

NUMERIČKO RJEŠAVANJE I VIZUALIZACIJA RJEŠENJA LAPLACEOVE JEDNADŽBE

NUMERICAL SOLVING AND VISUALIZATION OF SOLUTION OF LAPLACE EQUATION

Filip Strelac ^{1*}, Ivan Hip ¹, Igor Petrović ¹

¹ Sveučilište u Zagrebu, Geotehnički fakultet, Hallerova aleja 7, 42000 Varaždin, Hrvatska

*E-mail adresa osobe za kontakt / e-mail of corresponding author: filip.strelac@gmail.com

Sažetak: Laplaceova jednadžba odnosno mogućnost njenog brzog rješavanja i vizualizacije rješenja omogućuje uvid i interpretaciju podataka kroz širok spektar znanstvenih područja. U geoinženjerstvu Laplaceova jednadžba opisuje stacionarno tečenje vode u tlu. Rad opisuje Laplaceovu jednadžbu, njeno rješavanje metodom konačnih razlika, implementaciju te metode u programski jezik JavaScript i vizualizaciju rješenja pomoću HTML5 elementa canvas. Program je temeljito testiran usporedbom dobivenih rezultata s analitičkim rješenjem i rješenjima drugih programskih paketa. Zbog jednostavnog korisničkog sučelja, raznolikih mogućnosti vizualizacije i lake dostupnosti preko web preglednika program je prikladan za korištenje u edukativne svrhe.

Ključne riječi: Laplaceova jednadžba, metoda konačnih razlika, JavaScript, HTML5

Abstract: The ability to quickly solve and visualize solutions to Laplace equation enables insight and interpretation of data across a wide spectrum of scientific areas. In the field of geoen지니어ing Laplace equation describes steady-state groundwater flow. This paper describes Laplace equation, its solution using the method of finite differences, an implementation of the method into the JavaScript programming language and visualization of the solution using the HTML5 canvas element. The program has been thoroughly tested by comparing the results with an analytical solution and solutions obtained by other software packages. The program is suitable for educational purposes because it has a simple user interface, a variety of visualization options and it can be run in any web browser.

Keywords: Laplace equation, finite difference method, JavaScript, HTML5

Received: 10.11.2018. / Accepted: 06.12.2018.

Published online: 17.12.2018.

Stručni rad / Technical paper

1. UVOD

Laplaceova jednadžba pojavljuje se u mnogim znanstvenim područjima, a zanimljiva je i u geoinženjerstvu jer opisuje stacionarno tečenje vode u tlu. Na primjer, tečenje vode kroz temeljno tlo brane, tečenje vode kroz nasutu branu, ili pak problem tečenja podzemne vode u građevnu jamu. U svim tim slučajevima, uslijed značajnih hidrauličkih gradijenata, može doći do pojave erozije tla ili čak i do hidrauličkog sloma kada tlo u potpunosti gubi svoju nosivost. Nadalje, rješenje Laplaceove jednadžbe osnovna je polazišna osnova za modeliranje pronosa zagađivala kroz tlo.

Ovaj rad predstavlja osvrt na završni rad studenta Filipa Strelca (Strelec 2018). Završni rad izrađen je na Geotehničkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, pod mentorstvom doc.dr.sc. Ivana Hipa i izv.prof.dr.sc. Igora Petrovića. Cilj rada bio je razviti računalni program koji rješava Laplaceovu jednadžbu i omogućava različite načine vizualizacije rješenja, a pritom je jednostavan za korištenje i može služiti u edukativne svrhe. Program koristi metodu konačnih razlika za rješavanje Laplaceove jednadžbe. Razvijen je u programskom jeziku JavaScript, a vizualizacija rješenja implementirana je u HTML5 elementu *canvas* kako bi program bio lako dostupan putem standardnog web preglednika.

Programski kod dostupan je na GitHub-u na adresi: https://github.com/filip4428/Laplace_zavrсни_rad, a program se može isprobati na adresi <https://filip4428.github.io/Laplace-zavrсни-rad/>.

2. LAPLACEOVA JEDNADŽBA

Laplaceova jednadžba je linearna homogena parcijalna diferencijalna jednadžba drugog reda koja se pojavljuje u mnogim znanstvenim područjima. Važnu ulogu ima u elektrostatici, mehanici fluida i nauci o toplini. Pomoću Laplaceove jednadžbe može se opisati ponašanje elektrostatskih i hidrauličkih potencijala i raspodjela temperature kod stacionarnog vođenja topline.

2.1. Tečenje vode u tlu

Jednadžba kontinuiteta za nestlačivi fluid (vodu) kombinirana s Darcyjevim zakonom daje Laplaceovu jednadžbu koja opisuje stacionarno tečenje vode u tlu.

