Osječki matematički list 18 (2018), 81-103

Matematički zadatci na šahovskoj ploči

Katarina Vincetić, Darija Brajković, Marinela Pilj*

Sažetak

U ovom članku prikazani su neki matematički zadatci formulirani na šahovskoj ploči. Najprije je opisana povijest same igre šah te pravila i kretanje figura kao i cilj igre. Korištenjem ranije opisanog, postavljeni su različiti zadatci na šahovskoj ploči kako bi se potaknulo čitatelja na samostalno rješavanje. Pri tome je za određen broj problema prikazano rješenje, dok ostali ostaju otvoreni za čitatelja.

Ključne riječi: *šah, matematika na šahovskoj ploči*

Mathematical problems on a chess board

Abstract

In this article we present several mathematical problems formulated on a chess board. After the description of history of chess, we explain the rules, figure traversals and the goal of the game. Next, we state, in terms of the chess board, various mathematical problems in order to entice student's interest to solved them. In this regard, solutions to certain of these problems are given, while the others are left to the reader.

Kexwords: *chess, mathematics on a chess board*

*Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: kvincetic@mathos.hr, dbrajkovic@mathos.hr, mpilj@mathos.hr

1 Uvod

Povijest šaha stara je oko 2000 godina. Prve šahovske partije odigrane su u Indiji. Tada se šah zvao *čaturanga* (*čatarunga*) što doslovno znači „četverodijelni”, a predstavljao je borbeni raspored indijske vojske. Vojsku raspoređenu u četiri dijela sačinjavali su slonovi (današnji lovci), bojna kola ili lađe (današnji topovi), konji i pješaci. Njima su bili pridodani kralj i vojskovođa, odnosno kraljev savjetnik (današnja kraljica ili dama), koji su se radi veće sigurnosti nalazili u sredini trupa.

O postanku šaha postoji više legendi, ali je najrasprostranjenija priča o mudracu i mladom indijskom kralju koji je bio tiranin i tlačio narod. Kako bi podučio kralja da se bez naroda ne može vladati, mudrac je izumio igru šah i pokazao kako i najslabija figura, pješak, može odlučiti ishod bitke na 64 polja i donijeti pobjedu. Kralj je brzo naučio pokretati figure, pravila igre i njome se oduševio, a mudracu je ponudio nagradu kakvu god poželi.

Nakon kraćeg razmišljanja, mudrac je zatražio od kralja sljedeću nagradu: „Isporuči mi onoliko zrna pšenice koliko se dobije kada se na prvo polje šahovske ploče stavi jedno zrno, na drugo dva, na treće četiri i tako uvijek dvostruko više, sve do šezdesetčetvrtog polja.”

8	2^{56}	2^{57}	2^{58}	2^{59}	2^{60}	2^{61}	2^{62}	2^{63}
7	2^{48}	2^{49}	2^{50}	2^{51}	2^{52}	2^{53}	2^{54}	2^{55}
6	2^{40}	2^{41}	2^{42}	2^{43}	2^{44}	2^{45}	2^{46}	2^{47}
5	2^{32}	2^{33}	2^{34}	2^{35}	2^{36}	2^{37}	2^{38}	2^{39}
4	2^{24}	2^{25}	2^{26}	2^{27}	2^{28}	2^{29}	2^{30}	2^{31}
3	2^{16}	2^{17}	2^{18}	2^{19}	2^{20}	2^{21}	2^{22}	2^{23}
2	2^{8}	2^{9}	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}
1	2^{0}	2^{1}	2^{2}	2^{3}	2^{4}	2^{5}	2^{6}	2^{7}
	a	b	c	d	e	f	g	h

Slika 1: Broj pšeničnih zrna na šahovskoj ploči

Je li to skroman zahtjev? Izračunajmo! Ukupan broj zrna pšenice na šahovskoj ploči bio bi

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{62} + 2^{63} = S_{64}$$

što predstavlja sumu prva 64 člana geometrijskog niza s početnim članom

$a_1 = 2^0 = 1$ i kvocijentom $q = 2$ te iznosi

$$S_{64} = a_1 \frac{q^{64} - 1}{q - 1} = \frac{2^{64} - 1}{1} = 2^{64} - 1.$$

Kraljevi matematičari računali su dva dana kako bi izračunali koliko zrna pšenice treba predati mudracu. Taj broj iznosi

$$2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Kralj se zamislio jer su mu matematičari rekli kako njegove robne zalihe ne bi bile dovoljne ni kada bi bile i sto puta veće (radi se zapravo o 150-godišnjem današnjem urodu pšenice u cijelome svijetu)!

Također bi se moglo izračunati kako bi skladište za ovu količinu žita trebalo zauzimati površinu kvadrata sa stranicama duljine 180 metara i visinom od Zemlje do Mjeseca jer se zna da 1 litra sadrži 1461 zrno pšenice.

Na kraju je kralj smislio rješenje. Pozvao je mudraca i rekao mu: „Dragi čovječe, ja te ne želim prevariti ni za jedno zrno pa ćeš ti svoju nagradu brojati zajedno s mojim slugama."

Kada bi mudrac pristao sam prebrojavati zrno po zrno neprekidno dan i noć, prebrojavajući po zrno u sekundi, trebalo bi mu:

$$\begin{aligned} 1 \text{ sekunda} &= 1 \text{ zrno} \\ 1 \text{ minuta} &= 60 \text{ zrna} \\ 1 \text{ sat} &= 3\,600 \text{ zrna} \\ 1 \text{ dan} &= 86\,400 \text{ zrna} \\ 1 \text{ godina} &= 31\,536\,000 \text{ zrna} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Za prebrojavanje milijun zrna trebalo bi mu oko deset dana neprekidnog brojanja. Jedan kubni metar pšenice prebrojavao bi pola godine. Za deset godina neprekidnog brojanja izbrojao bi dvadeset kubnih metara. Ako bi tako prebrojavao i dalje, mudrac bi za vrijeme života izbrojao tek neznatni dio nagrade koja mu pripada.

