math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

Geometrijska i algebarska interpretacija presjeka stošca i valjka ravninom

algebra **geometrija** **presjeci stošca**

Mandi Orlić Bachler, Mirela Katić Žlepalo i Ivan Derežić

Tehničko veleučilište u Zagrebu, Graditeljski odjel, 10000 Zagreb, Av. V. Holjevca 15, Hrvatska

mandi.orlic@tvz.hr i mkatic@tvz.hr

Sažetak

Na Preddiplomskom stručnom studiju graditeljstva i Politehničkom diplomskom specijalističkom stručnom studiju graditeljstva Tehničkog veleučilišta u Zagrebu izvodi se nastava iz nekoliko matematičkih predmeta (Matematika 1 i 2, Matematika, Nacrtna geometrija u graditeljstvu 1 i 2), kao i iz predmeta usko povezanih s njima (Računarstvo u graditeljstvu, Parametarsko modeliranje 1 i 2). Mnoge teme iz nastavnog plana i programa tih predmeta su iste, međutim pristup i način njihove obrade je drukčiji (algebarski, geometrijski, primjenom računalnih programa, itd.). U članku su prikazani različiti pristupi obradi teme presjeka stošca i valjka ravninom, a koji se primjenjuju u sklopu nastave navedenih predmeta. Dani su prijedlozi za moguću bolju realizaciju ishoda učenja navedenih predmeta njihovim adekvatnijim međusobnim povezivanjem.

Ključni pojmovi: stožac, valjak, ravnina, prostor, presjek, krivulje 2. reda

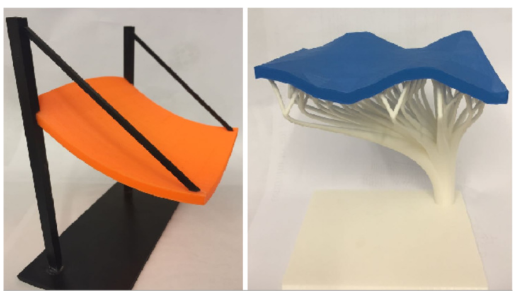
1 Uvod

Na Preddiplomskom stručnom studiju graditeljstva i Politehničkom diplomskom specijalističkom stručnom studiju graditeljstva Tehničkog veleučilišta u Zagrebu izvodi se nastava iz pet matematičkih predmeta: Matematika 1 (u prvom semestru), Matematika 2 (u drugom semestru), Nacrtna geometrija u graditeljstvu 1 (u prvom semestru) i Nacrtna geometrija u graditeljstvu 2 (u drugom semestru) na preddiplomskom te Matematika (u prvom semestru) na diplomskom specijalističkom studiju. Predmeti koji su po svom sadržaju povezani s ovim matematičkim predmetima su Računarstvo u graditeljstvu, koji se izvodi na stručnom preddiplomskom studiju u prvom semestru, te predmeti Parametarsko modeliranje 1 i 2 koji se izvode na specijalističkom diplomskom studiju u trećem, odnosno četvrtom semestru.

Mnoge teme iz nastavnog plana i programa navedenih predmeta su bliske i povezane, a mnoge i iste, međutim pristup i način njihove obrade je drukčiji (analitički, geometrijski, primjenom računalnih programa, itd.).

Dosadašnje iskustvo je pokazalo da studenti često ne prepoznaju da su teme obrađene na navedenim predmetima iste, ali s drukčijim pristupom. Tako na primjer u sklopu predmeta Nacrtna geometrija u graditeljstvu 1, u četvrtom tjednu nastave, studenti slušaju temu probodište pravca i ravnine. S istim problemom susreću se nešto kasnije, u sedmom tjednu nastave, na predmetu Matematika 1, kada algebarskim pristupom izračunavaju koordinate točke dobivene kao presjek pravca i ravnine u prostoru. Nerijetko, kad ih upitamo jesu li još negdje obradili takav problem i s kojeg aspekta, mnogi studenti nemaju odgovor. Oni koji se tad i prisjete da su to obradili na predmetu Nacrtna geometrija u graditeljstvu, često kažu da to ne bi primijetili da ih nismo pitali.

