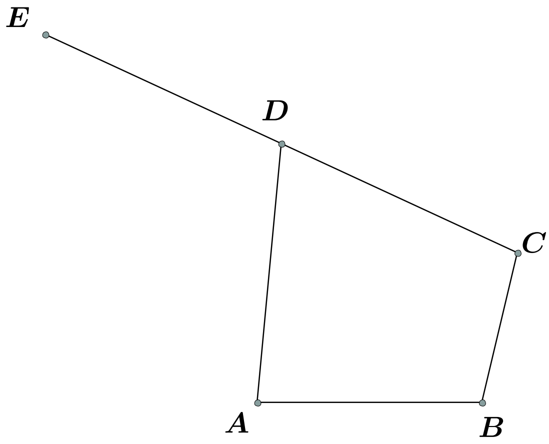
Model Čebiševljevog linearizirajućeg mehanizma

Tvrtko Tadić

Mnoge probleme mehanike danas možemo prikazati pomoću animacija. U tome će nam jako pomoći program *The Geometer's Sketchpad*. Problem koji je mučio mnoge matematičare je bio problem kako pretvoriti linearno u kružno i obrnuto. Problem je nastao nakon otkrića Wattovog parnog stroja i već je sam Watt o tome razmišljao. Našao je aproksimaciju zahvaljujući kojoj je njegov legendarni stroj uopće radio. Ovaj problem neće biti riješen sve do početka 18. stoljeća.

Ruski matematičar Čebišev bavio se funkcijama koje imaju minimalno odstupanje od nule. Ovdje ćemo baciti pogled na njegov linearizirajući mehanizam koji je došao jako blizu do aproksimacije linearnog gibanja.



Slika 1.

Stroj je oblika kao na slici. Između njegovih karika vrijede sljedeće relacije

$$|ED| = |DC| = |AD| = a, \quad |BC| = b,$$

$$|AB| = \frac{|DC| + |AD| + |BC|}{3}.$$

Ovo ćemo u *Sketchpad*-u lako konstruirati.

Uzmimo dužine a i b. Pomoću njih ćemo konstruirati četverokut $ABCD$. $\overline{AB}$ ćemo konstruirati tako da dužinu $2a + b$ podijelimo na tri jednaka dijela. Dužina AB će nam biti i osnovna dužina na temelju koje ćemo cijeli mehanizam biti izgraditi!

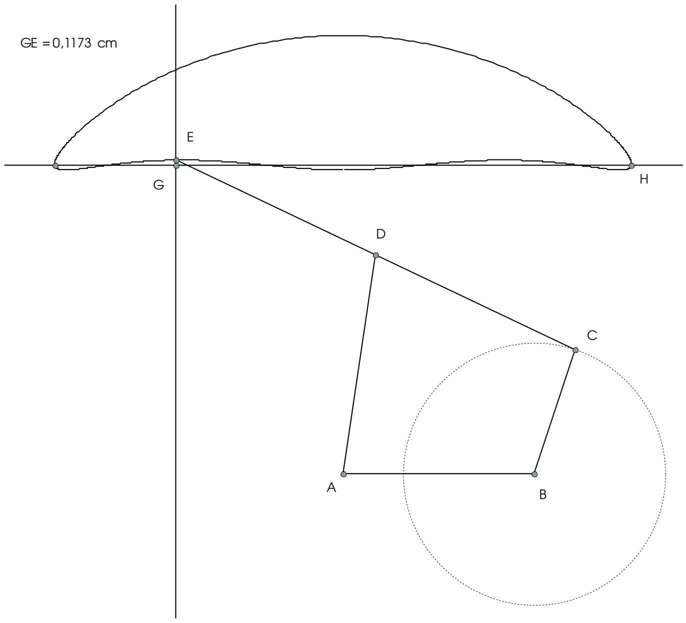
Točke A i B su fiksne i ne pomiču se. Točka C kreće se po kružnici sa središtem u B polumjera b. Točka D sada je određena polžajem točke C.