Tko je na kraju koga nadmudrio?

2 O samoj igri

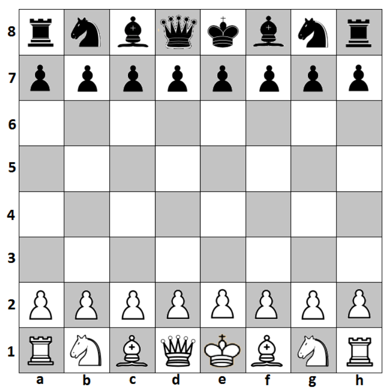
2.1 Šahovska ploča

Šahovska ploča kvadrat je veličine 8×8 izmjenično poslaganih crno-bijelih kvadratića, odnosno polja, pri čemu je donje lijevo polje crno. Kako bismo se bolje snalazili na ploči, obilježavamo ju slovima i brojčanim oznakama. Niz vodoravnih polja zovemo retcima, a niz uspravnih polja linijama ili stupcima. Retke obilježavamo redom znamenkama od 1 do 8, počinjući odozdo prema gore, a linije redom slovima abecede slijeva na desno: a, b, c, d, e, f, g, h. Na osnovi ovakvog obilježavanja svaki redak, linija i polje na šahovskoj ploči imaju svoje ime i prezime.

2.2 Figure

Svaki igrač posjeduje 16 figura (crnih ili bijelih): jednog kralja, jednu kraljicu (damu), dva topa (kule), dva lovca (laufera), dva skakača (konja) te osam pješaka (pijuna).

Svaki pomak jedne figure naziva se potez, a svaka figura ima svoje karakteristično kretanje određeno pravilima igre, kao i svoju vrijednost. Vrijednost figure razmjerna je broju polja na koje figura može ostvariti svoje djelovanje. Partiju uvijek počinje igrač koji ima bijele figure, a zatim igrači naizmjence vuku poteze. Figure su na početku igre poslagane kao na sljedećoj slici.

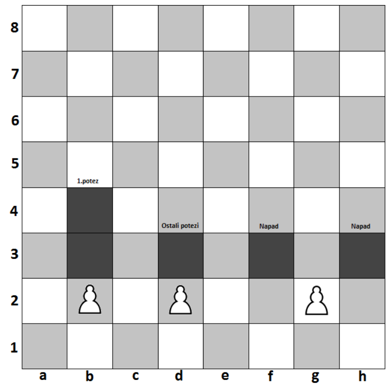


Slika 2: Figure na šahovskoj ploči na početku igre

Zapamti: kraljica mora stajati na polju koje odgovara njezinoj boji.

2.3 Kretanje figura

Pješaci su najslabije figure u šahu. Kreću se samo naprijed. Na početku igre, pri prvom potezu, pješak može prijeći jedno ili dva polja, a pri svakom sljedećem potezu dopušten je prelazak samo jednog polja. Kada igrač uz pomoć pješaka uzima figuru protivnika kreće se dijagonalno, ali i dalje samo jedno polje prema naprijed.

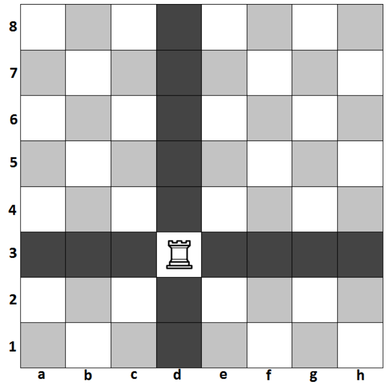


Slika 3: Kretanje pješaka na šahovskoj ploči

Ako pješak dostigne suprotnu stranu ploče, odnosno krajnji redak (bijeli pješak dođe u osmi redak, odnosno crni pješak dođe u prvi redak), tada se promovira. Promoviranje pješaka znači zamjena pješaka jednom od „težih" figura po izboru igrača. Pješak se može promovirati u sve figure osim kralja, a najčešće se promovira u kraljicu. U sljedećem potezu, ta figura može igrati kao i svaka druga figura. Broj pješaka koji mogu biti promovirani nije ograničen.

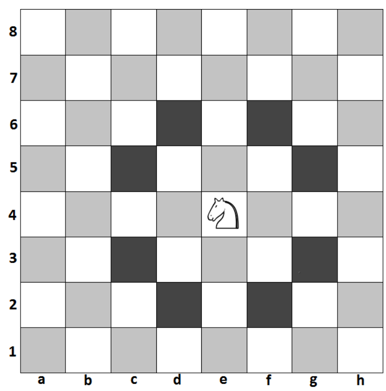
Pogrešno je mišljenje kako se pješak može promovirati samo u one figure koje su prethodno izgubljene. Tako je teoretski moguće imati devet kraljica ili do deset topova, lovaca i skakača ukoliko su svi pješaci promovirani.

Top je druga po jačini figura u šahu. Kreće se neograničen broj slobodnih polja lijevo i desno te naprijed i natrag, odnosno po linijama i retcima te ne može preskakati ostale figure. Svaki igrač na početku igre ima dva topa. Jednog na lijevoj i jednog na desnoj strani šahovske ploče, te se po tome razlikuju „kraljev top" i „damin top".



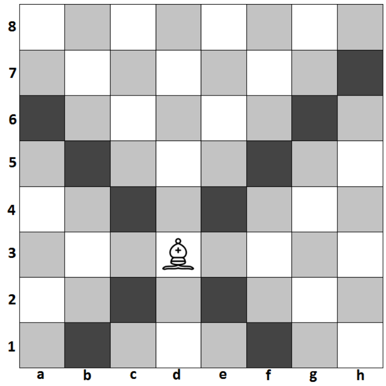
Slika 4: Kretanje topa na šahovskoj ploči

Skakač je jedina figura čije kretanje nije onemogućeno kada se neka druga figura nađe između njegovog trenutnog položaja i odredišne točke. Također, skakač može preskakati i svoje i protivničke figure. Kako bi lakše zapamtili kretanje skakača, zamislite veliko slovo „L": dva polja u jednom smjeru, zatim jedno polje pod kutem od 90° u odnosu na smjer kretanja. Dakle, stoji li u centru ploče, skakač ima osam raspoloživih polja na koje se može pomaknuti.