Isto tako, pojam ploha proteže se kroz sve nastavne programe navedenih predmeta. O rotacijskom stošcu (i valjku), ravninama u prostoru i njihovom međusobnom odnosu studenti slušaju na nekoliko kolegija. Pojam ravnine u prostoru prvo se obrađuje u sklopu programa predmeta Nacrtna geometrija u graditeljstvu 1 i Matematika 1. Algebarske plohe 2. reda, odnosno rotacijski stožac, obrađuju se prvo na predmetu Nacrtna geometrija u graditeljstvu 1, a potom i na predmetu Nacrtna geometrija u graditeljstvu 2, dok se s pojmom rotacijskog tijela paralelno susreću na predmetu Matematika 2, kod primjene određenog integrala. Na diplomskom specijalističkom studiju o plohama 2. reda slušaju na predmetu Matematika kao funkcijama više varijabli, te posljednji put na predmetima Parametarsko modeliranje 1 i 2, gdje izrađuju složene parametarske 3D modele primjenom programa Rhinoceros 3D i Grasshopper[1], čiji su oblici, između ostalog, dobiveni kao presjek ploha 2. reda ravninom. Primjeri 3D modela izrađenih primjenom navedenih programa prikazani su na slici 1.



Slika 1: 3D modeli izrađeni primjenom programa Rhinoceros 3D i Grasshopper. Modeli su isprintani 3D printerom.

U sljedećim poglavljima prikazat ćemo kako se presjek stošca i valjka ravninom obrađuje s geometrijskog i algebarskog aspekta u sklopu nastavnih programa prethodno navedenih predmeta.

2 Presjek stošca ravninom

Na predmetima nacrtne geometrije općenita stožasta ploha se definira kao algebarska pravčasta ploha dobivena gibanjem pravca (izvodnice) po nekoj ravninskoj krivulji (ravnalici) pri čemu jedna njegova točka miruje. Rotacijski stožac dobiva se ukoliko je ravnalica kružnica. Presjek plohe ravninom je skup svih zajedničkih točaka te plohe i presječne ravnine. Ako je ploha algebarska, njezin presjek ravninom je algebarska ravninska krivulja reda jednakog redu plohe. Iz toga slijedi da je presjek rotacijskog stošca, kao plohe 2. reda, ravninom ravninska krivulja 2. reda, koja može biti [3]:

- neraspadnuta ili nedegenerirana (kružnica, elipsa, parabola, hiperbola);
- raspadnuta ili degenerirana (krivulja 2. reda se raspala na dva pravca, jedan dvostruki pravac ili par konjugirano-imaginarnih pravaca koji se realno sijeku u točki).

Osim vrsta presječnih krivulja stošca, važno je da studenti nauče i kako treba postaviti presječnu ravninu da bi presjek bila točno određena krivulja. Kao presjek stošca ravninom dobivamo:

- kružnicu ako je ravnina presjeka paralelna s osnovicom stošca;

- elipsu ako ravnina presjeka siječe sve izvodnice stošca i nije paralelna s osnovicom stošca;
- parabolu ako je ravnina presjeka paralelna s jednom izvodnicom stošca;
- hiperbolu ako je ravnina presjeka paralelna s dvije izvodnice stošca.

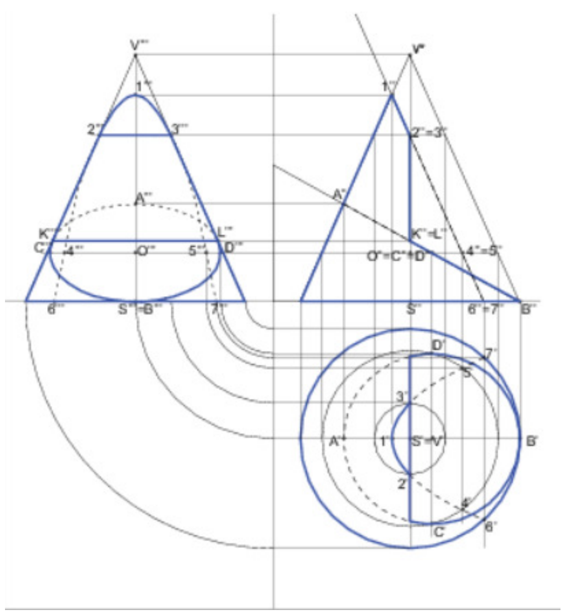
Raspadnuti presjek stošca dobiva se ako ravnina presjeka prolazi vrhom stošca. Krivulja 2. reda se u tom slučaju raspadne na:

- dvije realne i različite izvodnice stošca ili;
- jednu dvostruku izvodnicu stošca (u slučaju tangencijalne ravnine) ili;
- dvije konjugirano-imaginarne izvodnice stošca koje imaju realan presjek u vrhu stošca.

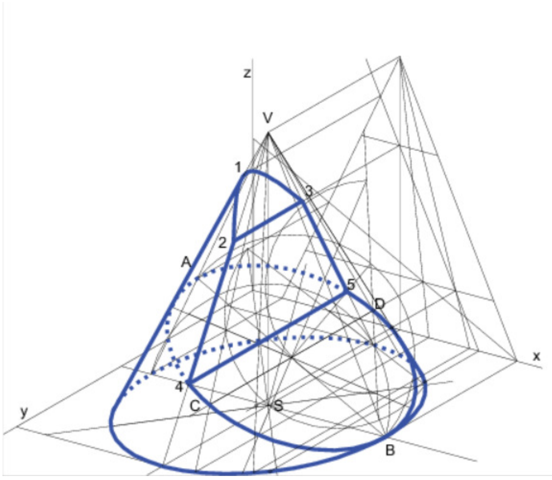
U sklopu predmeta Nacrtna geometrija u graditeljstvu 2 presjek stošca se crta kao zadatak za samostalni rad studenta (tzv. program) u Mongeovoj metodi (tlocrt, nacrt, bokocrt), kao i u metodi kose aksonometrije. Pri tome se koriste:

- metoda pomoćnih kružnih presjeka kod Mongeove metode i
- metoda izvodnica kod metode kose aksonometrije.

U slučaju da je presječna krivulja stošca elipsa, studente upućujemo da konstruiraju veliku i malu os presječne elipse ili par njezinih konjugiranih promjera. Presječne parabole i hiperbole konstruiraju se na taj način da se odredi dovoljan broj njihovih točaka [3]. U programima studenti obično crtaju presjeke s dvije ili tri presječne ravnine, dok se na kolokviju zbog ograničenog vremena zadaju zadaci s jednom presječnom ravninom. Pri tome se položaj stošca varira na taj način da mu je osnovica ili u tlocrtnoj ili u nacrtnoj ili u bokocrtnoj ravnini. Studenti mogu program predati nacrtan olovkom, a oni koji žele bolju ocjenu, program trebaju istuširati ili nacrtati u AutoCAD-u. Primjer programa iz AutoCAD-a prikazan je na slikama 2. i 3.

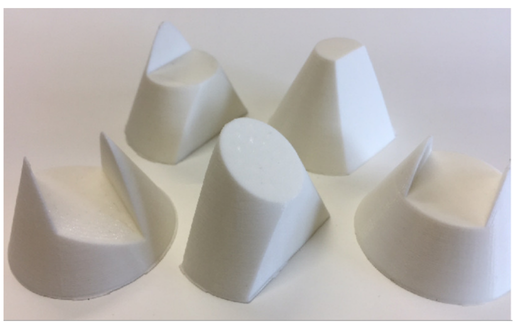


Slika 2: Mongeova projekcija (tlocrt, nacrt, bokocrt) presjeka stošca s tri ravnine - dobiveni presjeci su: elipsa, parabola i par izvodnica.



Slika 3: Presjek stošca u kosoj aksonometriji - tri presječne ravnine su analogne kao na prethodnoj slici kod Mongeove projekcije.

Studenti se nerijetko žale da ne mogu zamisliti kako presječeni stožac stvarno izgleda. S ciljem što bolje vizualizacije presječenih stožaca, u akademskoj godini 2017/18. su pripremljeni modeli različitih presjeka stožaca koristeći 3D printer (slika 4.).



