, 78 (2) (2005), 251–259.
- [8] N. Elezović, Asymptotic Expansions of Central Binomial Coefficients and Catalan Numbers, *Journal of Integer Sequences*, Vol. 17(2014), Article 14.2.1.
- [9] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Wiley, 1968.
- [10] D. Fuchs, S. Tabachnikov, *Mathematical Omnibus*, AMS, 2007.
- [11] T. Gowers, *The Princeton Companion to Mathematics*, Princeton University Press, Princeton 2008.
- [12] P. Hilton, J. Pedersen, Catalan Numbers, Their Generalization and Their Uses, *Mathematical Intelligencer*, 13 (2) (1991), 64–75.
- [13] R. Johansson, S. Linusson, Pattern avoidance in alternating sign matrices, *Ann. of Combinatorics* 11(2007), 471–480.
- [14] C. Krattenthaler, Determinants of (generalised) Catalan numbers, *J. Statist. Plann. Inference* 140(2010), 2260–2270.
- [15] C. Krattenthaler, Lattice Path Enumeration, *Handbook of Enumerative Combinatorics*, M. Bóna (ed.), Discrete Math. and Its Appl., CRC Press, Boca Raton-London-New York 2015.
- [16] T. Lengyel, On divisibility properties of some differences of the central binomial coefficients and Catalan numbers, *INTEGERS* 13(2013), A 10.

- [17] I. Martinjak, R. Škrekovski, Lah Numbers and Lindström's lemma, *Comptes Rendus Mathématique*, 356 (1) (2018), 5–7.
- [18] P. Nadeau, A general bijection for a class of walks on the slit plane, *FPSAC*, (2006).
- [19] W. Nichols, E3096, *The American Mathematical Monthly* 94, no. 5(1987), 465–466.
- [20] P. Peart and W.J. Woan, Dyck Paths With No Peaks At Height  $k$ , *Journal of Integer Sequences*, Vol. 4(2001), Article 01.1.3.
- [21] L. Shapiro, Elementary Problems: E2902-E2907, *The American Mathematical Monthly* 88, no. 8(1981), 619–620.
- [22] R. Stanley, *Catalan numbers*, Cambridge University Press, Cambridge 2015.