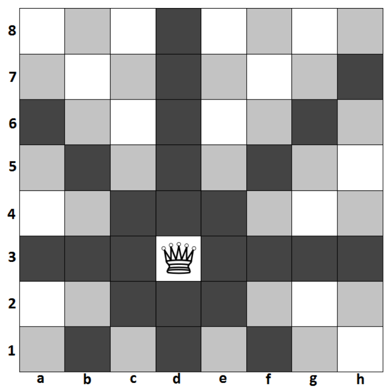
Slika 5: Kretanje skakača na šahovskoj ploči

Lovci se kreću neograničen broj slobodnih polja po dijagonalama i ne mogu preskakati druge figure. Kako se kreću uvijek po poljima iste boje, lovci se mogu nazvati „bjelopoljnim" ili „crnopoljnim" lovcima.



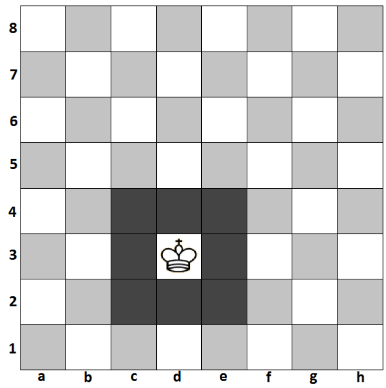
Slika 6: Kretanje lovca na šahovskoj ploči

Najjača figura u šahu je **kraljica**. Ona se kreće neograničen broj slobodnih polja u svim smjerovima: naprijed, natrag, lijevo, desno i dijagonalno te ne može preskakati figure.



Slika 7: Kretanje kraljice na šahovskoj ploči

Na kraju, opišimo kretanje **kralja**. Kralj se može kretati u svim smjerovima za jedno polje. Nikada ne smije doći na mjesto koje napada bilo koja suparnička figura (primjerice, ukoliko se lovac nalazi na mjestu d5, onda kralj ne može doći na mjesto c4 ni na mjesto e4). Kralj je najvažnija figura, ali jedna od najslabijih.



Slika 8: Kretanje kralja na šahovskoj ploči

2.4 Cilj igre

Cilj igre je zarobljavanje, to jest matiranje protivničkog kralja. Napad na kralja naziva se šahom.[1]

Mat je situacija kada je nakon našeg posljednjeg poteza suparnički kralj napadnut na takav način da se ne može obraniti. Postoje tri načina obrane od napada na kralja. Jedan način je uzeti napadačku figuru, drugi način je postaviti neku svoju figuru na liniju napada, ukoliko nije napadnut skakačem, a treći način je uzmaknuti kraljem na polje koje nije pod napadom.

Ako niti jedna obrana nije moguća, kralj je matiran. Prema tome, imamo šah mat, odnosno „Kralj je mrtav!”, čime smo došli do kraja igre.

3 Zadatci na šahovskoj ploči

3.1 Polimino na šahovskoj ploči

Polimino je skup pločica koje sadržavaju različit broj sukladnih kvadrata. Monomino ima jedan kvadrat, domino dva, trimino tri i tako dalje. Skup pločica sastavljenih od pet kvadrata poznat je pod imenom pentamino.

Zadatak 1. (**Domino na šahovskoj ploči**; zadatak preuzet iz [9])
Ako na šahovskoj ploči izrežemo dijagonalno dva suprotna polja a1 i h8 (ili h1 i a8), može li se tako dobivena ploča prekriti domino pločicama?

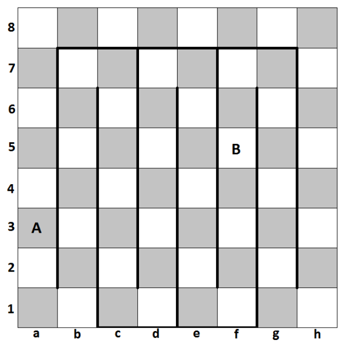
[1] šah - perzijski vladarski naslov

Rješenje. Svaka domino pločica prekriva jedno bijelo i jedno crno polje. To znači da domino pločicama možemo prekriti samo ploče s jednakim brojem crnih i bijelih polja. Ako šahovskoj ploči izrežemo dijagonalno dva suprotna polja, koja su oba iste boje, dobijemo ploču koja nema jednak broj crnih i bijelih polja pa je ne možemo prekriti domino pločicama. ◀

Zadatak 2. (**Domino na šahovskoj ploči**; zadatak preuzet iz [4])
Ako na šahovskoj ploči izrežemo bilo koja dva polja, može li se tako dobivena ploča prekriti domino pločicama?

Rješenje. Ako izrežemo dva polja iste boje, ne možemo dobivenu ploču prekriti domino pločicama (slijedi iz dokaza prethodnog zadatka).

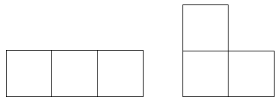
Ako izrežemo dva polja različitih boja, onda je prekrivanje moguće. Naime, domino pločice nižemo od prvog polja koje slijedi nakon odstranjenog polja (primjerice crnog odstranjenog polja A kao na slici 9) u smjeru kojeg diktira labirint na slici 9.



Slika 9: Šah i domino

Kada dođemo do drugog odstranjenog polja (bijelog odstranjenog polja B kao na slici 9) prekrit ćemo sva polja na putu od A do B. Uočimo da bi nam jedno polje ostalo neprekriveno da je B iste boje kao A. Zatim preskočimo odstranjeno polje B i nastavimo nizati pločice prema A. Kada opet dođemo do početno odstanjenog polja A prekrili smo sva polja na šahovskoj ploči osim polja A i B. ◀

Zadatak 3. (**Trimino na šahovskoj ploči**)
Sa šahovske ploče uklonjena su dva disjunktna kvadrata 2×2. *Može li se tako nastala ploča prekriti trimino pločicama*



(a) (b)

bez preklapanja?

