Matematička indukcija

Matija Bašić

Što je matematička indukcija?

Princip matematičke indukcije jedan je od najvažnijih principa kojim se služimo u dokazivanju vrlo različitih matematičkih tvrdnji diskretnih područja, bez obzira bila to algebra, teorija brojeva, kombinatorika, kombinatorna geometrija, teorija grafova... Indukcija je u logici način zaključivanja od posebnog prema općem, pa je to zapravo metoda kojom se na temelju posebnih slučajeva dokazuje općenita tvrdnja. U Peanovim aksiomima matematička indukcija pojavljuje se kao aksiom kojim se aksiomatiziraju prirodni brojevi. Za početnike, koji se prvi puta susreću s ovim načinom dokazivanja, važno je naglasiti da se indukcijom može dokazivati samo ako varijabla o kojoj ovisi tvrdnja poprima vrijednosti iz skupa prirodnih brojeva, odnosno ako se između skupa iz kojeg varijabla poprima vrijednosti i skupa prirodnih brojeva može uspostaviti bijekcija. Kako, dakle, glasi princip matematičke indukcije? U općem obliku,

tvrdnja $T(n)$ vrijedi za svaki $n \geq n_0$ ako vrijedi tvrdnja $T(n_0)$, te ako iz $T(k)$ slijedi $T(k+1)$ za svaki k za koji je tvrdnja definirana.

Svaki dokaz indukcijom ima tri važna elementa. Prvi je **baza** kojom se dokazuje tvrdnja za n_0; drugi je **pretpostavka**, kojom se pretpostavlja da tvrdnja vrijedi za sve $n = k$; treći je element **korak** izvođenje tvrdnje za $n = k+1$ uz korištenje pretpostavke. Ovdje smo namjerno koristili riječ '*element*', a ne npr. '*slučaj*' ili '*faza*', jer su pretpostavka i korak indukcije uvijek dvije nerazdvojive tvrdnje. Naime, želimo li objasniti, odnosno shvatiti, princip matematičke indukcije, važno je uočiti implikaciju $T(k) \Rightarrow T(k+1)$ i vidjeti da je to zapravo jedna tvrdnja $-$ tvrdnja koja tvrdi da je $T(k+1)$ istinita **ako** je istinita $T(k)$.

Primjer s dominima

Pojasnimo ovo primjerom. Zamislite da imate složen niz pločica domina i indukcijom želite dokazati da će pasti n-ta pločica u nizu. Potrebno je dokazati da će $(k+1)$-vi domino srušiti k-ti domino, jer to znači da će n-ti domino pasti ako je prije njega već pao prethodnik. Nedostaje li vam ovdje nešto? Naravno, zdrava logika vam govori da to nije dovoljno. Ako ne padne prvi domino neće pasti ni jedan, a upravo prvi domino u takvoj igri morate srušiti sami. Zato je baza indukcije, iako u samom dokazu često najlakši element, važna i ne smije ju se nikad izostaviti. Dakle, indukcijom bismo u dvije tvrdnje (bazi i implikaciji koja veže pretpostavku i korak) dokazali da će prvi domino srušiti drugi, drugi treći, treći četvrti i tako dalje sve dok svi domini u nizu ne padnu, a to će obuhvatiti i traženu n-ti domino. Uočimo još da je u ovom primjeru n_0 imao vrijednost 1, jer se kretalo sa rušenjem prve domine.

$$T(1) \Rightarrow T(2) \Rightarrow T(3) \Rightarrow \ldots \Rightarrow T(n) \Rightarrow \ldots$$

Zanimljiv je i opis Georgea Polya koji kaže da je indukcija 'pohlepna' i ako joj date prst, uzet će vam cijelu ruku. Pružite li joj mali prst, uzet će vam taj, pa drugi, pa treći i tako sve redom čak i ako ih imate beskonačno mnogo.

Nekoliko primjera za početak

Ova vrlo praktična, važna i jednostavna metoda primjenjiva je na razne zadatke, a pokazat ćemo kako je koristimo u dokazima vezanim uz algebarske izraze i identitete poput zbrojeva ili umnožaka, uz nejednakosti, geometriju, teoriju brojeva ili čak kombinatoriku... Zadaci na kojima se uči primjena indukcije često su jednostavni i šablonski, ali indukcijom se mogu dokazivati i vrlo složene tvrdnje koje traže mnogo kreativnosti i matematičke snalažljivosti.

