math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

Vizualni i kratki dokazi - prilog kreativnoj nastavi matematike (2.dio)

Cauchy-Schwarz-Bunjakovski nejednakost Eulerov graf Eulerova nejednakost fraktali Morleyev teorem o trisekciji kutova nastava matematike vizualni dokazi

Darko Veljan,
redoviti profesor u miru
Ivana Marušić,
Veleučilište u Bjelovaru

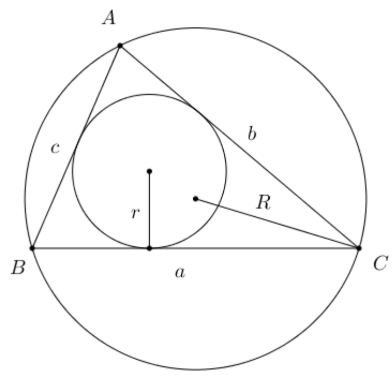
Uvod

Za podučavanje matematike potrebna je kreativnost, maštovitost, odlučnost, upornost, dosljednost i marljivost. Istim riječima možemo opisati i vizualne dokaze koji su posebno dragi učenicima, studentima, nastavnicima i svima onima koji vole matematiku. Koristeći stara znanja dolazimo do novih ideja i u ovom članku prikazat ćemo neke od vizualnih kratkih i elegantnijih dokaza. Ovaj članak, kao i prethodni, posvećujemo našim dragim prijateljima, učiteljma, profesorima Borisu Pavkoviću ($1931.-2006.$) i akademiku Sibi Mardešiću ($1927.-2016.$).

1 Eulerova nejednakost

Eulerova nejednakost koja datira iz $1765.$ godine glasi: opisana kružnica trokuta je barem dvostruko duža od upisane kružnice, odnosno

$$R \geq 2r. \tag{1}$$



Slika 1: Upisana i opisana kružnica trokutu ABC

Površina trokuta

$$P = \frac{abc}{4R} = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \tag{2}$$

pri čemu je $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

$$R \geq 2r \quad \Leftrightarrow \quad abc \geq 8\underbrace{(s-a)}_{=x}\underbrace{(s-b)}_{=y}\underbrace{(s-c)}_{=z} \quad \Leftrightarrow \quad (x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz. \tag{3}$$

Primjenom aritmetičko-geometrijske nejednakosti

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \tag{4}$$

i dvije slične dobivamo zadnju nejednakost. Jednakost u Eulerovoj nejednakosti postiže se ako i samo ako je trokut jednakostraničan.. Napomenimo usput da A-G nejednakost za tri varijable daje

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \left(\frac{s}{3}\right)^3. \tag{5}$$

Stoga za površinu trokuta imamo

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{s^2}{3\sqrt{3}}. \tag{6}$$

To je izoperimetrijska nejednakost za trokut s jednakošću ako i samo ako je trokut jednakostraničan. Koristeći A-G nejednakosti, Eulerova nejednakost ima i hiperboličku verziju (za trokute kojima se može opisati kružnica) koja glasi

$$\tanh(R) \geq 2\tanh(r) \tag{7}$$

i slično za sfernu geometriju (v.[8]). Za n-dimenzionalni euklidski simpleks Eulerova nejednakost je

$$R \geq nr. \tag{8}$$

Dokaz je neočekivano jednostavan; provodimo ga u dimenziji $n = 3$ (iako doslovce isti dokaz ide u svim dimenzijama). Neka je $\Delta = \Delta(v_0, v_1, v_2, v_3)$ tetraedar i $R = R(\Delta)$ radijus opisane mu kugle. Neka je c_i težište (tj. radijvektor centroida) strane tetraedra nasuprot vrha (radijvektora) v_i. Tada je (kao vektor)

$$c_0 = \frac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3), \tag{9}$$

itd. Sada je lako provjeriti da su Δ i $\Delta(c_0, c_1, c_2, c_3)$ slični tetraedri s koeficijentom sličnosti 3, pa je udaljenost

$$d(c_i, c_j) = \frac{1}{3}d(v_i, v_j), \tag{10}$$

za sve i, j. Iz ove sličnosti slijedi

$$R = R(\Delta) = 3R(\Delta(c_0, c_1, c_2, c_3)). \tag{11}$$

Kugla kojoj je radijus manji od upisane kugle ne može sjeći sve strane tetraedra, pa je stoga

$$R(\Delta(c_0, c_1, c_2, c_3)) \geq r. \tag{12}$$

Odavde slijedi

$$R = 3R(\Delta(c_0, c_1, c_2, c_3)) \geq 3r. \tag{13}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako se radi o pravilnom tetraedru.