Slika 4: Različiti 3D modeli presjeka stošca kao pomoć za vizualizaciju presjeka.

Na predmetu Matematika plohe 2. reda obrađuju se u sklopu gradiva funkcije više varijabli, a s određivanjem presjeka stošca ravninom studenti se susreću pri primjeni višestrukog integrala. S tog aspekta problem promatramo na sljedeći način.

Općenito, algebarska ploha n-toga reda je skup točaka euklidskog prostora čije koordinate (x,y,z) zadovoljavaju neku algebarsku jednadžbu $F^n(x,y,z)=0$, gdje je F^n polinom n-tog stupnja.
Algebarska ploha 1. reda je ravnina u prostoru i opći oblik njene jednadžbe dan je izrazom

$$Ax+By+Cz+D=0\,,$$

pri čemu je barem jedan od koeficijenata A, B, C različit od nule (odnosno $A^2+B^2+C^2>0$).
Algebarska ploha 2. reda ili kvadrika je skup svih točaka euklidskog prostora koje zadovoljavaju jednadžbu 2. reda:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dyz+Ezx+Fxy+Gx+Hy+Iz+K=0\,, \tag{1}$$

pri čemu je barem jedan od koeficijenata A,B,C,D,E,F različit od nule, odnosno, u izrazu postoji barem jedan netrivijalni nelinearni član.
Osnovni tipovi algebarskih ploha 2. reda su elipsoid, jednoplošni hiperboloid, dvoplošni eliptički hiperboloid, eliptički paraboloid, hiperbolički paraboloid,

konus 2. reda (eliptički i kružni stožac) i cilindar 2. reda (eliptički, hiperbolički i parabolički cilindar).

Kanonska jednadžba eliptičkog stošca dana je izrazom

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 0\,, \tag{2}$$

gdje su $A, B, C \neq 0$, (ako je $A = B$ radi se o kružnom stošcu).
Odgovarajućim cikličkim izmjenama dobivamo još dvije jednadžbe iste plohe u različitim položajima.
Presjek plohe (2) ravninama:

(1) $z = P$, gdje je $P \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, su elipse:

$$\frac{x^2}{\frac{A^2P^2}{C^2}} + \frac{y^2}{\frac{B^2P^2}{C^2}} = 1\,.$$

Ako je $A = B$ presjek je kružnica. Ako je $z = 0$ presjek je točka.

(2) $x = P$, gdje je $P \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, su hiperbole:

$$\frac{z^2}{\frac{C^2R^2}{A^2}} - \frac{y^2}{\frac{B^2R^2}{A^2}} = 1\,.$$

Ako je $x = 0$ presjek je par ukrštenih pravaca: $z = \pm\frac{C}{A}x$.

(3) $y = P$, gdje je $P \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, su hiperbole:

$$\frac{z^2}{\frac{C^2P^2}{B^2}} - \frac{x^2}{\frac{A^2P^2}{B^2}} = 1\,.$$

Ako je $y = 0$ presjek je par ukrštenih pravaca: $z = \pm\frac{C}{B}y$.

(4) $z = Mx + Ny + P$, gdje su $M, N, P \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, su ravninske krivulje 2. reda oblika:

$$x^2\left(\frac{1}{A^2} - \frac{M^2}{C^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{B^2} - \frac{N^2}{C^2}\right) - \frac{2NM}{C^2}xy - \frac{2NP}{C^2}y - \frac{2MP}{C^2}x - \frac{P^2}{C^2} = 0. \tag{3}$$

Ovako dobivenu krivulju nije lako identificirati, kao što je to bilo u prethodna tri slučaja. Identifikacija te krivulje radi se određivanjem njenih invarijanti:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{A^2} - \frac{M^2}{C^2} + \frac{1}{B^2} - \frac{N^2}{C^2}\\
S &= \frac{L^2\left(A^2 + B^2\right)}{A^2B^2C^2}\\
\delta &= \frac{1}{A^2B^2} - \frac{N^2}{A^2C^2} - \frac{M^2}{B^2C^2}\\
\Delta &= -\frac{P^2}{A^2B^2C^2}
\end{aligned} \tag{4}$$

