Najveće cijelo $\lfloor x \rfloor$ i njegovi prijatelji

Tvrtko Tadić

Najveće cijelo je funkcija s kojom se susrećemo skoro svakodnevno u matematici, informatici pa čak i u fizici (tu je koristimo za potrebe zaokruživanja). S jednim od *rođaka* funkcije *najveće cijelo* sreli smo se već u najranijim razredima osnovne škole (istovremeno smo naučili i aritmetčku sredinu) kada smo naučili računati prosjek. Spomenuli smo najveće cijelo u informatici, a i u ovom časopisu[1]. U mnogim zbirkama se često pojavljuje i učenici se uvijek zbune. Uz najveće cijelo pojavljuju se i njegove srodne funkcije. Te funkcije također često koristimo (možemo reći i češće). Vrijeme je da se već jednom upoznamo s tom funkcijom.

Najveće cijelo ili $\lfloor x \rfloor$.

Kao što uvijek počinjemo, morat ćemo dati nekakvu definiciju. Možda vam neće odmah biti jasna no na primjerima ćete je shvatiti.

Definicija 1. Funkcija najveće cijelo od x ili $\lfloor x \rfloor$[2] (kraće kažemo "pod" od x) svakom realnom broju x pridružuje najveći cijeli broj ne veći od x.
Što to znači? Neka je $a = 3.4$, tada je $\lfloor a \rfloor = 3$. Kao što vidimo, $3 < a < 4$, pa je 3 najveći cijeli broj ne veći od a (jer je 4 veći od a).

Primjer 1. Odredi vrijednosti $\lfloor \pi \rfloor$ i $\left\lfloor \sqrt{2} \right\rfloor$.

$$3 < \pi = 3.14\ldots < 4 \Rightarrow \lfloor \pi \rfloor = 3;$$

$$1 < \sqrt{2} = 1.41\ldots < 2 \Rightarrow \left\lfloor \sqrt{2} \right\rfloor = 1.$$

Primjer 2. Koliko je $\lfloor 0.9999 \rfloor$?

$$0 < 0.9999 < 1 \Rightarrow \lfloor 0.9999 \rfloor = 0.$$

Što je s cijelim brojevima? Cijeli brojevi se ne mijenjaju jer oni nisu veći sami od sebe, već su jednaki sebi. Npr.

$$3 \leq 3 < 4 \Rightarrow \lfloor 3 \rfloor = 3$$

Sada možemo izvesti sljedeći poučak koji objašnjava definiciju 1.

Teorem 1. Ako za $A \in \mathbb{Z}$ vrijedi $A \leq x < A + 1$, tada je $\lfloor x \rfloor = A$.
Dokaz. Iz definicije 1. slijedi da je A najveći cijeli broj manji od x jer je broj $A + 1$ već veći od x. ■
Što je s negativnim brojevima? **Oprez!** Kod negativnih brojeva ne dobivamo isto kao i kod pozitivnih uz promjenu predznaka. Uzmimo za primjer $a = 3.4$. Odredimo $\lfloor -a \rfloor$, za njega vrijedi

$$-4 \leq -a < -3 \Rightarrow \lfloor -a \rfloor = -4.$$

Primjer 3. Koliko je $\lfloor -8.77 \rfloor$ i $\lfloor -0.01 \rfloor$.

$$-9 < -8.77 < -8 \Rightarrow \lfloor -8.77 \rfloor = -9$$

$$-1 < -0.01 < 0 \Rightarrow \lfloor -0.01 \rfloor = -1.$$

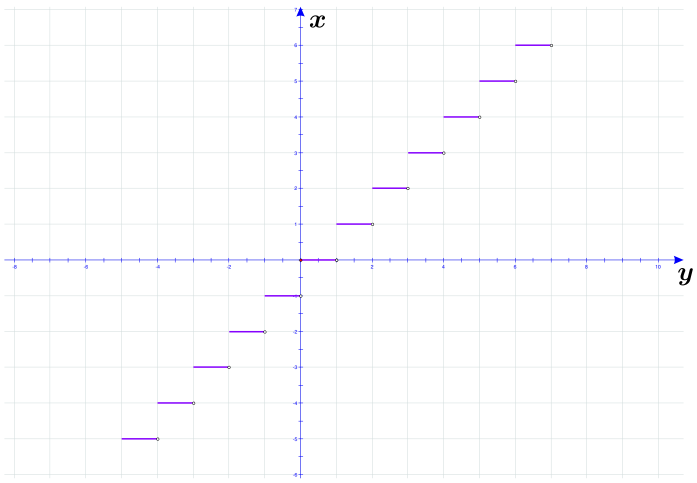
Razmislite o sljedećim zadacima:

Zadatak 1. Koliko je $\lfloor 2.3 \rfloor$, $\left\lfloor -\sqrt{2} \right\rfloor$, $\lfloor -0.999 \rfloor$?