Primjer 1. Dokaži da vrijedi $1+2+3+4+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ za sve prirodne brojeve.
Rješenje. Baza indukcije: baza se najčešće svodi na uvrštavanje broja n_0 u tvrdnju koju dokazujemo. U ovom primjeru to je broj 1.[1]

$$T(n):\ 1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$T(1):\ 1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}=1.$$

Pretpostavku čini uvrštavanje vrijednosti k u tvrdnju. Pisanje pretpostavke u nekim ću dokazima izostaviti jer smatram da je ona vrlo slična općenitoj tvrdnji i da izostavljanjem njezinog ispisivanja, ali ne i značenja za dokaz, neću izgubiti na vjerodostojnosti dokaza, a uštedjet ću vrijeme i papir. Ipak, za ovaj primjer pretpostavka glasi

$$T(k):\ 1+2+\cdots+k=\frac{k\cdot(k+1)}{2}.$$

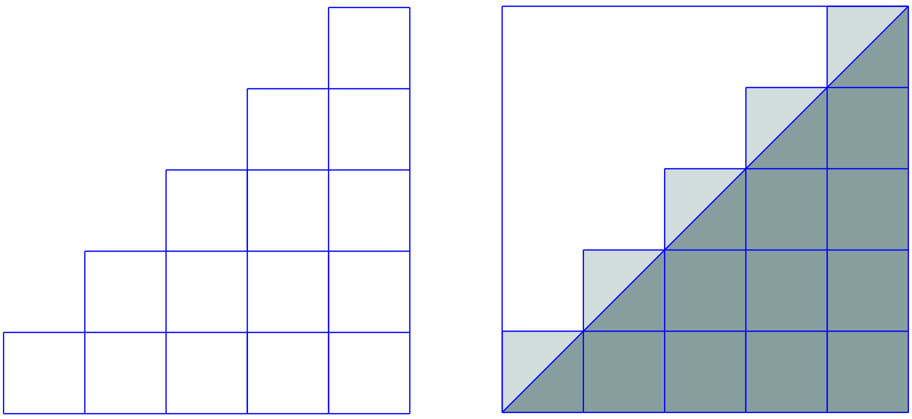
Korak je najteži dio dokaza i zapravo je sama njegova srž. Evo kako se izvodi. Želimo dokazati tvrdnju

$$T(k+1):\ 1+2+\cdots+(k+1)=\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}.$$

Krenimo od lijeve strane jednakosti s ciljem da dobijemo desnu kroz niz algebarskih transformacija. Naš će se rad svesti na korištenje pretpostavke, dakle na uočavanje sličnosti između izraza $T(k)$ i $T(k+1)$, te na algebarsko '*petljanje*'.

$$\underbrace{1+2+\cdots+k}_{T(k)}+(k+1)=\text{prema pretpostavci}=\underbrace{\frac{k(k+1)}{2}}_{T(k)}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

To je bilo i traženo. ✓



Koliko je $1+2+3+4+5$? Površina tamno sivog i svijetlo sivog odnosno $\frac{5^2}{2}+\frac{5}{2}=15$.

Najvažnije je uočiti način na koji smo iskoristili pretpostavku, zamijenivši izraz koji je odgovarao lijevoj strani jednakosti tvrdnje $T(k)$ izrazom s desne strane te iste tvrdnje.

Primjer 2. Dokaži da je $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ za sve prirodne brojeve.
Rješenje.

$$T(n):\ 1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

[1] Ubuduće, ako nije drugačije navedeno, za bazu ćemo uvijek uzimati broj 1.

Baza:

$$T(1):\ 1^2 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{2\cdot 3}{6} = 1,$$

što je istinito.

Pretpostavka je jasna, a može se napisati tako da slovo n zamijenimo slovom k u tvrdnji $T(n)$.

$$T(k):\ 1^2+2^2+\cdots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

$$T(k+1):\ \ 1^2+2^2+\cdots+(k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Korak ćemo izvesti slično kao u primjeru 1:

$$\underbrace{1^2+2^2+\cdots+k^2}_{T(k)}+(k+1)^2 = \underbrace{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}_{T(k)}+(k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

što je bilo traženo. ✓

Zadatak 1. Dokaži da je $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ za sve prirodne brojeve.

Algebarski identiteti i malo teorije brojeva

Matematičkom indukcijom ne može se izračunati nikakva vrijednost, ali se može dokazati istinitost neke hipoteze (tvrdnje). Tako u zadacima u kojima ne znamo koliko iznosi neki izraz ovisan o prirodnom broju možemo na temelju vrijednosti koje sami izračunamo za nekoliko malih brojeva postaviti općenitu hipotezu i dokazati je indukcijom. Pokažimo to na primjeru.