Naime, općenito vrijedi da se svaka ravninska krivulja 2. reda dana izrazom

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0\,, \tag{5}$$

gdje su $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$i bar jedan od koeficijenata a, b, c nije 0, translacijom i rotacijom koordinatnog sustava za neki kut φ, može transformirati u jedan od sljedećih oblika:

(a) Ako je $\delta > 0$ i

(i) $\Delta \neq 0$ i $\Delta \cdot T < 0$, jednadžba (5) predstavlja elipsu,

(ii) $\Delta \neq 0$ i $\Delta \cdot T > 0$, jednadžba (5) nema realnog rješenja (prazan skup),

(iii) $\Delta = 0$, jednadžba (5) predstavlja točku.

(b) Ako je $\delta < 0$ i

(i) $\Delta \neq 0$ jednadžba 5 predstavlja hiperbolu,

(ii) $\Delta = 0$ jednadžba 5 predstavlja par ukrštenih pravaca.

(c) Ako je $\delta \neq 0$ i

(i) $\Delta \neq 0$, jednadžba (5) predstavlja parabolu,

(ii) $\Delta = 0$ i $S > 0$ jednadžba (5) predstavlja dva paralelna pravca,

(iii) $\Delta = 0$ i $S = 0$ jednadžba (5) predstavlja jedan (dvostruki) pravac,

(iv) $\Delta = 0$ i $S < 0$ jednadžba (5) nema realnog rješenja (prazan skup).

pri čemu su invarijante δ, Δ i S i poluinvarijanta T jednake:

$$T = a + c, \;\; S = d^2 + e^2 - (a + c)f\,, \;\; \delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \;\text{ i }\; \Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \quad (6)$$

Invarijante δ, Δ i S ne mijenjaju se pri rotaciji i translaciji koordinatnog sustava, dok se poluinvarijanta T ne mijenja pri rotaciji, ali se mijenja pri translaciji.

Dokaze prethodnih tvrdnji ovdje nećemo iznositi, oni se mogu pronaći u [4].

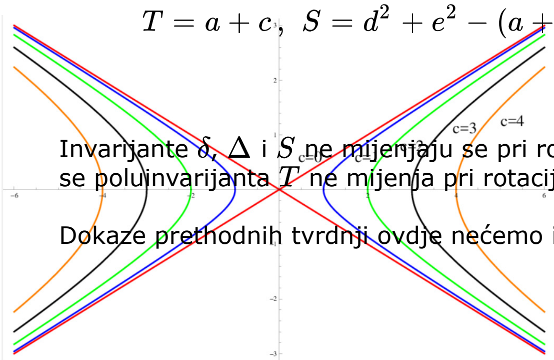
Sljedeća dva zadatka primjeri su zadataka koji se rješavaju na predmetu Matematika, a u kojima se studenti susreću s presjekom stošca i ravnine.

Zadatak 1: *Odrediti nivo-krivulje funkcija* $z = \sqrt{x^2 - 4y^2}$ *i* $z = -\sqrt{x^2 - 4y^2}$.

Rješenje:

Nivo-krivulje funkcija $z = \sqrt{x^2 - 4y^2}$ i $z = -\sqrt{x^2 - 4y^2}$ dobivene su kao presjek zadanih ploha i ravnine $z = c$, za $c = 0, 1, 2, 3, 4$. Za $c = 0$ nivo-krivulje su pravci $y = \pm\frac{1}{2}x$, a za $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ hiperbole $\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{\frac{c^2}{4}} = 1$.

Rješenje zadatka prikazano je na slici 5.



Slika 5: Nivo-krivulje funkcija $z = \sqrt{x^2 - 4y^2}$ i $z = \sqrt{x^2 - 4y^2}$.

Zadatak 2. *Odrediti težište tijela koje zauzima područje omeđeno plohom* $z = 6 - \sqrt{x^2 + y^2}$ *i ravninom* $z = 3$ *te ima gustoću mase* $\rho(x, y) = 1 - x^2 - y^2$.