Darcyjev zakon opisuje tečenje vode u homogenom i izotropnom tlu. Uvrštavanjem Darcyjevog zakona

$$\vec{v}_D = -k \vec{\nabla} h(x, y, z) \quad (1)$$

u jednadžbu kontinuiteta za nestlačivi fluid

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (2)$$

dobiva se da hidraulički potencijal h mora zadovoljavati sljedeću jednadžbu:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} h(x, y, z) = \vec{\nabla}^2 h(x, y, z) = \Delta h(x, y, z) = 0 \quad (3)$$

Pri čemu je

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4)$$

Laplaceov operator (engl. *Laplacian*), a homogena parcijalna diferencijalna jednadžba

$$\Delta h(x, y, z) = 0 \quad (5)$$

je Laplaceova jednadžba.

Rješavanjem **Laplaceove jednadžbe (5)** za odgovarajuće rubne uvjete može se dobiti hidraulički potencijal $h(x, y, z)$, a iz njega pomoću **Darcyjevog zakona (1)** moguće je izračunati polje brzina $\vec{v}(x, y, z)$ te odgovarajuće protoke koji nas najčešće zanimaju u inženjerskoj praksi.

Za detaljniji opis problematike strujanja podzemnih voda vidjeti (Jović 2006).

2.2. Rubni uvjeti

Da bi se dobilo jedinstveno rješenje konkretnog fizikalnog problema treba postaviti rubne uvjete. Na rubovima domene mogu se zadati vrijednosti potencijala ili temperature (Dirichletovi rubni uvjeti) ili vrijednosti prve derivacije, to jest brzine strujanja fluida ili gustoće toplinskog toka (Neumannovi rubni uvjeti).

U implementiranom računalnom programu omogućeno je zadavanje proizvoljnih Dirichletovih rubnih uvjeta, dok je za Neumannove rubne uvjete dopuštena samo vrijednost nula. U tom slučaju garantirano je da će program uvijek konvergirati k rješenju. Problem s Neumannovim rubnim uvjetima je da se oni ne mogu zadavati proizvoljno: s obzirom da je u Laplaceovu jednadžbu ugrađen zakon o očuvanju mase (jednadžba kontinuiteta), odnosno zakon očuvanja energije (ukoliko je koristimo za opisivanje stacionarnog vođenja topline) rješenje Laplaceove jednadžbe postoji samo ako je ukupni protok (ili toplinski tok) kroz sve rubove jednak nuli (poopćenje teorema 5.5 u Selvadurai 2000). U slučaju kad je jedina dopuštena vrijednost za Neumannove rubne uvjete nula (što odgovara nepropusnoj barijeri ili idealnom toplinskom izolatoru) uvjet da je ukupni protok kroz rubove domene nula uvijek je trivijalno zadovoljen i program sigurno konvergira k rješenju.

3. RJEŠAVANJE LAPLACEOVE JEDNADŽBE METODOM KONAČNIH RAZLIKA

Metoda konačnih razlika (diferencija) (Bronštejn i sur. 2004; Press et al. 1992) je jedna od metoda za rješavanje rubnih problema kod običnih i parcijalnih diferencijalnih jednadžbi uz pomoć računala. Derivacije se aproksimiraju konačnim razlikama, kako je to opisano u sljedećem potpoglavlju, a vrijednosti funkcije, tj. rješenja koje se traži, definirane su samo u ekvidistantnim točkama koje se nazivaju čvorovi i koji u 2D slučaju čine mrežu ili rešetku te se lako pohrane u memoriju računala.

3.1. Aproksimacija derivacija konačnim razlikama

Derivacija je limes kad Δx teži k nuli:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (6)$$

Taj limes nije moguće provesti u računalu jer računala nemaju beskonačno mnogo memorije, odnosno potrebno je aproksimirati **izraz (6)** za slučaj kada su vrijednosti funkcije f poznate samo na konačnom broju točaka (čvorova) s nekim konačnim razmakom Δx .

Razvojem funkcije f u Taylorov red dobije se

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x f'(x) + \frac{1}{2} \Delta x^2 f''(x) + \frac{1}{6} \Delta x^3 f'''(x) + 0(\Delta x^4) \quad (7)$$

Preslagivanjem članova prva derivacija može se izraziti kao:

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - \frac{1}{2} \Delta x f''(x) - \frac{1}{6} \Delta x^2 f'''(x) + 0(\Delta x^3) \quad (8)$$

Usporedbom sa **(6)** vidi se da je pogreška proporcionalna s Δx . Međutim, kombiniranjem **Taylorovog reda (7)** i

$$f(x - \Delta x) = f(x) - \Delta x f'(x) + \frac{1}{2} \Delta x^2 f''(x) - \frac{1}{6} \Delta x^3 f'''(x) + 0(\Delta x^4) \quad (9)$$

Može se dobiti bolja aproksimacija prve derivacije:

$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = 2\Delta x f'(x) + \frac{1}{3} \Delta x^3 f'''(x) + 0(\Delta x^5) \quad (10)$$

iz čega slijedi

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x} - \frac{1}{6} \Delta x^2 f'''(x) + 0(\Delta x^4) \quad (11)$$

Dakle, kod aproksimacije

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x} \quad (12)$$

pogreška je proporcionalna s Δx^2 što je povoljnije od "naivne" **aproksimacije (8)**.