Rješenje. Nastala ploča ima

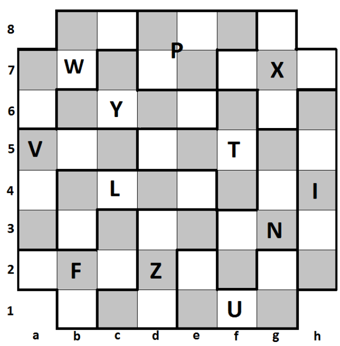
$$8 \cdot 8 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64 - 8 = 56$$

polja. Broj 56 nije djeljiv s 3 pa se takva ploča ne može prekriti pločicama koje pokrivaju po tri polja. ◄

Zadatak 4. (**Pentamino na šahovskoj ploči**; zadatak preuzet iz [5])
Može li se pentaminom prekriti šahovska ploča bez sva četiri polja u kutovima?

Rješenje. Odredimo prvo oblike pločica s pet kvadrata i koliko ih različitih ukupno ima. Najjednostavniji oblik je onaj u kojem imamo pet kvadrata u jednom retku. Zatim, imamo oblike u kojima su četiri kvadrata u jednom retku i peti kvadrat u drugom retku, pa oblike u kojima su po tri kvadrata u jednom retku, a dva u drugom i tako dalje. Pločice koje se mogu rotacijom ili zrcaljenjem prevesti jedna u drugu su zapravo jednake. Na kraju ćemo dobiti skup od dvanaest pločica koje podsjećaju na slova T, U, V, W, X, Y, Z, F, I, L, P, N.

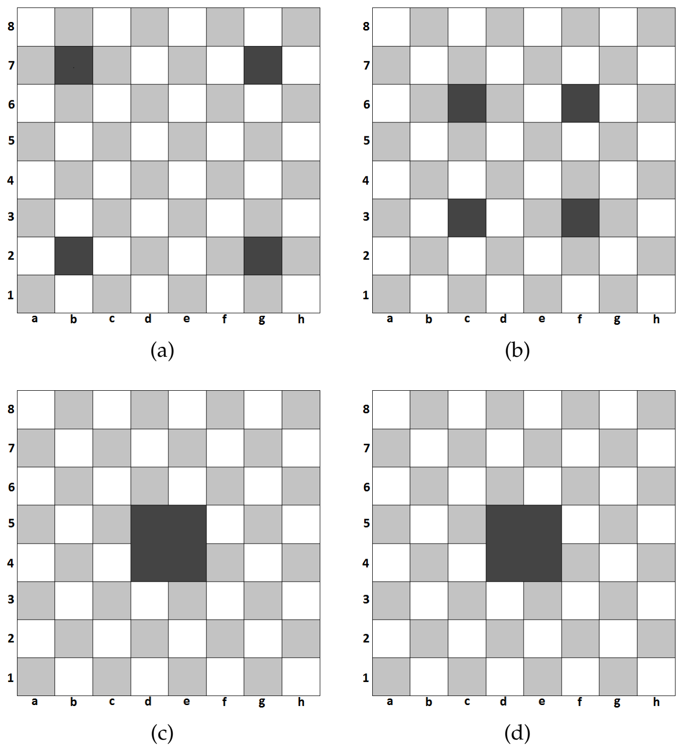
Pogledajmo sliku 10.



Slika 10: Pentamino

Dakle, pentaminom se može prekriti šahovska ploča bez sva četiri polja u kutovima.

Dodatno, provjerite mogu li se šahovske ploče prikazane na slici 11



Slika 11: Šahovska ploča i pentamino

prekriti pentaminom? ◀

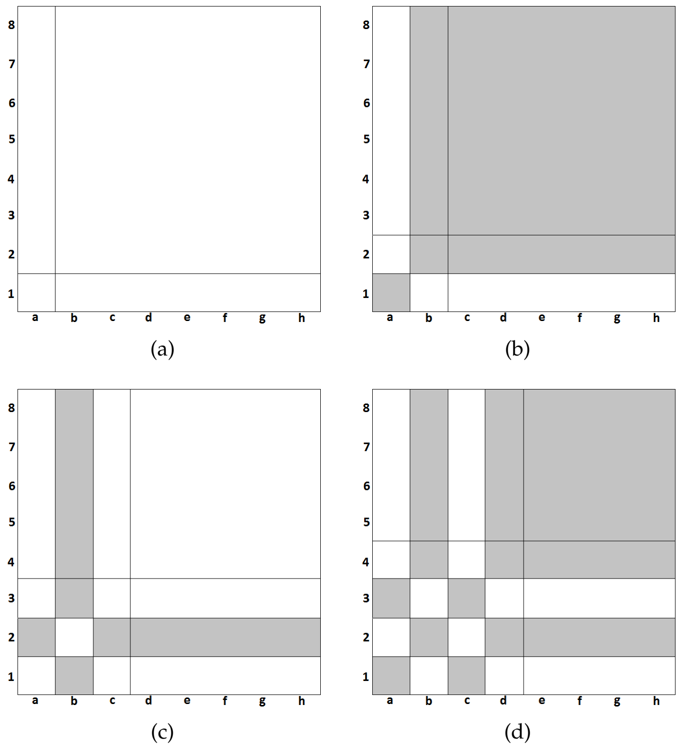
3.2 Boje na šahovskoj ploči

Zadatak 5. (zadatak preuzet iz [8])
Na koliko se načina može izabrati jedno crno i jedno bijelo polje na šahovskoj ploči tako da se ne nalaze u istom retku niti u istoj liniji?