[1] Članak *Ane Virag*: Jedan informatički zadatak i $\lfloor x \rfloor$ u *PlayMath*-u br. 2 (2003.); zadatak TB7 u ovom broju,...
[2] U starijim knjigama za ovu funkciju koristi se oznaka $[x]$.

Zadatak 2. Kada je $|\lfloor x \rfloor| = |\lfloor -x \rfloor|$?
Računala poznaju $\lfloor x \rfloor$ u nekoliko oblika. U Pascalu se koristi naredba int, dok se u MAPLE-u koristi naredba floor. U obim slučajima funkcija je doslovno $\lfloor x \rfloor$. Na računalu postoji i funkcija trunc, koju mnogi često poistovjećuju s funkcijom $\lfloor x \rfloor$, međutim riječ je o sličnoj funkciji. Funkcija trunc *odreže* decimalni zapis broja. Tako je $\mathsf{trunc}(5.4) = 5$, a $\mathsf{trunc}(-5.4) = -5$. Funkcija trunc zapravo je definirana preko $\lfloor x \rfloor$ kao

$$\mathsf{trunc}(x) := \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & \text{za } x \geq 0; \\ -\lfloor -x \rfloor, & \text{za } x < 0. \end{cases}$$



$f(x) = \lfloor x \rfloor$

Kad smo već spomenuli funkciju $\lfloor x \rfloor$ na računalu, zadajmo računalu da je nacrta! Kao što vidimo na grafu, funkcija je isprekidana.

Teorem 2. Svaki $x \in \mathbb{R}$ može se prikazati kao $x = A + a$, gdje je $A \in \mathbb{Z}$ i $a \in [0, 1\rangle$.
Dokaz. Neka je $A = \lfloor x \rfloor$, tada je $a = x - \lfloor x \rfloor$. Iz teorema 1. vidimo da je $A \leq x \leq A + 1$. Tada direktno slijedi $0 \leq a = x - A = x - \lfloor x \rfloor < 1$. ■

Razlomljeni dio od x ili $\{x\}$

U prethodnom teoremu a smo nazvali $x - \lfloor x \rfloor$. To ćemo sada definirati kao novu funkciju $\{x\}$ koja se zove *razlomljeni dio* od x.

Definicija 2. Razlomljeni dio od x ili $\{x\}$ definiramo kao $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$.
U mnogim programskim jezicima ova se funkcija naziva frac. Pokažimo sada neke primjere funkcije $\{x\}$.

Primjer 4. Koliko je $\{2.3\}$ i $\{\pi\}$?

$$\lfloor 2.3 \rfloor = 2 \Rightarrow \{2.3\} = 2.3 - 2 = 0.3;$$

$$\lfloor \pi \rfloor = 3 \Rightarrow \{\pi\} = 0.14\ldots$$

Kao što smo pokazali u teoremu 2., vrijedi $0 \leq \{x\} < 1$. Stoga treba biti **oprezan**! Naime $\{x\}$ ne izbacuje (uvijek) decimalni ostatak. Pogledajmo sljedeći primjer:

Primjer 5. Koliko je $\{-0.1\}$ i $\{-9.9\}$?

$$-1 < -0.1 < 0 \Rightarrow \lfloor -0.1 \rfloor = -1 \Rightarrow \{-0.1\} = -0.1 - (-1) = 0.9;$$

$$-10 < -9.9 < -9 \Rightarrow \lfloor -9.9 \rfloor = -10 \Rightarrow \{-9.9\} = -9.9 - (-10) = 0.1.$$

Zadatak 3. Ako je x realan necijeli broj, dokaži da je $\{-x\} + \{x\} = 1$.

Programski jezici posjeduju i funkciju mod. Nju smo spomenuli u prošlom broju u članku o kongruencijama. Kao što smo rekli funkcija $x \ \mathsf{mod}\ y$ daje ostatak pri dijeljenju broja x s y. Uz funkciju mod dolazi i funkcija div koju ćemo prvu definirati.

$$x \ \mathsf{div}\ y := \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor,$$

$$x \ \mathsf{mod}\ y := y \cdot \left\{ \frac{x}{y} \right\}.$$

Iz gornjih definicija vidimo da se funkcije mod i div mogu poopćiti na realne brojeve. Nekad se jednostavni zadaci s ostatkom mogu zamaskirati da izgledaju *teški*.