Na sličan način može se dobiti i aproksimaciju druge derivacije $f''(x)$.

Zbrajanjem **(7)** i **(9)** dobije se:

$$f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) = 2 f(x) + \Delta x^2 f''(x) + \frac{1}{12} \Delta x^4 f^{(4)}(x) + 0(\Delta x^6) \quad (13)$$

iz čega slijedi:

$$f''(x) = \frac{f(x+\Delta x) + f(x-\Delta x) - 2f(x)}{\Delta x^2} - \frac{1}{12} \Delta x^2 f^{(4)}(x) + 0(\Delta x^4) \quad (14)$$

Dakle, druga derivacija može se aproksimirati s:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) + f(x-\Delta x) - 2f(x)}{\Delta x^2} \quad (15)$$

pri čemu je pogreška proporcionalna s Δx^2 .

Za opširniju i rigorozniju diskusiju pogrešaka vidjeti ([Press i sur. 1992](#)) i ([Burden i Faires 1989](#)).

3.2. Primjena metode konačnih razlika za rješavanje Laplaceove jednadžbe

Program omogućuje rješavanje problema koji je definiran u dvije prostorne dimenzije. Laplaceova jednadžba za potencijal $h(x, y)$ koji je funkcija dvije koordinate x i y je

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (16)$$

U **potpoglavlju 3.1.** izvedena je **formula (15)** za aproksimaciju druge derivacije:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \approx \frac{f(x+\Delta x) + f(x-\Delta x) - 2f(x)}{\Delta x^2} \quad (17)$$

Uvrštavanjem (17) u (16) uz jednake razmake između čvorova u x i y smjeru

$$a = \Delta x = \Delta y \quad (18)$$

dolazimo do jednadžbe za izračun potencijala pojedinog čvora (Lang i Pucker 2005):

$$h(x, y) = \frac{1}{4} [h(x + a, y) + h(x - a, y) + h(x, y + a) + h(x, y - a)] \quad (19)$$

Potencijal svakog čvora u iteraciji $n + 1$ izračunava se na temelju vrijednosti potencijala susjednih čvorova u prethodnoj, n -toj iteraciji na sljedeći način:

$$h^{(n+1)}(x, y) = \frac{1}{4} [h^{(n)}(x + a, y) + h^{(n)}(x - a, y) + h^{(n)}(x, y + a) + h^{(n)}(x, y - a)] \quad (20)$$

Da bi iteriranje bilo smisleno i uspješno potrebno je definirati rubne uvjete koji se tokom iteracije ne mijenjaju. Iteriranje traje proizvoljno, odnosno iterira se sve dok iznos potencijala pojedinog čvora ne konvergira do željene preciznosti.

4. IMPLEMENTACIJA U JAVASCRIPT-U

Programski jezik JavaScript je odabran za implementaciju zbog njegove jednostavnosti i dostupnosti. Za vizualizaciju programske logike korišten je HTML5 *canvas* element. To je omogućilo da se program može izvoditi u običnom web pregledniku neovisno o vrsti operacijskog sustava ili računala na kojem se program izvodi.

U sljedećem potpoglavlju opisan je najvažniji dio implementacije, a cjelokupni izvorni kod programa dostupan je na adresi navedenoj u uvodu ovog rada.

4.1. Implementacija metode konačnih razlika

Za implementaciju metode konačnih razlika u programski jezik JavaScript bilo je potrebno definirati dva 2D polja. Jedno 2D polje koje će u sebi sadržavati vrijednosti potencijala u čvorovima koje je spremljeno pod nazivom *potencijal*, te drugo 2D polje koje definira da li pojedini čvor sadrži Dirichletov ("d") ili Neumannov ("n") rubni uvjet, ili je pak običan čvor koji sadrži vrijednost potencijala ("h"). To polje je spremljeno pod nazivom *rubniUvjet*. Funkcija koja inicijalizira ta dva 2D polja zove se *inicijalizacija()*:

```
function inicijalizacija () {
    for (var i = 0; i < brojRedova; i++) {
        potencijal[i] = new Array();
        rubniUvjet[i] = new Array();
        for (var j = 0; j < brojStupaca; j++) {
            rubniUvjet[i][j] = "h"
            potencijal[i][j] = 0.0;
            rubniUvjet[0][j] = "n";
            potencijal[0][j] = 0.0;
            rubniUvjet[i][0] = "n";
            potencijal[i][0] = 0.0;
            rubniUvjet[i][parseInt(heightG-1)] = "n";
            potencijal[i][parseInt(heightG-1)] = 0.0;
        }
    }
    for (var j = 0; j < brojStupaca; j++) {
        rubniUvjet[parseInt(widthG-1)][j] = "n";
        potencijal[parseInt(widthG-1)][j] = 0.0;
    }
}
```