Rješenje. Jedno crno polje možemo odabrati na 32 načina. Njegovim izborom onemogućuje se izbor bijelih polja iz njegovog retka i njegove linije. Takvih bijelih polja ima ukupno 8 pa bijelo polje možemo izabrati na 24 načina. Znači, izbor je moguć na $32 \cdot 24 = 768$ različitih načina. ◀

Zadatak 6. (zadatak preuzet iz [8])
Kvadrat bijele boje treba podijeliti pravcima a_1 i b_1, koji su paralelni sa stranicama, na 4 dijela. Gornji desni i donji lijevi kvadrat treba obojiti crno, zatim treba, konstruirati pravce a_2 i b_2 paralelne sa stranicama kvadrata, a sve u gornjem desnom i donjem lijevom kvadratu promijeniti u suprotne boje (bijelu u crnu, a crnu u bijelu boju) i tako dalje. Koliki je najmanji broj takvih postupaka potrebno da se dobije šahovska ploča?

Rješenje. Promotrimo sliku 12.



Slika 12: Pravci na šahovskoj ploči

Dovoljno je 7 koraka. Primjerice, neka je prvi korak postavljanje pravaca a_1 i b_1 tako da se sijeku u gornjem desnom kutu polja $a1$. Zatim uzmemo pravce a_2 i b_2 takve da se sijeku u gornjem desnom kutu polja $b2$ i tako dalje. Posljednji, sedmi korak je postavljanje pravaca a_7 i b_7 tako da se sijeku u gornjem desnom kutu polja $g7$. Uočimo, nužno je 7 koraka jer poslije svakog koraka dobivamo jednu uspravnu liniju između crnih i bijelih polja, a na šahovskoj ploči ima 7 takvih linija. Dakle, za svaku liniju po jedan korak. ◀

3.3 Brojevi na šahovskoj ploči

Zadatak 7. (zadatak preuzet iz [7])
U polja šahovske ploče upisani su redom neparni brojevi. U prvom retku upisani su brojevi:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15,$$

u drugom retku brojevi:

$$17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31$$

tako da je broj 17 *iznad broja* 1*, broj* 19 *iznad broja* 3 *i tako dalje,*
u trećem retku brojevi:

$$33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47$$

i tako redom do popune ploče. Među njima je izabrano 8 *brojeva tako da se u svakoj liniji i svakom retku nalazi točno jedan od njih. Koliki je zbroj tih brojeva i koliko se različitih vrijednosti zbrojeva na taj način može dobiti?*

Rješenje. Na primjer, imamo

$$1 + 29 + 47 + 59 + 73 + 87 + 101 + 115 = 512$$

ili

$$3 + 17 + 37 + 55 + 73 + 91 + 109 + 127 = 512.$$

Uočimo da su oba zbroja jednaka 512. Tvrdimo da je taj zbroj uvijek 512 bez obzira na način biranja brojeva. Pogledajmo zašto. Prvo odredimo broj čije su koordinate (i, j), gdje je i broj retka, a j broj linije u kojoj se nalazi broj. Neka su i, j elementi skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, dakle brojimo od 0. Da smo upisivali redom $1, 2, 3, \ldots, 64$ a ne samo neparne brojeve, tada bi na mjestu (i, j) bio broj

$$8i + j.$$

Ovako, s obzirom na to da upisujemo samo neparne brojeve $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$, zamijenimo n s $2n + 1$ pa se na mjestu (i, j) nalazi broj

$$2 \cdot (8i + j) + 1 = 16i + 2j + 1.$$

7	113	115	117	119	121	123	125	127
6	97	99	101	103	105	107	109	111
5	81	83	85	87	89	91	93	95
4	65	67	69	71	73	75	77	79
3	49	51	53	55	57	59	61	63
2	33	35	37	39	41	43	45	47
1	17	19	21	23	25	27	29	31
0	1	3	5	7	9	11	13	15
	0	1	2	3	4	5	6	7

Slika 13: Neparni brojevi na šahovskoj ploči

Recimo da su odabrani brojevi na mjestima (i_1, j_1), (i_2, j_2), $\ldots$, (i_8, j_8). Ne znamo pojedine i-ove i j-ove ni njihov odnos, ali ono što sigurno znamo jest da je u svakoj liniji točno jedan broj odabran, dakle j-ovi su međusobno različiti. No kako ih ima 8 iz 8-članog skupa $\{0, 1, \ldots, 7\}$ vidimo da je skup $\{j_1, j_2, \ldots, j_8\}$ upravo jednak skupu $\{0, 1, \ldots, 7\}$, odnosno zbroj je jednak

$$j_1 + j_2 + \cdots + j_8 = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

zbog komutativnosti i asocijativnosti zbrajanja.

Kako je i u svakom retku točno jedan broj odabran, potpuno jednako dobijemo

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_8 = 28.$$

Zbroj svih odabranih brojeva jednak je

$$(16i_1 + 2j_1 + 1) + (16i_2 + 2j_2 + 1) + \cdots + (16i_8 + 2j_8 + 1)$$

što je jednako

$$16(i_1 + i_2 + \cdots + i_8) + 2(j_1 + j_2 + \cdots + j_8) + 8 \cdot 1 = 16 \cdot 28 + 2 \cdot 28 + 8 = 512.$$

◀

Zadatak 8. (zadatak preuzet iz [9])
Upišimo na 64 polja šahovske ploče redom brojeve od 1 do 64 tako da u prvi redak upišemo brojeve od 1 do 8, u drugi redak brojeve od 9 do 16 i tako dalje. Proizvoljno postavimo 8 topova (na jedan od 40 320 načina) tako da nijedan ne napada drugoga. Koliki je zbroj brojeva onih polja koja zauzimaju postavljeni topovi?

Rješenje. Znamo da se topovi ne napadaju međusobno ako se u svakom retku i svakoj liniji nalazi točno jedan top. Slično kao u prethodnom zadatku na mjestu (i, j) nalazi se broj

$$8i + j + 1$$

i

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_8 = 28 = j_1 + j_2 + \cdots + j_8.$$

Zbroj brojeva onih polja koja zauzimaju postavljeni topovi jednak je

$$(8i_1 + j_1 + 1) + (8i_2 + j_2 + 1) + \cdots + (8i_8 + j_8 + 1)$$

što je jednako

$$8(i_1 + i_2 + \cdots + i_8) + (j_1 + j_2 + \cdots + j_8) + 8 \cdot 1 = 8 \cdot 28 + 28 + 8 = 260.$$

◀

3.4 Četverokuti na šahovskoj ploči

Zadatak 9. (**Pravokutnici na šahovskoj ploči**; zadatak preuzet iz [2])
Koliko je pravokutnika na šahovskoj ploči ako su ti pravokutnici složeni od kvadratića iste ploče?