Primjer 3. Odredimo koliko je $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+99\cdot 100$.
Rješenje. Ideja je odrediti eksplicitnu formulu za izraz $f(n)=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n\cdot(n+1)$. Uvrstimo za n redom brojeve $1,2,3,4$ i dobit ćemo:

$$f(1)=2=2\cdot 1,$$

$$f(2)=8=2\cdot 4,$$

$$f(3)=20=4\cdot 5,$$

$$f(4)=40=4\cdot 5\cdot 2.$$

Rastavivši ovako sve vrijednosti koje smo dobili na faktore, na ovaj način vidimo da bi množenje tih vrijednosti s 3 dalo umnožak tri uzastopna prirodna broja, pa postavljamo hipotezu:

$$f(n)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Provjerimo indukcijom istinitost te tvrdnje:

$$T(n):\ 1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n\cdot(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Bazu indukcije smo već izveli i to čak za četiri vrijednosti $n_0=1, n_1=2, n_2=3, n_3=4$. Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja $T(k)$.Tada je

$$T(k+1): \underbrace{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+k(k+1)}_{T(k)}+(k+1)(k+2)=\underbrace{\frac{k(k+1)(k+2)}{3}}_{T(k)}+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

Sada možemo mnogo lakše izračunati $f(99)=\frac{99\cdot 100\cdot 101}{3}=333300$. ✓

Prethodna tri primjera bili su neki algebarski identiteti, oni su izražavali eksplicitne formule parcijalnih zbrojeva nekih nizova. Jedan od najzanimljivijih nizova je *Fibonaccijev* niz,[2] koji je defiran ovako:

$$F_0=0,\ F_1=1,\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n,\ \forall n\in\mathbb{N}_0$$

Evo i nekoliko prvih članova toga niza:

$$0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,\ldots$$

Primjer 4. Dokažimo $F_{n-1}F_{n+1}=F_n^2+(-1)^n$ za sve prirodne brojeve n.
Rješenje.

$$T(n):\ F_{n-1}F_{n+1}=F_n^2+(-1)^n$$
$$T(1):\ F_0F_2=0\cdot 1=0=1-1=F_1^2+(-1)^1$$
$$T(k):\ F_{k-1}F_{k+1}=F_k^2+(-1)^k$$
$$T(k+1):\ F_kF_{k+2}=F_{k+1}^2+(-1)^{k+1}$$

Koristeći definiciju *Fibonaccijevog* niza dobivamo

$$F_kF_{k+2}=F_k(F_k+F_{k+1})=\underbrace{F_k^2}_{T(k)}+F_kF_{k+1}=\underbrace{F_{k-1}F_{k+1}-(-1)^k}_{T(k)}+F_kF_{k+1}=$$

$$=F_{k+1}(F_{k-1}+F_k)+(-1)^{k+1}=F_{k+1}^2+(-1)^{k+1}.$$

A to je i trebalo dokazati. ✓

Zadatak 2. Dokaži da vrijedi

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{5}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{5}\right)^n\right].$$

Primjer 5. Dokažimo $(n+1)(n+2)\ldots 2n=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)$ za sve prirodne brojeve n.
Rješenje.

$$T(n):\ (n+1)(n+2)\ldots 2n=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)$$
$$T(1)=1\cdot 2=2=2^1\cdot 1$$
$$T(k):\ (k+1)(k+2)\ldots 2k=2^k\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)$$
$$T(k+1):\ (k+2)(k+3)\ldots(2k+2)=2^{k+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k+1)$$
$$\underbrace{(k+2)(k+3)\ldots 2k}_{T(k)}(2k+1)\underbrace{(2k+2)}_{2(k+1)}=2\underbrace{(k+1)(k+2)(k+3)\ldots 2k}_{T(k)}(2k+1)=$$
$$=2\cdot\underline{2^k\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}(2k+1)=2^{k+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k+1).$$

Napomenimo da ovaj zadatak ima još jedno elegantno rješenje koje ne koristi indukciju. Lijeva i desna strana izraza pomnože se umnoškom parnih brojeva od 2 do $2n$, te se dijeljenjem s $2n$ s obaju strana jednakosti dobije $n!$. ✓

[2]**Leonardo Fibonacci** (1170.–1250.)