Uloga funkcije *inicijalizacija()* je također i definirati početne vrijednosti svakog elementa u polju. U početku svi elementi polja *potencijal* su predefimirani na vrijednost 0, a elementi polja *rubniUvjet* su predefimirani slovom "h", koje označava potencijal. Svaki član koji se nalazi na rubu predefimiran je slovom "n" koje označava Neumannov rubni uvjet. Nakon funkcije *inicijalizacija()* potrebno je implementirati funkciju koja iterativno izračunava vrijednosti potencijala.

Vrijednost potencijala u pojedinom čvoru dobije se na sljedeći način:

1. Definiranje okolnih čvorova oko trenutnog čvora za koji se računa potencijal:

```
var desno = potencijal[i+1][j];
var dolje = potencijal[i][j+1];
var lijevo = potencijal[i-1][j];
var gore = potencijal[i][j-1];
```

2. Provjera da li čvor ne sadrži Dirichletov ili Neumannov uvjet:
 $if (rubniUvjet[i][j] === "d" || rubniUvjet[i][j] === "n") \{ \dots \}$
3. Provjera da li je Neumannov rubni uvjet u neposrednoj blizini trenutnog čvora za koji se računa potencijal, te ako je, ne uzima se vrijednost tog čvora jer to polje je Neumannov rubni uvjet, već se uzima vrijednost trenutnog čvora

```
if (rubniUvjet[i+1][j] === "n")
    {
        desno = potencijal[i][j];
    }
if (rubniUvjet[i-1][j] === "n")
    {
        lijevo = potencijal[i][j];
    }
if (rubniUvjet[i][j+1] === "n")
    {
        dolje = potencijal[i][j];
    }
if (rubniUvjet[i][j-1] === "n")
    {
        gore = potencijal[i][j];
    }
```

4. Implementacija **formule (20)** iz **potpoglavlja 3.2.** za izračun potencijala u trenutnom čvoru:
 $potencijal[i][j] = 0.25 * (gore + dolje + lijevo + desno);$

Potrebno je, dakako, sav kod napisati u *for* petlji ugniježdenoj unutar još jedne *for* petlje kako bi se prošlo kroz sve čvorove.

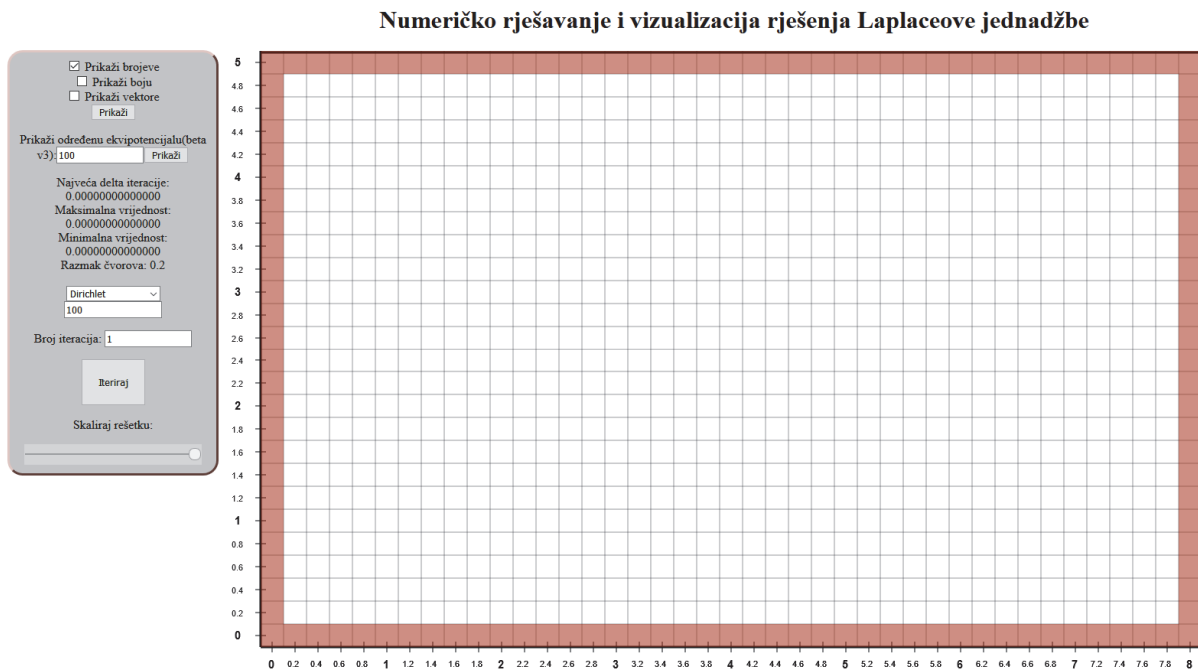
Svakom iteracijom dobiva se točnija vrijednost za pojedini čvor, a kada se vrijednosti potencijala u čvorovima prilikom iteracija više ne mijenjaju znak je da je program je konvergirao k rješenju. Kolika je točnost tako dobivenog rješenja analizirano je u **poglavlju 6.**