2 Cauchy-Schwarz-Bunjakovski (CSB) nejednakost

Cauchy-Schwarz-Bunjakovski nejednakost za dva vektora $x=(a,b)$ i $y=(c,d)$, gdje su a, b, c, d realni brojevi, glasi:

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) \geq (ac+bd)^2. \tag{14}$$

Oslobađanjem zagrada s lijeve i desne strane dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$(ad)^2+(bc)^2 \geq 2abcd, \tag{15}$$

što je upravo A-G nejednakost za dvije varijable. CSB nejednakost također slijedi iz Fermatovog teorema o dva kvadrata a kaže da je produkt sume dva kvadrata opet suma dva kvadrata ili formulom

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2. \tag{16}$$

Opća CSB nejednakost

$$|(x,y)| \leq ||x||||y|| \tag{17}$$

(to je zapravo posljedica jednakosti $\left|\left|uv\right|\right|^2=\left|\left|u\right|\right|^2\left|\left|v\right|\right|^2$, gdje je $u=a+bi$, $v=c+di$), slijedi iz dviju jednostavnih geometrijskih činjenica: skalarni produkt (nenul) vektora x, $y \in \mathbb{C}^n$

$$(x,y)=||x||||y|| \cos \measuredangle(x,y) \tag{18}$$

i

$$|\cos \measuredangle(x,y)| \leq 1. \tag{19}$$

S druge pak strane, algebarski dokaz CSB nejednakosti slijedi jednostavno iz Lagrangeovog identiteta

$$\left|\left|x\right|\right|^2\left|\left|y\right|\right|^2=(x,y)^2+\sum_{i<j}\left(x_i y_j-x_j y_i\right)^2. \tag{20}$$

Drugi način da se analitički dokaže CSB nejednakost jest nenegativnost realne kvadratne funkcije

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} (x_i t + y_i)^2. \tag{21}$$

U svakom slučaju vidimo da su A-G i CSB nejednakosti dva jednakomoćna (ekvivalentna) načela. Dvije svjetske klasične knjige o nejednakostima koje odišu elegancijom su [9] i [10] (a i mi ih navodimo u [7] i [8]). CSB vrijedi i općenitije u bilo kojem vektorskom prostoru (nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva) sa skalarnim produktom i glasi $|(u,v)| \leq ||u|| ||v||$.

3 Motzkinov primjer

Navest ćemo jednu lijepu primjenu A-G nejednakosti u algebri. Na 2. svjetskom matematičkom kongresu u Parizu 1900. godine D. Hilbert je postavio čuvena 23 problema (od kojih ni danas neki nisu riješeni, npr. RH - Riemannova hipoteza). Među njima bio je 17. problem koji glasi: je li nenegativni realni polinom zbroj kvadrata racionalnih funkcija? Godine 1927. E. Artin potvrdno je odgovorio na Hilbertov 17. problem, ali je sve do 1967. godine ostalo otvoreno pitanje je li realni nenegativni polinom suma kvadrata realnih polinoma? Tada je E. Motzkin uočio polinom

$$f = f(X,Y) = X^4Y^2 + X^2Y^4 + 1 - 3X^2Y^2 \geq 0 \tag{22}$$

(zbog A-G nejednakosti), a nije suma kvadrata realnih polinoma. Zaista, pretpostavimo suprotno da je

$$f = \sum_i f_i^2 \tag{23}$$

za neke $f_i \in \mathbb{R}[X,Y]$, $i = 1,2,3,\cdots,n$ Očito svaki f_i ima stupanj ≤ 3, i stoga je svaki f_i linearna kombinacija monoma 1, X, Y, X^2, XY, Y^2, X^3, X^2Y, XY^2, Y^3. No, X^3 se ne može pojaviti ni u kojem f_i, jer bi se inače X^6 pojavio u f s pozitivnim koeficijentom. Slično se ne može pojaviti ni Y^3 pa ni X^2, ni Y^2, ni X, ni Y. Preostaje jedino da je f_i oblika