Nejednakosti

Primjer 6. Dokažimo $n! > 2^n$, za sve prirodne brojeve n veće od 3. ($n!$ je umnožak prvih n prirodnih brojeva, tj. $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$.)
Rješenje.

$$T(n): \; n! > 2^n$$
$$T(4): \; 4! = 24 > 16 = 2^4$$
$$T(k): \; k! > 2^k$$
$$T(k+1): \; (k+1)! > 2^k$$

Prema pretpostavci indukcije slijedi

$$(k+1)! > (k+1) \cdot 2^k > 2 \cdot 2^k = 2^{k+1},$$

što je bilo traženo. ✓

Gdje je greška?

Dokažimo da svi ljudi imaju istu boju kose. Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi. Neka tvrdnja vrijedi za neki $n = k$. Tada uzmimo $k+1$ ljudi. Ako izdvojimo k ljudi iz te skupine, oni prema pretpostavci indukcije imaju istu boju kose. Sada izostavimo jednog čovjeka iz te skupine i uzmimo osobu koju nismo uzeli u prethodnom koraku $-$ tada tih k ljudi ima istu boju kose. Dakle tih $k+1$ ljudi ima jednaku boju kose! Tj. svi ljudi na svijetu imaju istu boju kose!

Primjer 7. Dokažimo za sve prirodne brojeve n nejednakost

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Rješenje.

$$T(n): \; \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$
$$T(1): \; \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$T(k): \; \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$$
$$T(k+1): \; \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{3k+4}}$$

Dokaz posljednje tvrdnje izvest ćemo ovako:

$$\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{2k}}_{T(k)} \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2}.$$

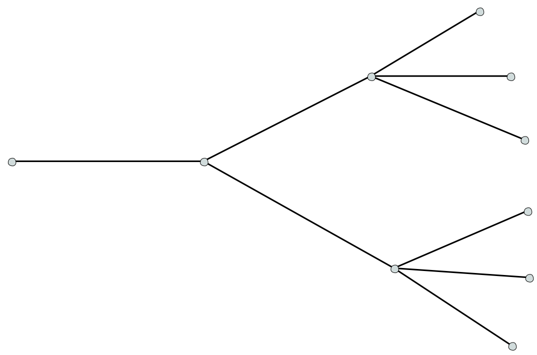
Sada moramo još samo dokazati tvrdnju

$$\frac{2k+1}{2k+2} < \sqrt{\frac{3k+1}{3k+4}},$$

što se lako sređuje kvadriranjem i svodi se na $19n \leq 20n$, što vrijedi za sve prirodne brojeve, pa smo tako dokazali i početnu tvrdnju. ✓

Jedan primjer iz teorije grafova

U prošlom broju smo naučili nešto o grafovima.[3] A sada ćemo vidjeti jedan primjer iz teorije grafova u kojem se koristi matematička indukcija.



Vrijedi li na ovom stablu naša pretpostavka?

Primjer 8. Svako *stablo*[4] ima broj bridova manji od broja vrhova za točno 1.

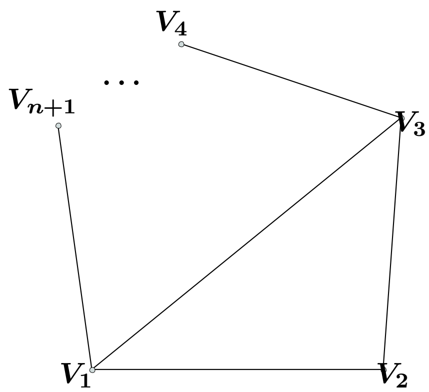
Rješenje. Ova tvrdnja vrijedi za grafove koji se sastoje od jedne komponente, dakle zaista za stablo, a ne za šumu.

Dokažimo tvrdnju indukcijom po broju vrhova. Počnimo s bazom kada je broj vrhova jednak 2. Ta dva vrha spojena su točno jednim bridom, pa je tvrdnja zapravo trivijalna.

Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za sva stabla koja imaju $v-1$ vrh, dakle da za sve takve grafove vrijedi da je broj bridova $v-2$.

Promatrajmo stablo D koje ima v vrhova. Lako se pokaže da svako drvo mora imati vrh koji je spojen samo s jednim od preostalih vrhova. Za takav vrh kažemo da ima stupanj 1 i nazivamo ga listom. Odaberimo, dakle, jedan list od D i maknimo ga iz D. Time smo dobili novi graf koji je također stablo, a koji ima $v-1$ vrhova i ima točno 1 brid manje. Kako smo za 1 smanjili i broj vrhova i broj bridova razlika tih brojeva ostala je ista, a ona prema pretpostavci indukcije iznosi 1, što smo i željeli dokazati. ✓

Za kraj: malo geometrije



Primjer 9. Dokažimo da je zbroj kutova u svakom n-terokutu jednak $180°(n-2)$ za $n \geq 3$ pri čemu je n prirodan broj.