5. GRAFIČKO KORISNIČKO SUČELJE I ZADAVANJE RUBNIH UVJETA

Kako bi program funkcionirao na predviđeni način potrebno je definirati parametre presjeka te rubne uvjete u profilu. Parametri presjeka definiraju se na sljedeći način (radi jednostavnosti ulazni parametri rešetke, odnosno presjeka limitirani su samo na cijele brojeve):

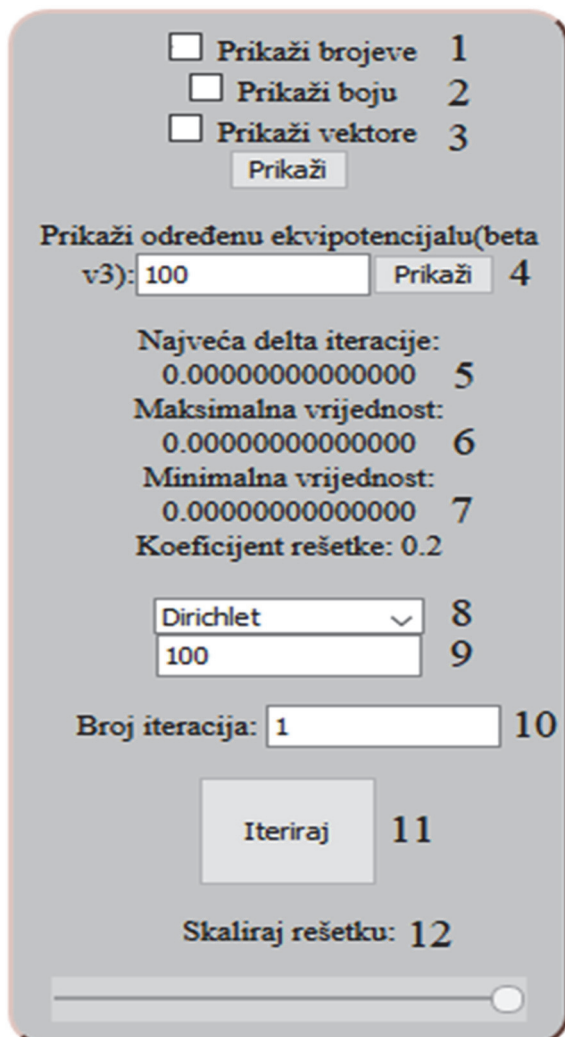
1. Unos visine presjeka
2. Unos širine presjeka
3. Definiranje broja čvorova po jedinici duljine.

Nakon uspješno definiranog presjeka, korisniku se prikazuje HTML5 *canvas* element s iscrtanom rešetkom profila (**Slika 1**), zajedno s trakom elemenata za interakciju s korisnikom koja je čvrsto „zalijepljena“ na lijevu stranu prozora web preglednika.



Slika 1. Grafičko korisničko sučelje

Sadržaj trake s elementima za interakciju s korisnikom (Slika 2):



1. Prikaz iznosa potencijala pojedinog čvora
2. Prikaz vizualizacije rješenja bojom
3. Prikaz vektorskog polja brzina
4. Prikaz određene ekvipotencijale
5. Najveća razlika između dvije posljednje iteracije
6. Maksimalna vrijednost čvora
7. Minimalna vrijednost čvora
8. Odabir rubnog uvjeta
9. Upis iznosa Dirichletovog rubnog uvjeta
10. Broj iteracija
11. Gumb "Iteriraj"
12. Mogućnost smanjenja i povećanja rešetke

Slika 2. Traka s elementima za interakciju s korisnikom

Da bi se definirali rubni uvjeti potrebno je:

1. Kliknuti na rubni uvjet koji se želi definirati (Dirichlet, Neumann ili Očisti rubni uvjet) (element 8)
2. Upisati iznos rubnog uvjeta (ukoliko se definira Dirichletov rubni uvjet) (element 9)
3. S pritisnutom lijevom tipkom miša povlačiti strelicu (kursor) po elementu *canvas*, po čvorovima na kojima se želi definirati rubni uvjet.

Na rubovima presjeka moraju biti zadani Dirichletovi ili Neumannovi rubni uvjeti. Unaprijed je zadan Neumannov rubni uvjet (smeđi kvadrati), a korisnik ga može zamijeniti Dirichletovim (plavi kvadrati). Rubni uvjet ne mora nužno biti samo na rubu pravokutnog presjeka (vidjeti profil na **Slici 8**).