$$f_i = a_i + b_i XY + c_i X^2Y + d_i XY^2 \,. \tag{24}$$

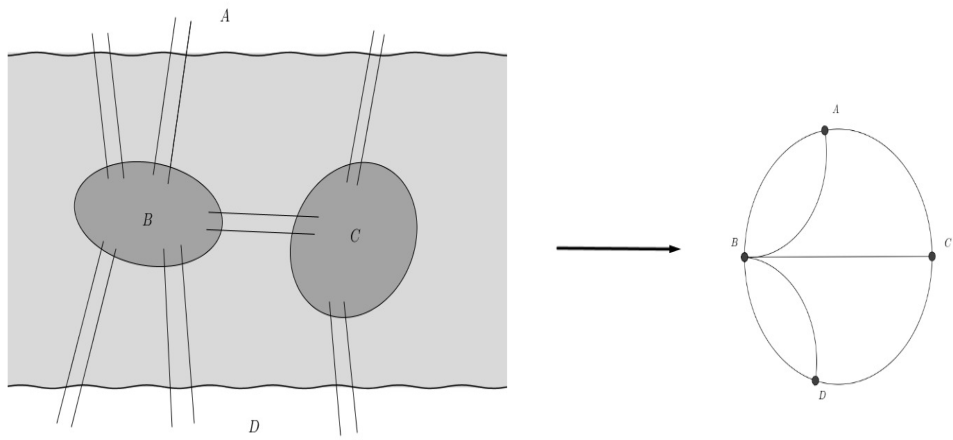
No tada je

$$\sum b_i^2 = -3 \tag{25}$$

što je kontradikcija.

4 Eulerov graf

Vratimo se malo matematičkom čarobnjaku L. Euleru ($1707. - 1783.$). Iako je od 1760-ih gotovo oslijepio, zapravo je tada postajao sve produktivniji. Euler je matematičar s više od 1500 objavljenih radova, što ozbiljnih rasprava, što knjiga. Približio mu se jedino Paul Erd\H os ($1913. - 1996.$) s oko 1500 radova (s preko 500 koautora), više o njemu saznat ćemo u sljedećoj točki. Iako je teško uspoređivati vrijeme Eulera i Erd\H osa, ipak možemo reći da se radi o dva genijalna matematičara koji su živjeli u razmaku od oko 200 godina.
Za tzv.$problem\ sedam\ mostova\ u\ K\ddot{o}nigsbergu$ čuo je Euler $1736.$ godine, ali iako ga je odmah riješio, to je postalo opće poznato mnogo kasnije. Problem "7 mostova" glasi: može li se, krenuvši od kuće obići 7 mostova, proći svaki most točno jednom i vratiti se kući (vidjeti Sliku 2).)



Slika 2: Slika sedam mostova u Königsbergu i pripadni model u teoriji grafova

$Stupanj\ vrha$ u grafu je broj bridova koji ulaze (ili izlaze) u vrh. Zbroj stupnjeva svih vrhova (konačnog) grafa je dvostruki broj svih bridova. Na slici 2 vidimo da su stupnjevi svih vrhova pridruženog grafa neparni, a takva (Eulerova) zatvorena šetnja je moguća ako i samo ako je stupanj svakog vrha paran broj (dokaz vidjeti u [11]). Neformalno: koliko ulaza, toliko izlaza u svaki vrh, ukupno paran broj. Ovo se smatra začetkom teorije grafova, a Eulerova formula za poliedre $v - b + s = 2$ (v- broj vrhova, b- broj bridova i s- broj strana konveksnog poliedra) začetkom algebarske topologije.
Kad smo već kod genijalnih matematičara Eulera i Erd\H osa evo i njihova dva manje poznata otvorena problema.
Euler (oko $1770.$ godine): Postoji li savršen Eulerov kvadar, tj. kvadar (cigla) čiji svi bridovi i sve dijagonale imaju cjelobrojne duljine?
Erd\H os (oko $1970.$ godine): Ako niz $a_n \in \mathbb{N}$ ima svojstvo da red $\sum \frac{1}{a_n}$ divergira, sadrži li po volji dugački aritmetički niz? Ako se radi o nizu prostih brojeva, onda je odgovor potvrdan (Green-Tao, 2010.).