Rješenje:

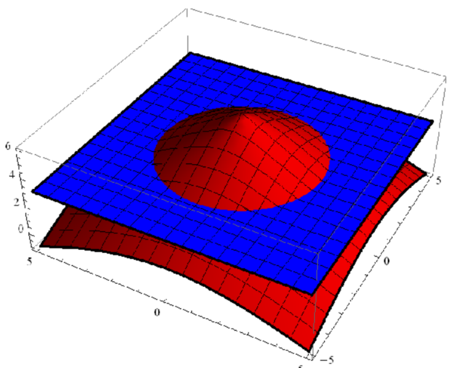
Presjek stožaste plohe $z = 6 - \sqrt{x^2 + y^2}$ i ravnine $z = 3$ je kružnica $x^2 + y^2 = 9$. S obzirom da se iz dobivenog izraza odmah iščitava jednadžba kružnice, ovdje nije potrebno promatrati invarijante dobivenog izraza. Zgodno je primijetiti da se težište nalazi na osi z, pa je stoga dovoljno računati samo njegovu aplikatu. Koordinate težišta računaju se kao omjer statičkog momenta i mase promatranog tijela. U ovom slučaju koordinate se računaju primjenom trostrukog integrala i prelaskom na cilindrični koordinatni sustav. Područje integracije je:

$$\Omega = \{(\varphi, r, z) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq 3,\ 3 \leq z \leq 6 - r\}\ .$$

Aplikata težišta iznosi:

$$z_s = \frac{\int\int\int_\Omega zr(1 - r^2)\varphi\, r\, z}{\int\int\int_\Omega r(1 - r^2)\varphi\, r\, z} = \frac{57}{17}.$$

Težište tijela omeđenog stošcem i ravninom nalazi se na z osi i njegove koordinate su $\left(0, 0, \frac{57}{17}\right)$.



Slika 6: Na grafu je prikazan presjek stošca $z = 6 - \sqrt{x^2 + y^2}$ i ravnine $z = 3$. Težište tijela omeđenog stošcem i ravninom nalazi se na z osi i njegove koordinate su $\left(0, 0, \frac{57}{17}\right)$.

U ovakvim zadacima pripadne slike i račune studenti rade ručno te u programu Maxima. Osnove rada u programima Maxima i AutoCAD-a[2] studenti uče na predmetu Računarstvo u graditeljstvu. Primjenom programa Maxima napravljene su slika 5. i slika 6. te slika 7. koja se nalazi u poglavlju 3. Slika 2. i slika 3. izrađene su u programu AutoCAD.

3 Presjek valjka ravninom

Na predmetima Nacrtna geometrija u graditeljstvu 1 i 2 valjkasta ploha definira se kao algebarska pravčasta ploha dobivena gibanjem nekog pravca (izvodnice) po nekoj ravninskoj krivulji (ravnalici) pri čemu beskonačno daleka točka tog pravca miruje, odnosno pravac pri tom gibanju ostaje sam sebi paralelan. Rotacijski valjak dobivamo ako je ravnalica kružnica. Presjek rotacijskog valjka ravninom može biti:

(1) neraspadnuta ili nedegenerirana konika ako presječna ravnina nije

paralelna s osi valjka. U ovom slučaju presjek valjka je elipsa, osim ako je presječna ravnina paralelna s osnovicom valjka jer je tada presjek kružnica.

(2) raspadnuta ili degenerirana konika ako je presječna ravnina paralelna s osi valjka. Presjek je

- par realnih i različitih izvodnica;
- jedna realna dvostruka izvodnica ili
- par konjugirano-imaginarnih izvodnica s realnim sjecištem u beskonačnosti.

S algebarskog aspekta na predmetu Matematika razlikujemo sljedeće tipove valjka:

- eliptički valjak

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1, \tag{7}$$

  kojem je trag elipsa u xy ravnini, a izvodnica paralelna s osi z. Specijalno u slučaju kada je $A=B$ riječ je o kružnom valjku.
- hiperbolički valjak

$$\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}=1, \tag{8}$$

  kojem je trag hiperbola u xy ravnini, a izvodnica paralelna s osi z.
- parabolički valjak

$$y^2=2px, \tag{9}$$

  kojem je trag parabola u xy ravnini, a izvodnica paralelna s osi z.