Gumbom "Iteriraj" (element 11) iterira se rješavanje problema onoliko puta koliko je korisnik definirao upisom broja iteracija (element 10). Najveća razlika iteracije (element 5) omogućuje uvid u brzinu konvergencije profila praćenjem najveće razlike vrijednosti istog čvora između dvije posljednje iteracije u zadanom profilu.

Elementi 1, 2 i 3 omogućuju korisniku izbor načina ispisa i/ili vizualizacije rješenja u HTML5 *canvas* elementu.

Program omogućuje korisniku prikaz pojedine ekvipotencijale upisom vrijednosti potencijala te klikom na gumb "Prikaži" (element 4).

6. USPOREDBA S ANALITIČKIM RJEŠENJEM

Programe koji izvide numeričke proračune potrebno je temeljito testirati. Idealno je ako postoji neki jednostavniji problem kojeg je moguće riješiti i analitički. Ukoliko program ima poteškoća s reprodukcijom analitičkog rješenja to ukazuje na ozbiljne pogreške u metodi ili na jednu i više pogrešaka tijekom implementacije metode u kod. U ovom poglavlju analizirana je konvergencija numeričkog rješenja prema poznatom analitičkom rješenju za klasični problem stacionarnog vođenja topline u dvije dimenzije.

6.1 Opis problema

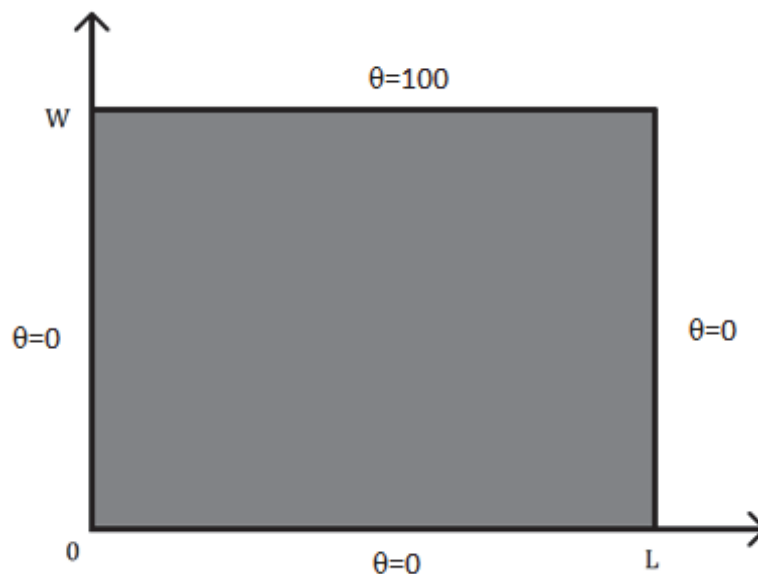
Stacionarno vođenje topline u trodimenzionalnom Kartezijevom koordinatnom sustavu opisuje Laplaceova jednačba oblika

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \quad (19)$$

Ukoliko se proučava neki problem u kojem je jedna dimenzija daleko veća od drugih, temperaturni gradijent u tom smjeru je zanemariv. Primjer iz svakodnevnog života je šipka kojoj je dimenzija u smjeru *z* mnogo veća nego u ostalim smjerovima.

Budući da je $\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0$ problem se svodi na nalaženje 2D polja temperature $\theta(x, y)$ na presjeku šipke. Dakle, mora vrijediti:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad (20)$$



Slika 3. Presjek šipke

Za sljedeće rubne uvjete poznato je analitičko rješenje:

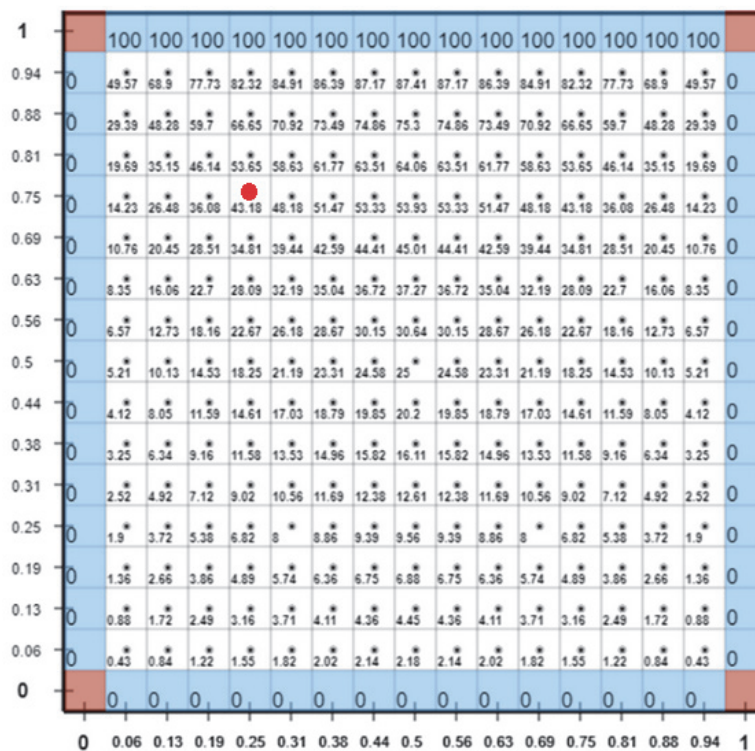
- (I) Lijeva strana: $\theta(0, y) = 0$ ($0 < y < W$)
- (II) Desna strana: $\theta(L, y) = 0$ ($0 < y < W$)
- (III) Donja strana: $\theta(x, 0) = 0$ ($0 < x < L$)
- (IV) Gornja strana: $\theta_g(x, W) = 100$ ($0 < x < L$)