Rješenje. Razmotrimo najprije traku 8×1 s osam kvadratića u nizu. Na toj traci je 8 kvadratića 1×1, 7 pravokutnika 2×1, 6 pravokutnika 3×1 i tako dalje. Konačno, i sama je traka jedan pravokutnik. Dakle, u svakoj od 8 vodoravnih traka imamo

$$8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$$

pravokutnika visine 1, pa na cijeloj šahovskoj ploči imamo 8×36 pravokutnika visine 1.

Uzmimo sada vodoravnu traku širine 2, dakle traku 8×2. Osim pravokutnika visine 1 koje smo već pobrojili, ona sadrži i

$$8 + 7 + \cdots + 1 = 36$$

pravokutnika visine 2 (koliko je i pravokutnika visine 1 u traci širine 1). Stoga se na cijeloj šahovskoj ploči, koja sadrži 7 traka širine 2, nalazi 7×36 pravokutnika visine 2.

Slično, na svakoj od 6 vodoravnih traka širine 3 imamo 36 pravokutnika visine 3, dakle na cijeloj šahovskoj ploči se nalazi 6×36 pravokutnika visine 3.

Nastavljajući indukcijom, zaključujemo da je ukupan broj pravokutnika na šahovskoj ploči

$$(8+7+6+\cdots+2+1)\cdot 36 = 36\cdot 36 = 1296.$$

◀

Zadatak 10. (**Kvadrati na šahovskoj ploči**; zadatak preuzet iz [6])
Koliko je kvadrata, različitih po veličini i/ili položaju, moguće nacrtati na šahovskoj ploči tako da svaki od njih sadrži cijeli broj polja?

Rješenje. Razmotrimo najprije traku 8×1 s osam kvadratića u nizu. Na toj traci je 8 kvadrata 1×1. Dakle, u svakoj od 8 vodoravnih traka imamo 8 kvadrata sa stranicom duljine 1, pa na cijeloj šahovskoj ploči imamo 8×8 kvadrata sa stranicom duljine 1.

Uzmimo sada vodoravnu traku širine 2, dakle traku 8×2. Osim kvadrata sa stranicom duljine 1 koje smo već pobrojali, ona sadrži 7 kvadrata sa stranicom duljine 2. Stoga se na cijeloj šahovskoj ploči, koja sadrži 7 traka širine 2, nalazi 7×7 kvadrata sa stranicom duljine 2.

Slično, na svakoj od 6 vodoravnih traka širine 3 imamo 6×6 kvadrata sa stranicom duljine 3.

Nastavljajući indukcijom, zaključujemo da je ukupan broj kvadrata, različitih po veličini i/ili položaju, na šahovskoj ploči

$$8\cdot 8+7\cdot 7+6\cdot 6+\cdots+2\cdot 2+1\cdot 1 = 204.$$

◀

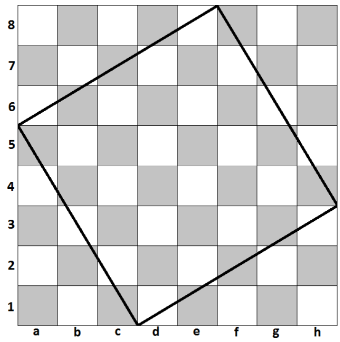
Zadatak 11. (**Površina polja šahovske ploče**; zadatak preuzet iz [7])
Jedna šahovska ploča ima površinu 17 dm^2 *i* 64 cm^2*. Kolika je površina i koliki je opseg jednog polja ako udaljenost između rubova šahovske ploče i rubova krajnjih polja iznosi* 1 cm*?*

Rješenje. Kako šahovska ploča ima oblik kvadrata čija je površina 17 dm^2 i 64 cm^2, odnosno 1764 cm^2, duljina jedne stranice tog kvadrata jednaka je 42 cm. Kada se od 42 cm oduzmu 2 cm, koliko iznose obje udaljenosti od ruba ploče, ostaje 40 cm, što predstavlja ukupnu duljinu svih 8 stranica šahovskih polja u jednom retku. Prema tome, duljina stranice jednog polja je 5 cm pa je površina jednog polja 25 cm^2, a opseg 20 cm. ◀

3.5 Dokaz Pitagorina poučka na šahovskoj ploči

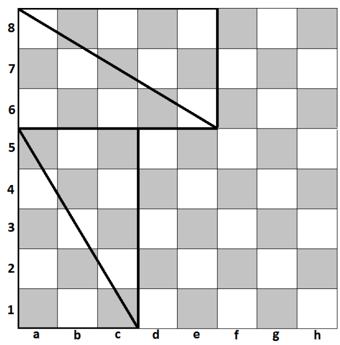
Zadatak 12. (zadatak preuzet iz [9])
Pitagorin poučak: Površina kvadrata nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednaka je zbroju površina kvadrata nad katetama pravokutnog trokuta.
Dokažite Pitagorin poučak pomoću šahovske ploče.

Rješenje. Nacrtajmo kvadrat na šahovskoj ploči kao što je prikazano na slici 14.



Slika 14: Kvadrat na šahovskoj ploči

Uočimo četiri sukladna pravokutna trokuta čije su hipotenuze upravo stranice nacrtanog kvadrata, a zatim ih složimo na način prikazan slikom 15.