Zadatak 4. Nađi sve $n \in \mathbb{N}$ za koje vrijedi $n \left\{ \dfrac{2003}{n} \right\} = 7$.

Funkcija najmanje cijelo iliti $\lceil x \rceil$

Ovo je brat blizanac najvećeg cijelog: dok je $\lfloor x \rfloor$ zaokruživao na *manje* najmanje cijelo zaokružuje na *veće*.

Definicija 3. Najmanje cijelo ili $\lceil x \rceil$ („strop" od x) je najmanji cijeli broj ne manji od x.

Što to znači? Ako je $a = 9.9$, onda je $9 < 9.9 < 10$ pa slijedi $\lceil 9.9 \rceil = 10$ jer je 9 manji od a, 10 je najmanji cijeli broj veći od a. Svakom realnom broju pridružujemo od njega veći cijeli broj. Slično kao što je vrijedilo kod $\lfloor x \rfloor$, vrijedi i ovdje.

Što je s cijelim brojevima? Cijeli broj preslikava se u sebe. Naime cijelom je broju najmanji cijeli broj ne manji od njega upravo on sam. Dakle $\lceil -4 \rceil = -4$, $\lceil 5 \rceil = 5, \ldots$

Teorem 3. Ako za $A \in \mathbb{Z}$ vrijedi $A - 1 < x \leq A$, onda je $\lceil x \rceil = A$.
Dokaz. Tvrdnja slijedi iz definicije jer je A veći od x, a $A - 1$ manji od x, tj. A je najmanji cijeli broj veći od x. ∎

Primjer 6. Koliko je $\lceil 1.2 \rceil$ i $\lceil -1.2 \rceil$?

$$1 < 1.2 < 2 \Rightarrow \lceil 1.2 \rceil = 2;$$

$$-2 < -1.2 < -1 \Rightarrow \lceil -1.2 \rceil = -1.$$

Možete li uočiti kakvu vezu između $\lfloor x \rfloor$ i $\lceil x \rceil$? Koliko je $\lfloor 1.2 \rfloor$ i $\lfloor -1.2 \rfloor$?

$$\lfloor 1.2 \rfloor = 1 = -\lceil -1.2 \rceil;$$

$$\lfloor -1.2 \rfloor = -2 = -\lceil -(-1.2) \rceil.$$

Možemo iznijeti sljedeću tvrdnju.

Teorem 4. $\lfloor x \rfloor = -\lceil -x \rceil$ i $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$.
Dokaz. Ako je x cijeli broj tvrdnja je dokazana. Neka je $x \notin \mathbb{Z}$ i $\lfloor x \rfloor = A$. Tada je

$$A < x < A + 1 \Rightarrow -(A + 1) < -x < -A \Rightarrow \lceil -x \rceil = -A \Leftrightarrow \lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor \Rightarrow \lfloor x \rfloor = -\lceil -x \rceil.$$

Druga tvrdnja slijedi ako uvrstimo $y = -x$. ∎
Poslije ovog teorema naša zainteresiranost za $\lceil x \rceil$ prestaje jer se on lako može iskazati preko $\lfloor x \rfloor$. Funkcija $\lceil x \rceil$ rijetka je na računalima, no kada postoji najčešće se zove ceil.

Funkcija zaokruživanje (ocjena) iliti $\langle x\rangle$

Na kraju ćemo upoznati vjerojatno najčešće korištenu cjelobrojnu funkciju u Hrvatskoj. Mnogi su doživjeli (ili su to iskustvo sami proživjeli) da netko strepi hoće li proći onom čarobnim brojem 4.5. Dakle, upravo smo stigli do funkcije što život znači! Ako je netko prošao sa 3.8, s koliko je zapravo prošao? Svi će odmah reći: $3.5 \leq 3.8 < 4.5$ pa je on prošao s 4. Točno! Upravo ste koristili funkciju zaokruživanje!

Definicija 4. Funkcija zaokruživanje definira se kao $\langle x\rangle := \left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor$.
Ovu funkciju još zovemo i *najbliže cijelo* zato što pridružuje realnom broju x njemu najbliži cijeli broj. Mnoge su vjerojatno od samog početka članka mislili na ovu funkciju i bila im je čudna funkcija $\lfloor x\rfloor$. Ova funkcija isto je tako česta u programskim jezicima i zove se `round`.