Analitičko rješenje (Pitts i Sissom 1998) je u obliku beskonačnog reda:

$$\theta(x, y) = \theta_g \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \frac{\sinh \frac{n\pi y}{L}}{\sinh \frac{n\pi W}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{21}$$

6.2 Konvergencija metode konačnih razlika

Da bi ustanovili kako odstupanja od analitičkog rješenja ovise o finoći rešetke, tj. o razmaku između čvorova, proveli smo usporedbu rješenja iz programa s različito definiranim razmakom čvorova s **analitičkim rješenjem (21)** za $\theta_g = 100$, dimenzije presjeka $L = W = 1$ i točku $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, vidjeti **Sliku 4**.

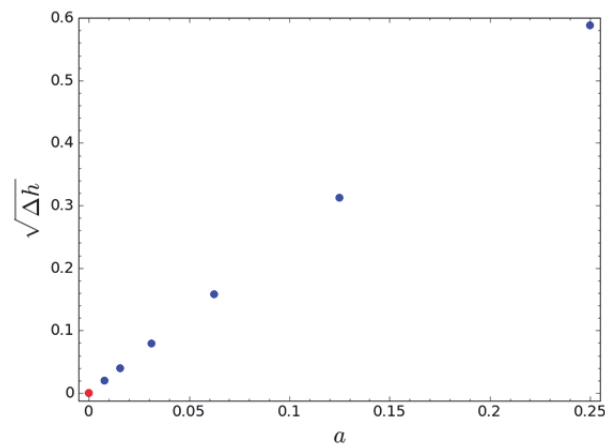


Slika 4. Problem definiran u programu, s razmakom između čvorova 0,0625

Analitičko rješenje je izračunato zbrajanjem prvih 20 neparnih članova reda korištenjem programa SageMath 8.3., a u našem programu problem je riješen metodom konačnih razlika s razmacima između čvorova: 0,25, 0,125, 0,0625, 0,03125, 0,015625 i 0,0078125.

Tablica 1. Odnos odstupanja od analitičkog rješenja Δh i razmaka između čvorova a

Broj čvorova po jedinici duljine	Razmak između čvorova a	Vrijednost potencijala	Odstupanje Δh	Omjer odstupanja
4	0,25	42,8571429	0,3456903	
8	0,125	43,1053057	0,0975275	3,5445419
16	0,0625	43,1778991	0,0249341	3,9114108
32	0,03125	43,1965711	0,0062621	3,9817513
64	0,015625	43,2012660	0,0015672	3,9956981
128	0,0078125	43,2024413	0,0003919	3,9989408
analitičko rješenje		43,2028332	0	



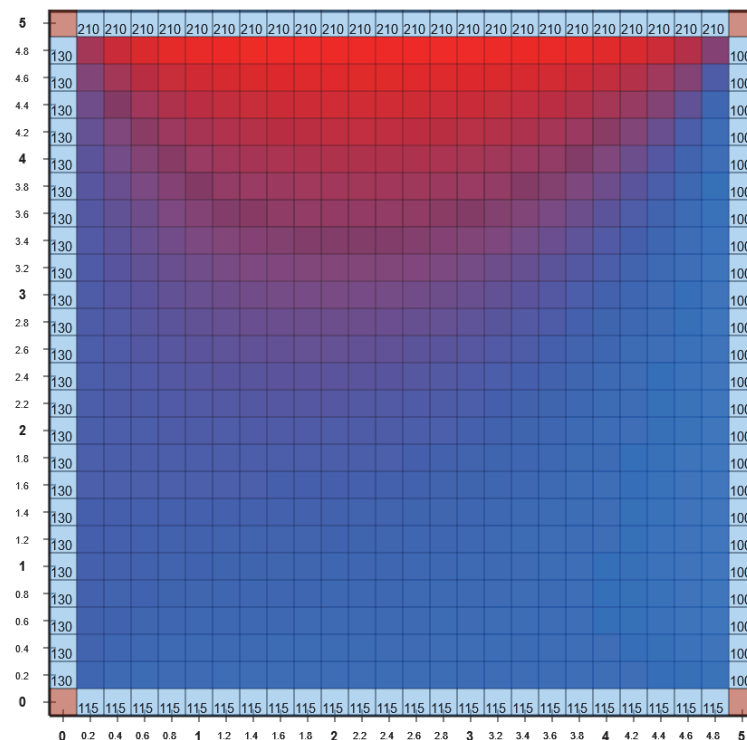
Graf 1. Odnos razmaka između čvorova a i korijena odstupanja Δh