5 Čarobne četvorine (ili magični kvadrati)

Sve je broj, tumačio je Pitagora svojim sljedbenicima oko 500 g. pr. Kr. S brojevima su bili očarani mnogi ljudi, a naročito matematičari.
$\mathit{The\ Man\ Who\ Loved\ Only\ Numbers}$ naslov je knjige P. Hoffmana o Paulu Erd\H osu. Kao dijete od 5-6 godina mali bi Paul ljudima računao koliko su sekundi upravo doživjeli (100 godina je 3 milijarde, 153 milijuna i 600 tisuća sekundi) ili koliko bi vlakom trajalo (brzinom od 100 km/h) putovanje od Zemlje do Sunca i sl. Erd\H os i drugi matematički genijalci, primjerice Gauss, Euler, Poincaré i Ramanujan su strjelovito brzo računali. No, isto tako mnogi su umjetnici bili opčinjeni brojevima i njihovim čarolijama. Tako su slikari Albrecht Dürer ($1471. -1528.$) i njegov suvremenik Leonardo da Vinci ($1452. -1519.$) bili očarani čarobnim četvorinama (iliti magičnim kvadratima). U tim je tablicama zbroj brojeva u svakom retku, stupcu i dijagonali isti (više o njima u članku [12] i knjizi [14]).

2	**7**	**6**
9	**5**	**1**
4	**3**	**8**

Slika 3:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Slika 3:

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Slika 3:

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Slika 3:

Slika 3: Dürerovi magični kvadrati

69	46	73	54
93	34	89	26
48	67	52	75
32	95	28	87

96	64	37	45
39	43	98	62
84	76	25	57
23	59	82	78

Slika 8: Magični kvadrat zrcaljenje znamenki

73	101	127	179	139	47
367	13	173	59	17	37
113	61	97	197	167	31
103	53	71	89	151	199
7	331	193	11	83	41
3	107	5	131	109	311

Slika 9: Magični kvadrat s prostim brojevima

1	58	3	60	8	63	6	61
16	55	14	53	9	50	11	52
17	42	19	44	24	47	22	45
32	39	30	37	25	34	27	36
57	2	59	4	64	7	62	5
56	15	54	13	49	10	51	12
41	18	43	20	48	23	46	21
40	31	38	29	33	26	35	28

Slika 9: Indijska čarobna četvorina reda 8

Slika 9: Magični kvadrati

S	A	T	O	R
A	R	E	P	O
T	E	N	E	T
O	P	E	R	A
R	O	T	A	S

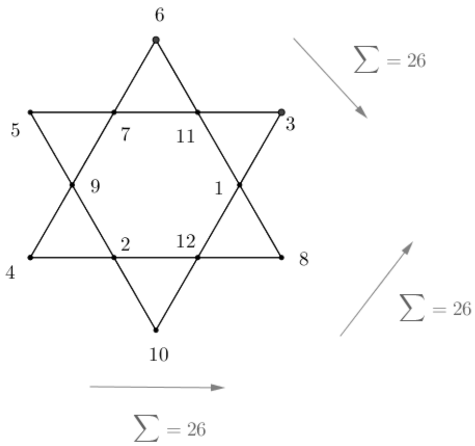
Slika 12: Starolatinski slovčani magični kvadrat

Na slici je starolatinski slovčani "magični kvadrat" koji se jednako čita slijeva, zdesna, odozgo, odozdo, a znači: orač Arepo (ime) s mukom njive ore. Pokušajte zamjenom slova dobiti i po koju hrvatsku čarobinu s nekim značenjem.

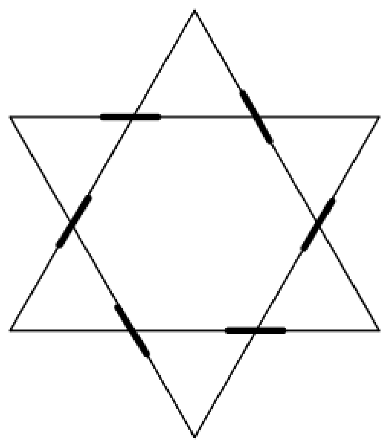
Obično se pod $magi\check{c}nim\ kvadratom$ reda $n \geq 3$ smatra tablica $n \times n$ svih brojeva $1, 2, 3, \cdots, n^2$ s istim zbrojem svakog retka, stupca i obiju dijagonala; taj je zbroj