Rješenje. Baza indukcije je trokut za koji vrijedi da je zbroj kutova $180°$.

[3] Filip Nikšić: *Traženje najkraćeg puta*, *PlayMath* br. 3 (2003.)

[4] *Ciklus* je put kojem se vrhovi poklapaju. Put $v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_1$ je primjer ciklusa. *Stablo* je drvo bez *ciklusa*.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve k-terokute.

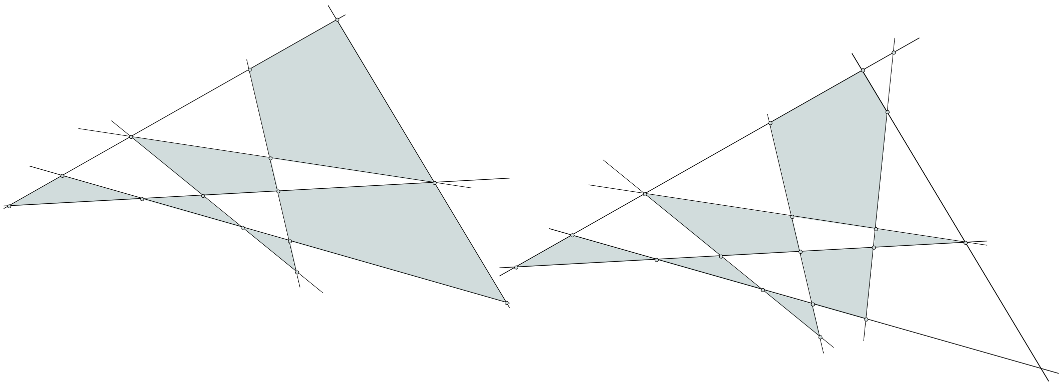
Promatrajmo neki $(k+1)$-terokut. Označimo njegove vrhove s $V_1, V_2, \ldots, V_{k+1}$. Podijelimo sada $(k+1)$-terokut na trokut kojem su vrhovi V_1, V_2, V_3, te na k-terokut kojem su vrhovi svi osim vrha V_2. Zbroj kutova u $(k+1)$-terokutu jednak je zbroju kutova u trokutu i kutova u k-terokutu. U trokutu je zbroj kutova $180°$, a u k-terokutu prema pretpostavci $180°(k-2)$, dakle zbroj kutova u promatranom $(k+1)$-trokutu je $180° + 180°(k-2) = 180°(k-1)$, što je trebalo dokazati. ✓

Primjer 10. Ravnina je podijeljena pravcima na određeni broj regija. Dokažite da se bez obzira na položaj pravaca ravnina može obojiti u crno i bijelo tako da nikoje dvije susjedne regije nisu obojene istom bojom.

Rješenje. Iako na prvi pogled ovaj zadatak nema veze s prirodnim brojem, upravo je indukcija ideja koja elegantno rješava zadatak. Dokazat ćemo tvrdnju s obzirom na broj pravaca. Dakle, $T(n)$ glasi:

Podijelimo li ravninu s n pravaca, tada možemo obojati sve dobivene regije dvjema bojama tako da nikoje dvije susjedne regije nisu obojene istom bojom.

Za bazu indukcije uzimamo jedan pravac. Tada je ravnina podijeljena na 2 dijela, te svaki od njih obojimo drugom bojom. Pretpostavimo da je za k pravaca moguće obojiti ravninu na željeni način ($T(k)$). Nacrtamo li $k+1$ pravac, željeno bojenje možemo postići tako da sve regije s jedne strane pravca ostavimo obojene kako su bile i prije, a svim regijama s druge strane pravca promijenimo boju. Regije samo s jedne strane pravca obojene su na željeni način jer su tako bile obojene prije dodavanja pravca, a promjena boja to ne mijenja; sve regije kojima je granica upravo dodani pravac bit će pravilno obojene jer su susjedne regije različito obojene zbog '*invertiranja*' boja samo s jedne strane pravca. Time smo uz pretpostavku izveli $T(k+1)$ i završili dokaz.



✓

Evo još par zadataka za vježbu.

Zadatak 3. Dokaži da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

Zadatak 4. Dokaži za $n \in \mathbb{N}$

$$1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} < 2.$$

Zadatak 5. Dokaži da za svaki prirodan broj n postoji cijeli broj takav da je djeljiv s 2^n i ima samo znamenke 1 i 2 u decimalnom zapisu.