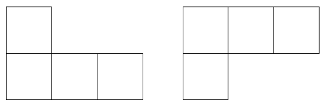
Slika 15: Pravokutni trokuti na šahovskoj ploči

Sada lako vidimo kako su se pojavila još dva kvadrata različitih duljina stranica te da je stranica većeg kvadrata jednaka duljoj kateti pravokutnog trokuta, a stranica manjeg kvadrata kraćoj kateti pravokutnog trokuta. Kako je zbroj površina kvadrata i pravokutnih trokuta na obje slike jednak, možemo zaključiti da je površina kvadrata na prvoj slici jednaka zbroju površina kvadrata nad katetama na drugoj slici.

Uočimo da ovakav dokaz vrijedi i općenito, za pravokutni trokut kome su duljine kateta bilo kakvi brojevi a i b, pri čemu za „ploču" treba uzeti kvadrat čija je stranica duljine $a + b$. ◀

3.6 Zadatci s natjecanja

Zadatak 13. (Općinsko - gradsko natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske, 1994., 4. razred)
Može li se šahovska ploča bez kutnih polja prekriti s 15 *pločica sljedećih oblika?*



(a) (b)

Rješenje. Podijelit ćemo sva polja šahovske ploče na 2 disjunktna skupa. Obojimo redove 1, 3, 5 i 7 crvenom, a redove 2, 4, 6 i 8 plavom bojom. Pločica postavljena na ploču može prekrivati ili 3 crvena i 1 plavo polje ili 3 plava i 1 crveno polje. Označimo s x broj pločica koje prekrivaju 3 crvena polja i 1 plavo polje. Tada $15 - x$ pločica prekriva 1 crveno i 3 plava polja. Ukupan broj crvenih polja je 32. Dakle, vrijedi

$$3x + (15 - x) = 32$$

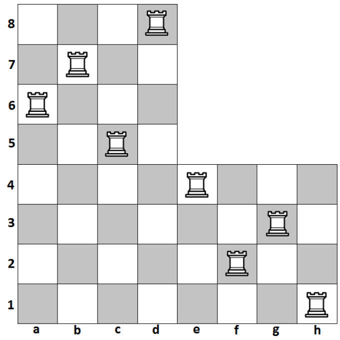
pa je $x = \frac{17}{2}$. Zato zaključujemo da traženo prekrivanje nije moguće. ◀

Zadatak 14. (Školsko natjecanje iz matematike, 2013., 4. razred srednje škole A razina)
Gornja desna četvrtina šahovske ploče je pokrivena papirom. Koliko najviše topova možemo postaviti na preostali dio šahovske ploče tako da se međusobno ne napadaju? Na koliko se načina to može napraviti?

Rješenje. Podsjetimo da se dva topa međusobno napadaju ako se nalaze u istom retku ili istoj liniji. Prema tome, očito nije moguće staviti više od 8 topova jer u svakom retku može biti najviše jedan. Primjer na slici 16 pokazuje kako je 8 topova moguće rasporediti na traženi način.

Razmotrimo na koje sve načine je to moguće napraviti. Jasno je da u donjoj polovini ploče ne može biti više od 4 topa, pa u gornjem dijelu ploče, dakle u gornjem lijevom dijelu ploče, moraju biti 4 topa, svaki u svom retku i u svojoj liniji. U donjoj lijevoj četvrtini ploče ne može biti nijedan top jer su sve te linije već zauzete, pa su još 4 topa u donjoj desnoj četvrtini.

Četiri topa na ploči 4×4 možemo rasporediti na $4! = 24$ načina. Naime,



Slika 16: Topovi na šahovskoj ploči

u prvom retku top može biti na bilo kojem od 4 mjesta. U drugom retku top ne može biti u istoj liniji kao prvi top, pa postoje 3 mogućnosti. U trećem retku su još samo 2 nenapadnuta polja i konačno u četvrtom retku ostalo je samo jedno moguće polja. Stoga je ukupan broj mogućih rasporeda jednak $24^2 = 576$. ◀

Zadatak 15. (Školsko natjecanje iz matematike, 2014., 3. razred srednje škole A razina)
U svako polje šahovske ploče upisan je po jedan cijeli broj. Poznato je da je zbroj svih brojeva na bijelim poljima jednak 26*, a zbroj svih brojeva u neparnim linijama jednak* 43*. Ako promijenimo predznake svih brojeva na bijelim poljima, koliki će biti zbroj svih brojeva u neparnim retcima nakon te promjene?*

Rješenje. Neka je C_L i B_L zbroj brojeva na crnim i bijelim poljima u neparnim linijama, te C_R i B_R zbroj brojeva na crnim i bijelim poljima u neparnim retcima. Uočimo da neparni retci i neparne linije sadrže ista crna polja, odnosno da je $C_L = C_R$. Nadalje, uočimo da neparni retci i neparne linije nemaju niti jedno zajedničko bijelo polje, a zajedno pokrivaju sva bijela polja. Zato je

$$B_L + B_R = 26.$$

Iz zadatka znamo da je

$$C_L + B_L = 43.$$

Nakon promjene predznaka na bijelim poljima, zbroj u neparnim retcima jednak je

$$C_R - B_R = C_R - (26 - B_L) = C_L + B_L - 26 = 43 - 26 = 17.$$

◀

Zadatak 16. (Županijsko natjecanje iz matematike, 2014., 1. razred srednje škole A razina)
Ploča 8×8 *na početku je obojena u dvije boje, crnu i bijelu, tako da su polja koja imaju zajedničku stranicu različitih boja, kao standardna šahovska ploča. U pojedinom potezu treba odabrati jedan redak ili liniju i u svakom od osam polja u tom retku ili liniji promijeniti boju iz crne u bijelu i obrnuto. Može li se konačnim nizom takvih poteza postići da točno jedno polje na ploči bude crno?*

Rješenje. U svakom potezu ćemo promijeniti boju na točno 8 polja. Ako je k takvih polja crno, onda je $8-k$ od tih polja bijelo. Označimo s C ukupan broj crnih polja prije nekog poteza. Nakon tog poteza će ukupan broj crnih polja biti jednak

$$C - k + (8-k) = C + 8 - 2k.$$

Zaključujemo da će parnost ukupnog broja crnih polja uvijek biti ista. Budući da je na početku ukupan broj crnih polja jednak 32, što je paran broj, nemoguće je da nakon bilo kojeg poteza broj crnih polja bude jednak 1. Prema tome, nije moguće konačnim nizom navedenih poteza postići da točno jedno polje na ploči bude crno. ◀