$$\frac{n(n^2+1)}{2}. \qquad (26)$$

Postoji samo jedan magični kvadrat reda 3, svi ostali su dobiveni zrcaljenjem i rotacijom jedan iz drugog. Magičnih kvadrata reda 4 ima točno 880, a reda 5 ima 275305224, a reda 6 približno $1.7745 \cdot 10^{19}$. Dalje se ne zna, ali se zna da postoje magični kvadrati svakog reda $n \geq 3$ pa tako, primjerice, reda $n = \text{googol} = 10^{100}$ pa i reda $n = \text{googolplex} = 10^{googol}$, itd. ali i $n = \text{googol} \# \text{googol} \# \cdots \# \text{googol}$ gdje je $a \# b = a^b$. Možete li zamisliti tako veliki ali ipak "samo" konačan broj pri čemu ima barem googol simbola $\#$ (od googol potječe i riječ "google")? Postoje i magični pravokutnici, čarobne (magične) kocke pa i magične 4D-kocke zvane "tesseract", itd. U rekreativnoj (ili zabavnoj) matematici razmatraju se i magični trokuti, a umjesto zbroja razmatra se umnožak, itd. Magični kvadrati su u srednjem vijeku nošeni u procesijama kako bi svojom magijom otjerali đavla. Evo na kraju i čarobne šesterokrake zvijezde (vidjeti sliku). U svakom njenom vrhu postavljen je neki broj od 1 do 12 tako da su zbrojevi duž svih stranica jednaki 26. Ima i raznih drugih "magičnih likova". Poopćenje 6-zvijezde je n-zvijezda i na svakoj crti broj između 1 i $2n$ s magičnim zbrojem $4n+2$.



Slika 13: Šesterokraka zvijezda



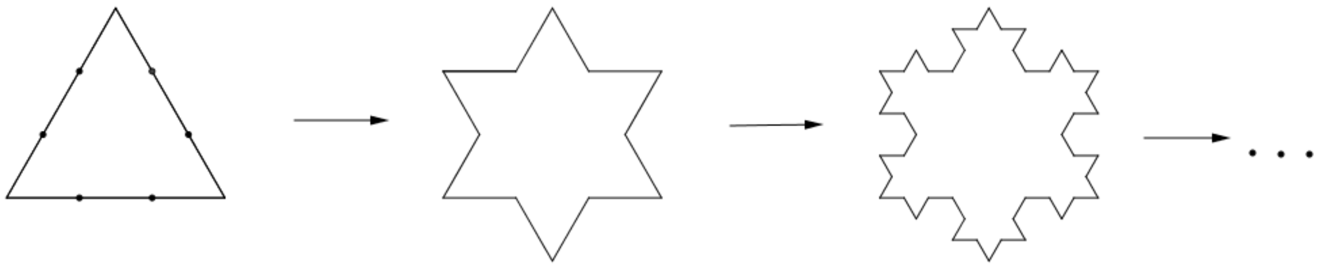
Slika 13: Davidova zvijezda

Slika 13: Zvijezde

Mogu li se trokuti u prostoru (Davidova zvijezda) kao na slici razdvojiti (podebljani su nadvožnjaci) ? Pokušajte si dočarati i nacrtati tri međusobno uklijěstena trokuta (ili kružnice). To su tzv. $Borromeo\ prstenovi$ i to je i povijesno i matematičko-topološki zanimljiva priča. O tome i drugim matematičko-povijesnim zanimljivostima možete pročitati u [14]. Niz je otvorenih problema u kombinatorici s magičnim likovima.