Primjer 7. Koliko je $\langle 2.55\rangle$ i $\langle -3.45\rangle$?

$$\langle 2.55\rangle = \lfloor 3.05\rfloor = 3;$$

$$\langle -3.45\rangle = \lfloor -2.95\rfloor = -3.$$

Poznavanje funkcije $\langle x\rangle$ može biti vrlo bitno. Na jednom polugodištu u V. gimnaziji došlo je do frke *zbog toga što je umjesto po funkciji $\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor$ računalo je učenicima zaključivalo završne ocjene po funkciji $\left\lceil x-\frac{1}{2}\right\rceil$. Na prvi pogled nema razlike, ali uvrstite li u posljednju funkciju $x = 4.5$, dobivate 4. Funkcija zaključuje na najbliži broj, ali je 4.5 jednako udaljeno od 5 i 4, pa zaključuje na manje, dok funkcija $\langle x\rangle$ zaključuje na veće. Tako su mnogi inzistirali da im se izvještaji s polugodišta isprave. Greška na računalu je ispravljena do kraja školske godine.*

Svojstva $\lfloor x\rfloor$ i $\{x\}$

Kad smo se upoznali sa svim različitim cjelobrojnim funkcijama, što možemo zaključiti? Najvažnije funkcije su $\lfloor x\rfloor$ i $\{x\}$, a sve ostale slijede iz njih. Zato ćemo se sada upoznati s nekim njihovim svojstvima koja bi bilo zgodno zapamtiti.

Teorem 5. Za $x, y \in R$ i $z \in \mathbb{Z}$ vrijede sljedeća svojstva:

1. $\lfloor x\rfloor \leq x$;
2. $\lfloor x+z\rfloor = \lfloor x\rfloor + z$;
3. $\lfloor x+y\rfloor \geq \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor$;
4. $(x > 0, y > 0) \Rightarrow \lfloor x\cdot y\rfloor \geq \lfloor x\rfloor \cdot \lfloor y\rfloor$;
5. $\{x+z\} = \{x\}$.

Dokaz. Neka je $x = A + a$ i $y = B + b$, gdje je $A = \lfloor x\rfloor$, $a = \{x\}$, $B = \lfloor y\rfloor$, $b = \{y\}$.
1. Slijedi iz definicije 1.
2. $x+z = A+z+a \Rightarrow A+z \leq x+z < A+z+1 \Rightarrow \lfloor x+z\rfloor = A+z = \lfloor x\rfloor + z$;
3. Iz $x+y = A+B+a+b$ i (**2.**) slijedi $\lfloor x+y\rfloor = A+B+\lfloor a+b\rfloor = \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + \lfloor a+b\rfloor \geq \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor$;
4. Mora biti $A \geq 0, B \geq 0$, dobivamo $x\cdot y = (A+a)(B+b) = AB + Ab + aB + ab \Rightarrow \lfloor x\cdot y\rfloor = AB + \lfloor Ab + aB + ab\rfloor \geq \lfloor x\rfloor \lfloor y\rfloor$;
5. Iz (**2.**) $\Rightarrow \lfloor x+z\rfloor = \lfloor x\rfloor + z \Rightarrow \{x+z\} = x+z-\lfloor x+z\rfloor = x+z-\lfloor x\rfloor - z = x - \lfloor x\rfloor = \{x\}$. ∎
Za kraj pogledajmo nekoliko primjera zadataka s najvećim cijelim sa svih razina natjecanja.

Primjer 8. (Hrvatska 1986.) Dokaži da za sve realne brojeve x i prirodne brojeve d i n vrijedi

$$\lfloor d^n\cdot x\rfloor - d\left\lfloor d^{n-1}\cdot x\right\rfloor = \lfloor d^n\{x\}\rfloor - d\left\lfloor d^{n-1}\{x\}\right\rfloor.$$

Rješenje. Neka je $x = A + a$ ($A = \lfloor x\rfloor$ i $a = \{x\}$). Tada je koristeći svojstvo 2. iz teorema 5.

$$\lfloor d^n\cdot x\rfloor - d\left\lfloor d^{n-1}\cdot x\right\rfloor = \lfloor d^n\cdot(A+a)\rfloor - d\left\lfloor d^{n-1}\cdot(A+a)\right\rfloor =$$

$$= (d^n A + \lfloor d^n a \rfloor) - (d^n A + d \lfloor d^{n-1} a \rfloor) = \lfloor d^n a \rfloor - d \lfloor d^{n-1} a \rfloor .$$