U jednadžbama (7),(8) i (9) radi se o valjcima čije su izvodnice paralelne s osi z, a trag se nalazi u xy ravnini. Stoga, u tom slučaju kažemo da funkcija $F(x,y)=0$ predočuje geometrijsku plohu valjka. Međutim, ako je izvodnica valjka paralelna s osi x funkcija je tipa $F(y,z)=0$, a trag je u ravnini yz, odnosno ako je izvodnica valjka paralelna s osi y funkcija je tipa $F(x,z)=0$, a trag je u ravnini xz.

Daljne razmatranje presjeka plohe valjka ravninama odnosi se na funkciju $F(x,y)=0$, međutim analogni zaključci mogu se izvesti i za preostala dva tipa funkcije F.
Kako izraz funkcije $F(x,y)=0$ ne ovisi o z, presjek plohe valjka ravninama $z=P$, $P\in\mathbb{R}$ uvijek je ista krivulja $F(x,y)=0$. Naime, svaka ravnina koja nije paralelna s izvodnicama valjka siječe valjak po elipsi ako je valjak eliptički, hiperboli ako je hiperbolički i paraboli ako je parabolički.
Promatramo li eliptički valjak (7), njegov presjek s ravninama $x=Mz+Ny+P$, pri čemu je barem jedan od koeficijenata M i N različit od nule, daje krivulju čija je jednadžba:

$$y^2\left(\frac{N^2}{A^2}+\frac{1}{B^2}\right)+\frac{2NMyz}{A^2}+\frac{2NPy}{A^2}+\frac{M^2z^2}{A^2}+\frac{2MPz}{A^2}+\frac{P^2}{A^2}-1=0. \tag{10}$$

Vrijednosti invarijanti krivulje (10) su:

$$T=\frac{N^2}{A^2}+\frac{M^2}{A^2}+\frac{1}{B^2},\quad \delta=\frac{M^2}{A^2B^2},\quad \Delta=-\frac{M^2}{A^2B^2}.$$

Kako je $\delta>0$ i $\Delta T<0$, za svaki $A,B,M,N\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ jednadžba (10) predstavlja elipsu. Na isti način mogu se dokazati analogne tvrdnje za parabolički i hiperbolički valjak.

Sljedeći zadatak rješava se u sklopu nastave predmeta Matematika.

Zadatak 3. *Odrediti težište homogenog tijela*

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y^2\le x\le 1,\ -1\le y\le 1,\ 0\le z\le x\right\}.$$

Rješenje:

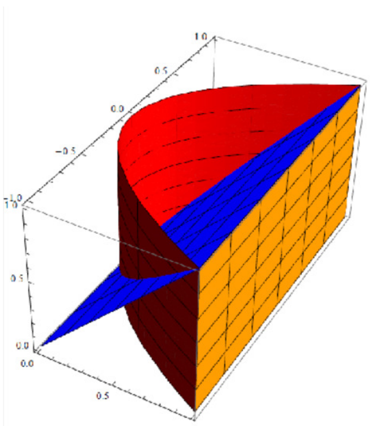
Koordinate težišta su:

$$x=\frac{\int\int\int_{\Omega} x\, y\, x\, z}{\int\int\int_{\Omega} y\, x\, z}=\frac{7}{9},$$

$$y=\frac{\int\int\int_{\Omega} y\, y\, x\, z}{\int\int\int_{\Omega} y\, x\, z}=\frac{2}{9},$$

$$z=\frac{\int\int\int_{\Omega} z\, y\, x\, z}{\int\int\int_{\Omega} y\, x\, z}=\frac{35}{81}.$$

Rješenje zadatka prikazano je na slici 7.



Slika 7: Tijelo
$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y^2\le x\le 1,\ -1\le y\le 1,\ 0\le z\le x\right\}$

U području građevine stožaste i valjkaste plohe imaju široku primjenu i to još od davnina. Primjeri građevina koje imaju stožast ili valjkast oblik prikazani su na slici 8.

Slika 8: Coop's Shot Tower (Melbourne) i Chengdu (Kina) primjeri su građevina čije su kupole stošci. Green Lighthouse i Planetarium (Copenhagen) primjeri su građevina čiji je oblik eliptički valjak (slike su preuzete sa www.dreamstime.com).