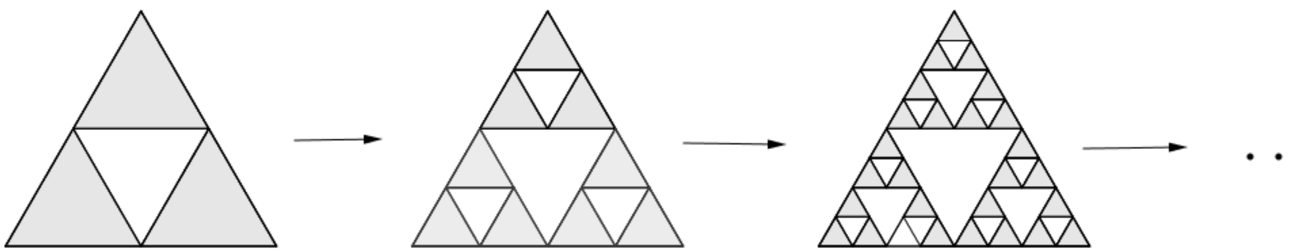
6 Kochova pahuljica i drugi fraktali

Pođimo od jednakostraničnog trokuta i podijelimo mu svaku stranicu na tri jednaka dijela. Ponavljaj: izbaci srednju trećinu i zamijeni je prema van s ostale dvije stranice trokuta (vidjeti sliku 16). Ono što na limesu preostane se naziva $Kochova\ pahuljica$. To je primjer svuda neprekidne, a nigdje diferencijabilne krivulje. Njezin je opseg beskonačan, a površine $8/5$ prvotnog trokuta. To je jedan od najjednostavnijih primjera fraktalnog skupa ili kraće $fraktala$.



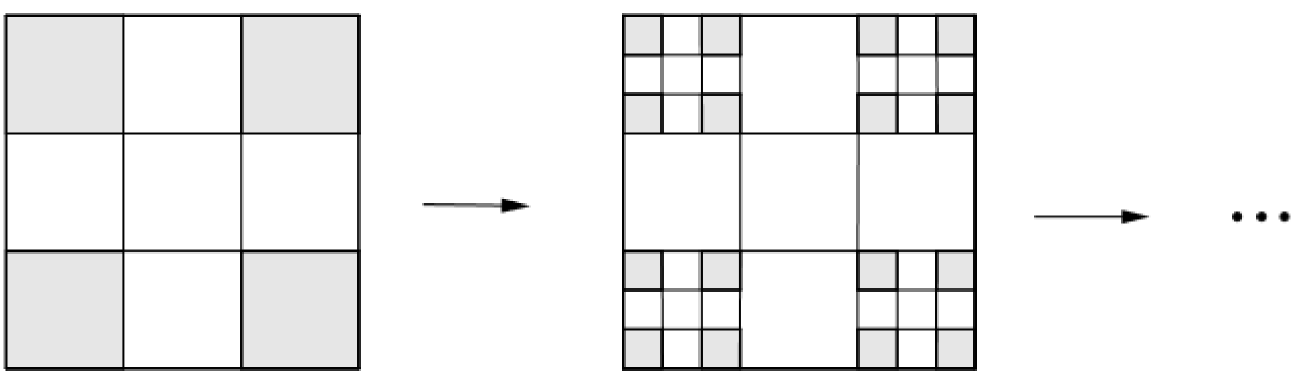
Slika 16: Kochova pahuljica

Slični primjer fraktala je $rupičasti\ trokut\ Sierpińskog$, koji se dobiva ovako. Ponavljaj: izbaci središnji trokut s time da se pođe od jednakostraničnog trokuta. Na limesu preostaje rupičasti trokut Sierpińskog.



Slika 17: Rupičasti trokut Sierpińskog

Slično se dobiva i rupičasti tepih Sierpińskog tako da se iz kvadrata 3×3 izbaci središnji i one koji s njim dijele crtu i nastavi se tako (dakle, izbacujemo središnji križ od 5 kvadratića). Analogon u 3D je $Mengerova\ spužva$, a dobije da se iz kocke $3 \times 3 \times 3$ izbacuje središnja i s njom dodirnih 6 kocaka i nastavlja tako u beskonačnost.

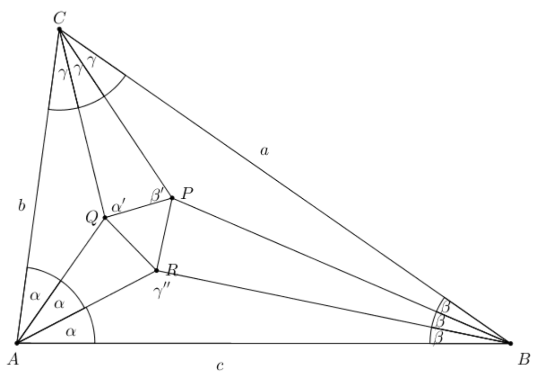


Slika 18: Rupičasti tepih Sierpińskog

Fraktalni objekti (tj. samoslični objekti) objekti igraju važnu ulogu u suvremenoj teoriji kompleksnih funkcija, topologiji, dinamičkim sustavima, teorijskoj fizici i drugdje.