Zadatak 17. (Školsko natjecanje iz matematike, 2017., 2. razred srednje škole A razina)
Za rastavljanje šahovske ploče na disjunktne pravokutnike kažemo da je raznovrsno ako su ispunjena sljedeća dva uvjeta:

1) *svaki pravokutnik u rastavu sadrži jednak broj crnih i bijelih polja,*

2) *ne postoje dva pravokutnika koja sadrže isti broj polja.*

Odredite najveći prirodan broj n za koji postoji raznovrsno rastavljanje šahovske ploče na n pravokutnika.

Rješenje. Prema uvjetu 1) zadatka svaki pravokutnik mora sadržavati paran broj polja. Najmanji takvi pravokutnici su s $2, 4, 6$ i tako dalje polja, a kako želimo rastaviti ploču na što više pravokutnika, cilj nam je odabirati najmanje pravokutnike i to različitih veličina zbog uvjeta 2) zadatka. Zbrajanjem redom broja polja u tim najmanjim pravokutnicima dobivamo da je

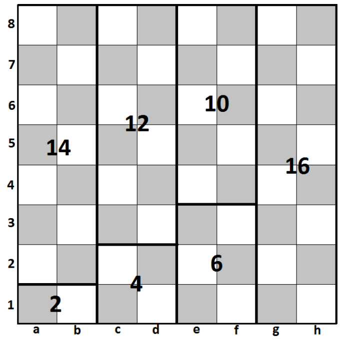
$$2+4+6+8+10+12+14 = 56 < 64$$

i

$$2+4+6+8+10+12+14+16 = 72 > 64$$

pa je najviše što ih možemo odabrati 7.

Primjer prikazan slikom 17 pokazuje kako zaista postoji raznovrsno rastavljanje šahovske ploče na 7 pravokutnika.



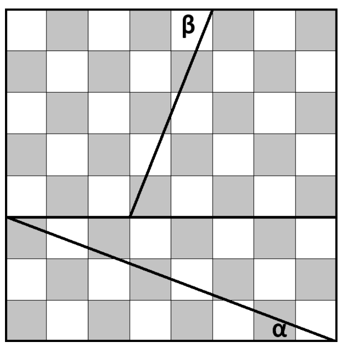
Slika 17: Rastav šahovske ploče na 7 pravokutnika

Posebno, uočimo da ovo nije jedini primjer takvog rastava. Postoje razni rastavi šahovske ploče na 7 pravokutnika koji imaju i drugačije površine nego u navedenom primjeru. ◀

3.7 Zadatci

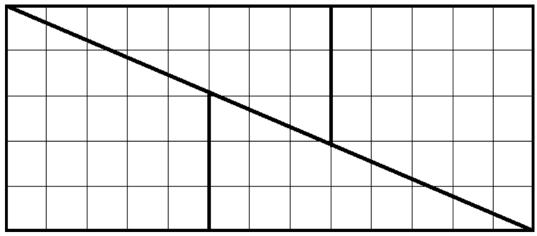
U nastavku navodimo nekoliko zadataka za samostalno rješavanje.

Zadatak 18. (Općinsko - gradsko natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske, 1994., 3. razred)
Šahovska ploča razrezana je na 4 *dijela kao na slici 18*



Slika 18: Šahovska ploča 8×8

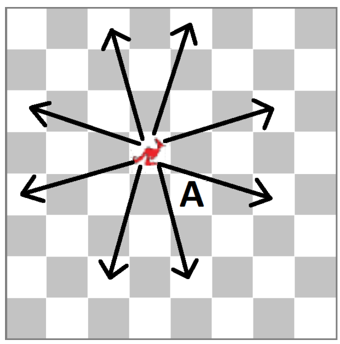
od kojih se može složiti pravokutnik 13×5 *kao na slici 19.*



Slika 19: Pravokutnik 13×5

Služeći se kutovima α *i* β *sa slike 18 objasnite dobiveni „paradoks"* $64 = 65$.

Zadatak 19. (Klokan, 2015., Benjamin, 6. i 7. razred osnovne škole) *Izmišljena je nova šahovska figura „klokan". Pomiče se ili* 3 *polja naprijed ili natrag pa* 1 *lijevo ili desno, ili* 3 *polja lijevo ili desno pa* 1 *naprijed ili natrag kao što je prikazano na slici 20.*



Slika 20: Klokan na šahovskoj ploči

Koliko će najmanje poteza trebati klokanu da od kvadrata gdje se upravo nalazi dođe do kvadrata A?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Literatura

[1] Chess.com, *How to Play Chess: Rules and Basics*, `https://www.chess.com/learn-how-to-play-chess`, 2018.

[2] B. Dakić, *Suma* $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, Matematika i škola, **39**(2006./2007.), 170-174.

[3] A. Horvatek, *Natjecanja iz matematike u RH*, `http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/natjecanja-iz-matematike.htm`, 2008.

[4] L. Jukić, *Matematika kroz igru domino*, Osječki matematički list, **7**(2007.), 69-79.

[5] P. Mladinić, *Pentamino*, MATKA 3, **12**(1994./1995.), 155-157.

[6] S. Režek, *Matematičko-šahovska igra i razonoda*, MATKA 22, **88**(2013./2014.), 280-283.

[7] S. Režek, *Šahomatematika – matematičko-šahovska razonoda*, MATKA 24, **93**(2015./2016.), 24-26.

[8] S. Režek, *Boje na šahovnici*, MATKA 25, **97**(2016./2017.), 22-24.

[9] D. Vukojević, R. Scitovski, *Matematika na šahovskoj ploči*, MATKA 3, **12**(1994./1995.), 146-152.