Prednost programa *The Geometer's Sketchpad* je u tome što konstrukcije nisu fiksne, mogu se animirati tako da svojstva točaka ostanu ista. Npr. tri točke se miču po ravnini, no ako smo T konstruirali kao težište, ono ostaje težište. Tako će se i ovdje animacijom točke C sve osobine ovog mehanizma sačuvati. Na slici 2. možemo vidjeti trajektoriju kretanja točke E. Donji dio te trajektorije jako dobro aproksimira pravac, tj. linearno gibanje.

Čebišev je izračunao da najveća devijacija od pravca paralelnog s AB iznosi

$$\delta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{4}{9}(r-p)(2r+p) + \frac{(4p-r)^3 r}{12(r+p)^2}} - \sqrt{\frac{4}{9}(r-p)(2r+p)}\right),$$

gdje je $r = 2a$ i $p = 2b$. Da bi smo to izračunali, uprogramirat ćemo u MAPLE funkciju koja će nam dati tu vrijednost.



Slika 2.

```
> f:=(r,p)->1/2*(sqrt(4/9*(r-p)*(2*r+p)+(4*p-r)^3*r/12/(2*r+p)^2)-sqrt(4/9*(r-p)*(2*r+p)));
```

$$f := (r,p) \mapsto 1/12 \sqrt{16\ (r-p)\,(2\,r+p) + 3\,\frac{(4\,p-r)^3 r}{(2\,r+p)^2}} - 1/3\,\sqrt{(r-p)\,(2\,r+p)}$$

Za $a = 1.2$ i $b = 0.4$ dobivamo sljedeću vrijednost:

```
> evalf(f(2*1.2,2*.4));
```

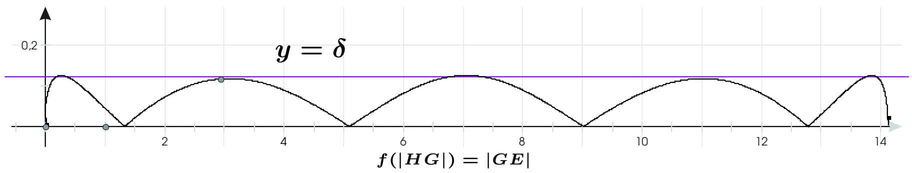
$$0.0004089895$$

Dakle, $\delta = 0.0004$. Kad bi vrijednosti a i b bile izražene u metrima odstupanje bi iznosilo 0.0004 m. Što je izrazito malo.

Ovu formulu možemo provjeriti u *Sketchpad*-u jer on ima mogućnosti da udaljenosti dviju točaka mjeri na tisućinke centimetara. *Sketchpad* nam je izračunao $a = 5.424$ cm i $b = 3.2024$ cm. Ubacivanjem tih vrijednosti u funkciju koju smo definirali u MAPLE-u dobivamo

```
> evalf(f(2*5.424,2*3.2024));
```

$$0.121830806$$



Slika 3.

Sada provjerom u *Sketchpad*-u dobivamo sljedeći graf koji pokazuje vrijednost razmaka donjeg dijela krivulje od pravca koji smo izabrali. Koordinatni sustav smo malo razvukli (rectangle coordinate system) da bismo bolje vidjeli. Dakle, Čebiševljevi računi su uistinu točni!

Zaključak

U ovom prilogu vidjeli smo kako jedan stari problem možemo lijepo analizirati u *Sketchpad*-u, dok nam je program MAPLE poslužio kao računar (kalkulator) i odradio komplicirane račune. Ovaj problem prve industrijske revolucije riješio je tek 1864. francuski inženjer *A. Peaucellier* pomoću matematičkog preslikavanja *inverzije*. Možemo stvarno odati priznanje tadašnjim znanstvenicima koji su sve svoje račune i nacrte radili ručno i uspijevali svojim "*primitivnim*" alatom pronaći rješenja korisna za čovječanstvo.