7 Morleyevo čudo ili Morleyev teorem

Morleyevo čudo ili *Morleyev teorem o trisekciji kutova* datira iz 1899. godine i kaže sljedeće. Susjedni parovi trisektrisa kutova trokuta čine vrhove jednakostraničnog trokuta. Trisektrisa (ili trodjelnica) dijeli kut na tri jednaka dijela. Prisjetimo se da se bisektrise ili simetrale (polovice) kutova trokuta sijeku u središtu upisane kružnice. Vrlo jednostavni dokaz te činjenice rabi samo sukladnost trokuta.
Dokaz 1. Morleyevog teorema.



Slika 19: Jednakostraničan trokut $\triangle PQR$

Neka se trisektrise kutova trokuta $\triangle ABC$ sijeku u točkama P, Q i R kao na slici i neka je $\triangle PQR$ Morleyev trokut polaznog trokuta $\triangle ABC$. Tvrdimo da je $\triangle PQR$ jednokostraničan. U dokazu ćemo rabiti samo sinusov poučak i formulu za trostruki kut (koji se lako dokaže iz adicijske formule):

$$\sin\, 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x = 4\sin x \sin x' \sin x'' \qquad (27)$$

gdje je $x' = x + \frac{\pi}{3}$, $x'' = (x')' = x + \frac{2\pi}{3}$.
Neka su kutovi trokuta $A = 3\alpha$, $B = 3\beta$, $C = 3\gamma$; stoga

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}. \qquad (28)$$

Neka je R radijus opisane kružnice $\triangle ABC$ (razlikujte taj R i vrh R $\triangle PQR$). Tada je $\frac{a}{\sin A} = 2R$, itd. Iz sinusovog poučka za $\triangle ABR$ i $\triangle CPQ$ i "trostruke formule" dobivamo

$$|AR| = 8R \sin\beta \sin\gamma \sin\gamma'. \qquad (29)$$

Slijedi

$$\frac{|CQ|}{\sin\beta\,'} = \frac{|CP|}{\sin\alpha\,'} = 8R\sin\alpha\sin\beta. \qquad (30)$$

Promotrimo trokut s jednom stranicom CQ i kutovima $\alpha\,'$, $\beta\,'$ i γ. Iz sinusovog poučka slijedi da je taj trokut sukladan s $\triangle\ CPQ$. Stoga je

$$\left|PQ\right| = 8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 8R\sin\frac{A}{3}\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}. \qquad (31)$$

Zbog simetričnosti ovog izraza slijedi

$$|PQ| = |QR| = |RP|, \qquad (32)$$

pa je $\triangle\ PQR$ jednakostraničan.

Dokaz 2 (''lov na kutove'').

Taj je dokaz sličan Dokazu 1; rabi sinusov poučak i trostruku formulu i pokazuje da su kutovi trokuta PQR svi jednaki $\frac{\pi}{3}$. Prepuštamo ga čitatelju.

Dokaz 3 (planimetrijski)..

Zamislimo prvo da je trokut $\triangle\ PQR$ jednakostraničan i produžimo AQ i BP do W, BR i CQ do U, te AR i CP do V. Tada je lako provijeriti da su $\triangle\ URQ$, $\triangle\ VRP$ i $\triangle\ WPQ$ jednakokračni i da su im kutovi uz baze jednaki $\frac{A}{3} - \frac{\pi}{3}$ itd.

Dakle, da bismo dokazali Morleyjev (ili Morleyev) poučak, pođemo od jednakostraničnog $\triangle\ PQR$, konstruiramo prema van točke U, V, W s odgovarajućim kutovima uz baze PQ, QR i RP i neka je A sjecište od VR i WQ itd. Tada nije teško provjeriti da je $\triangle\ ABC$ sličan polaznom trokutu, tj. da ima kutove A, B i C.

Zanimljivo je da se za analogni problem za trodjelnice stranica trokuta umjesto kutova ne zna podrobniji opis figure dobivene analogno Morleyjevim teoremu. $\triangle\ ABC$ je afina slika pravilnog, pa kako afinitet čuva paralelnost, slijedi da je PQ paralelno s AB itd., pa je $\triangle\ PQR$ sličan s $\triangle\ ABC$, a šesterokut $PWQURV$ afino regularan. Ali možemo li reći i nešto više od od toga? Primjerice, koji je koeficijent sličnosti i ima li taj šesterokut neka dodatna svojstva?

Također je otvoreno pitanje ima li nekih simetrija (skladnosti) Morleyev tetraedar dobiven trisekcijama diedralnih kutova danog tetraedra (v.[28]).