4 Zaključak

Poznato je kako je tendencija našeg obrazovnog sustava, već od osnovnoškolske razine, da se odbaci tradicionalni pristup u kojem se zagovara zatvorenost pojedinog nastavnog predmeta (područja) te da se na svim područjima teži međupredmetnoj povezanosti i interdisciplinarnosti. S ciljem što kvalitetnije realizacije ishoda učenja, ali i kako bi studenti što lakše usvojili potrebna znanja i vještine, uvijek nastojimo povezati gradivo, kako u okviru naših matematičkih predmeta, koje izvodimo na studijima graditeljstva, tako i sa strukovnim predmetima. Međutim, dosadašnje iskustvo pokazalo je da na povezanosti među predmetima i područjima još treba raditi.

Ponekad je zbog ograničenosti i nedostatka vremena, teško u sklopu nastave riješiti dovoljno zadataka kojim bi se ukazalo na povezanost obrađenog gradiva i drugih predmeta. Praksa je da se kroz domaće zadaće i seminarske radove, potakne studente na samostalni rad kojim bi povezali različite pristupe i metode u obradi određene matematičke teme, ali isto tako da samostalno pronađu odgovarajuće primjere primjene tog gradiva u području graditeljstva. Na primjer, tako smo ove akademske godine u sklopu predmeta Matematika 2, studentima koji su na prvom kolokviju ostvarili više od 85% mogućih bodova, ponudili seminarske radove u zamjenu za drugi kolokvij. Teme seminarskih radova odnose se na gradivo numeričkih metoda, a zadatak studenata je da pored opisa metode i rješavanja zadataka uz pomoć računalnog programa Maxima, daju primjer primjene zadane metode u području graditeljstva.

Već od samog početka studija studente pokušavamo zainteresirati za matematiku i nacrtnu geometriju i najvažnije njihovu primjenu, ne samo kroz nastavu već i kroz vannastavne aktivnosti. Studente koji već nakon prvog semestra ostvare bolje rezultate na završnom ispitu, potičemo da se uključe u pisanje stručnih radova, kao što je na primjer ovaj. U veljači se, drugu godinu zaredom, održava međunarodna radionica "Parametarsko modeliranje", koja je namijenjena svim studentima bez obzira na njihovo predznanje iz matematike i nacrtne geometrije. Na radionici se studenti na aktivan način upoznaju s mogućnostima primjene nacrtne geometrije u modernoj arhitekturi. Sam cilj radionice je studente naučiti osnove 3D i parametarskog modeliranja u programima Rhinoceros 3D i Grasshopper. Studenti samostalno osmišljavaju vlastiti projekt, programiraju zamišljeni model, te ga pripremaju za lasersko rezanje i sastavljanje makete.

Iako na većini naših visokoškolskih institucija i veleučilišta studenti završni (diplomski) rad mogu pisati u (ko)mentorstvu s nastavnikom iz područja matematike, pa tako i s temom iz tog ili srodnog područja, to trenutno nije moguće niti na jednom studiju graditeljstva koji se izvode na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu. Nadamo se da će se to u skoroj budućnosti promijeniti, jer vjerujemo da bi upravo na taj način, a u suradnji s kolegama iz područja graditeljstva, ojačali našu međupredmetnu povezanost.

Bibliografija

[1] https://www.grasshopper3d.com/

[2] https://www.rhino3d.com/

[3] I. Babić, S. Gorjanc, A. Sliepčević, V. Szirovicza: Nacrtna geometrija-zadaci, HDGG, Zagreb, 2011.

[4] Ž. Milin Šipuš, M. Bombardelli: *Analitička geometrija*, skripta, Zagreb, 2016.
Dostupno na: https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ag/dodatni/predavanja.pdf

[5] https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/index.html

[6] https://www.autodesk.com/education/free-software/autocad

[1]Program Grasshopper je besplatan, dok Rhinoceros 3D nije. Programe se može preuzeti na linkovima [1] i [2].
[2]Besplatne verzije programa Maxima i AutoCAD mogu se preuzeti na likovima [5] i [6].

ISSN 1334-6083