Kako je $a = \{x\}$ iz posljednjeg dijela jednakosti slijedi tražena tvrdnja. ✓

Primjer 9. Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi

$$\{x\} = \frac{x + \lfloor x \rfloor + \langle x \rangle}{10}.$$

Rješenje. Neka je $A = \lfloor x \rfloor$ i $a = \{x\}$. Tada je

$$a = \frac{A + a + A + \langle x \rangle}{10} \Rightarrow 9a = 2A + \langle x \rangle.$$

Ako je $a \geq \frac{1}{2}$, onda je $\langle x \rangle = A + 1$; u suprotnom (tj. ako je $a < \frac{1}{2}$) je $\langle x \rangle = A$. Gledajmo sada prvi slučaj. Ako je $a \geq \frac{1}{2}$, onda je $9a = 3A + 1$. Po teoremu 2. slijedi

$$\frac{9}{2} \leq 3A + 1 < 9 \Rightarrow 5 \leq 3A + 1 \leq 8 \Rightarrow 4 \leq 3A \leq 7 \Rightarrow A = 2 \Rightarrow a = \frac{7}{9} \Rightarrow x = 2\frac{7}{9}.$$

Sada možemo gledati drugi slučaj. Ako je $a < \frac{1}{2}$, tada je $9a = 3A$ pa iz toga po teoremu 2. slijedi

$$0 \leq 3A < \frac{9}{2} \Rightarrow 0 \leq 3A \leq 4 \Rightarrow A = 3 \text{ ili } A = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \text{ ili } a = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ili } x = 3\frac{1}{3}.$$

Znači, rješenja su $x_1 = 0$, $x_2 = 2\frac{7}{9}$, $x_3 = 3\frac{1}{3}$. (Provjerite!) ✓

Primjer 10. (V. Britanija 1998.) Dana je funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, formulom $g(n) = \left\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right\rfloor$. Odredi sve $a \in \mathbb{N}$ takve da je $g(a) > g(a+1)$.
Rješenje. Napravimo tablicu sa prvih par vrijednosti funkcije $g(n)$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g(n)$	1	2	3	2	2	3	3	4	3

Iz tablice vidimo da za $a = 3$ i $a = 8$ vrijedi svojstvo da je $g(a) > g(a+1)$. Po čemu su posebni ti brojevi? Pa $a + 1$ je potpun kvadrat! Dokažimo da vrijedi $g(k^2 - 1) > g(k^2)$, za $k \in \mathbb{Z}$. Znamo da je $k - 1 \leq \sqrt{k^2 - 1} < k \Rightarrow \left\lfloor \sqrt{k^2 - 1} \right\rfloor = k - 1$. Dobivamo da je

$$g(k^2 - 1) = \left\lfloor \frac{k^2 - 1}{k - 1} \right\rfloor = k + 1.$$

Lako se pokaže da je $g(k^2) = k$. Iz toga slijedi $g(k^2 - 1) > g(k^2)$. Uzmimo brojeve a i $b = a + 1$, takve da je $l^2 \leq a < b \leq (l+1)^2 - 1$, gdje je $l \in \mathbb{N}$. Onda je $\lfloor \sqrt{a} \rfloor = \left\lfloor \sqrt{b} \right\rfloor = l$. Iz toga slijedi $g(a) \leq g(a+1)$. Dakle, takvi brojevi su svi brojevi oblika $a = k^2 - 1$. ✓
U nekim zadacima s najvećim cijelim potrebno je koristiti brojevne zapise u bazama.

Primjer 11. Dokaži da funkcija $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ zadana formulom $f(n) = \lfloor 10^n \sqrt{3} \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} \sqrt{3} \rfloor$ nije periodična.
Rješenje. Što ova funkcija zapravo daje? Općenito što funkcija $f_x(n) = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor$ daje? Ona daje znamenku koja se nalazi na n-tom decimalnom mjestu iza decimalne točke. Može li onda fukcija $f(n)$ biti periodična? Ne! U suprotnom bi broj $\sqrt{3}$ bio racionalan. ✓

Nadam se da je ovaj članak mnogima razjasnio razlike između $\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil, \langle x \rangle$, round, trunc,...i $\{x\}$. Za kraj evo par zadataka za vježbu.

Zadatak 5. Dokaži da su svi članovi niza $a_n = \{3^n \sqrt{2}\}$ različiti.

Zadatak 6. Dokaži da jednadžba $\{x^3\} + \{y^3\} = \{z^3\}$ ima beskonačno rješenja u skupu ne cijelih racionalnih brojeva.

UPUTE I RJEŠENJA NA STRANICI 38.