Zaključak

Koliko su vizualni i kratki dokazi važni potvrdio je i hrvatski znanstvenik i izumitelj Nikola Tesla (1856.-1943.) riječima: "Mogu zahvaliti vizualizaciji za sve što sam stvorio. Događaji iz mog života i moja otkrića pred mojim očima su stvarni, vidljivi kao i svaka pojava i predmet. U mladosti sam se toga plašio neznajući što je to zapravo, ali kasnije sam tu moć primio kao dar i bogatstvo. Njegovao sam ga i ljubomorno čuvao. Vizualizacijom sam na većini izuma vršio i ispravke, a onda ih, tako završene, pravio. Njome rješavam i komplicirane matematičke jednadžbe, a da ne ispisujem brojeve."

Bibliografija

[1] B. Pavković, D. Veljan: *Elementarna matematika 1*, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

[2] B. Pavković, D. Veljan: *Elementarna matematika 2*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1995.

[3] I. N. Bronštejn, suradnici: *Matematički priručnik*, Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.

[4] S. Mardešić: *Sjećanje na profesora Borisa Pavkovića (1931.-2006.)*, Glasnik Matematički, 41 (61) (P) (2006.), 414-415.

[5] V. Volenec: *Popis i opis znanstvenih radova prof. dr. sc. Borisa Pavkovića*, Glasnik Matematički, 41 (61) (P) (2006.), 411-413.

[6] D. Veljan: *The 2500-year -old-pythagorean theorem*, Mathematics Magazine, 73 No. 4 (2000.), 259-272.

[7] D. Veljan: *The AM-GM inequality from different viewpoints*, Elem. Math. 72 (2017), 24-34.

[8] D. Svrtan, D. Veljan: *Non-Euclidean versions of some classical triangle inequalities*, Forum Geometricorum, 12 (2012.), 197-209.

[9] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya: *Inequalities*, 2nd. ed. , Cambridge University Press, Cambridge, 1952.

[10] J. M. Steele: *The Cauchy-Schwarz Master Class, MAA*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[11] D. Veljan: *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[12] D. Veljan: *Čarobne četvorine (iliti magični kvadrati)*, Poučak,15 (57) (2014.), 12-23.

[13] C. A. Pickover: *Wonders of Numbers*, Oxford University Press, New York, 2002.

[14] C. A. Pickover: *The Math Book*, Sterling, New York, 2009. (hrvatski prijevod u tisku).

[15] M. Fiedler: *Matrices and Graphs in Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[16] D. Veljan: *John Milnor - dobitnik Abelove nagrade za 2011. godinu*, Matematičko-fizički list, 62(2011.), 172-176.

[17] A. Dujella: *Fibonaccijevi brojevi*, HMD, Zagreb, 2000.

[18] T. Koshy: *Pell and Pell–Lucas Numbers with Applications*, Springer, New York, 2014.

[19] D. Veljan, *J. Nash* i *L. Nirenberg*: *Abelovci za 2015. godinu*, Matematičko fizički list, 66 (2015.), 31-36.

[20] M. Raussen, C. Skau : *Interview with Abel Laureate John F. Nash Jr.*, Notices of the AMS, 63 (5),(2016.), 486-491.

[21] D. Veljan : *Matematičar i teorijski fizičar, akademik Vladimir Varićak*, Prirodoslovlje 16(2016.), 125-152.

[22] D. Klobučar : *Matematika naša svagdašnja I, II*, Element , Zagreb, 2014.

[23] B. J. McCartin: *Mysteries of the Equilateral Triangle*, (javno dostupno na: http://www.m-hikari.com/mccartin-2.pdf, 7.2.2017.)

[24] J. Milnor : *Topology through the centuries: Low dimensional manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (4) (2015.), 545-584.

[25] S. Mardešić : *Kako sam postao i ostao matematičar*, Hrvatska sveučilišna naklada, Zagreb, 2016.

[26] D. Veljan, V. Volenec: *Matematika 3*, Školska knjiga, Zagreb, 1998.

[27] I. Gusić: *Andrew Wiles dobio Abelovu nagradu*, Matematičko-fizički list, 67(2016.), 7-13.

[28] D. Svrtan, D. Veljan: *Side lengths of Morley triangles and tetrahedra*, Forum geometricorum, 17(2017), 123-142.

ISSN 1334-6083