Kao što je vidljivo iz **grafikona 1.** odnos korijena iznosa vrijednosti odstupanja $\sqrt{\Delta h}$ i razmaka između čvorova a je gotovo linearan, tj. $\sqrt{\Delta h}$ je proporcionalan s a , što znači da je odstupanje Δh proporcionalno a^2 , potpuno u skladu s **rezultatom (14)** iz **potpoglavlja 3.1.** Dakle, ako se prepolovi razmak između čvorova dobije se četiri puta manje odstupanje i kako se lijepo vidi iz **grafikona 1.** numerička rješenja (plave točke) konvergiraju točno prema analitičkom rješenju (crvena točka).

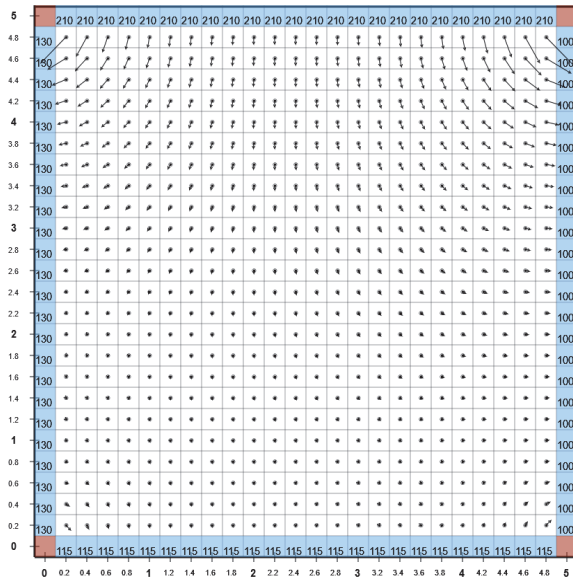
7. VIZUALIZACIJA RJEŠENJA

U programu su omogućeni ispis i vizualizacija rješenja putem HTML5 elementa *canvas* na sljedeće načine:

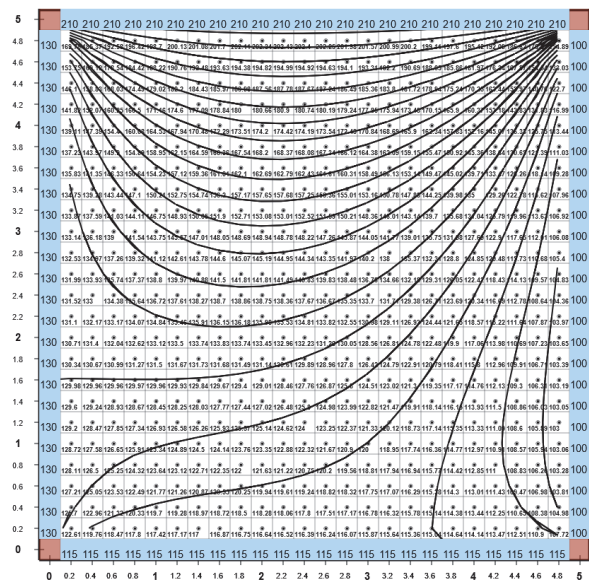
1. Ispisi vrijednosti potencijala u pojedinom čvoru (**Slika 4.**). Ispisana vrijednost je zaokružena na dvije decimale, a sve raspoložive decimale mogu se dobiti dvoklikom na pojedini čvor.
2. Raspon minimalne i maksimalne vrijednosti potencijala prikazan je gradijentom boja, gdje plava boja prikazuje minimalnu, a crvena maksimalnu vrijednost (**Slika 5.**).
3. Prikaz vektorskog polje brzina (**Slika 6.**).
4. Prikaz ekvipotencijala (**Slika 7.**).



Slika 5. Vizualizacija vrijednosti potencijala gradijentom boja u definiranom profilu visine 5, širine 5, s razmakom između čvorova 0,2



Slika 6. Vizualizacija problema visine 5, širine 5 s razmakom čvorova 0,2 vektorskim poljem brzina



Slika 7. Vizualizacija problema visine 5, širine 5 s razmakom između čvorova 0,2 ekvipotencijalama ekvidistance 5

8. USPOREDBA S DRUGIM PROGRAMSKIM RJEŠENJIMA

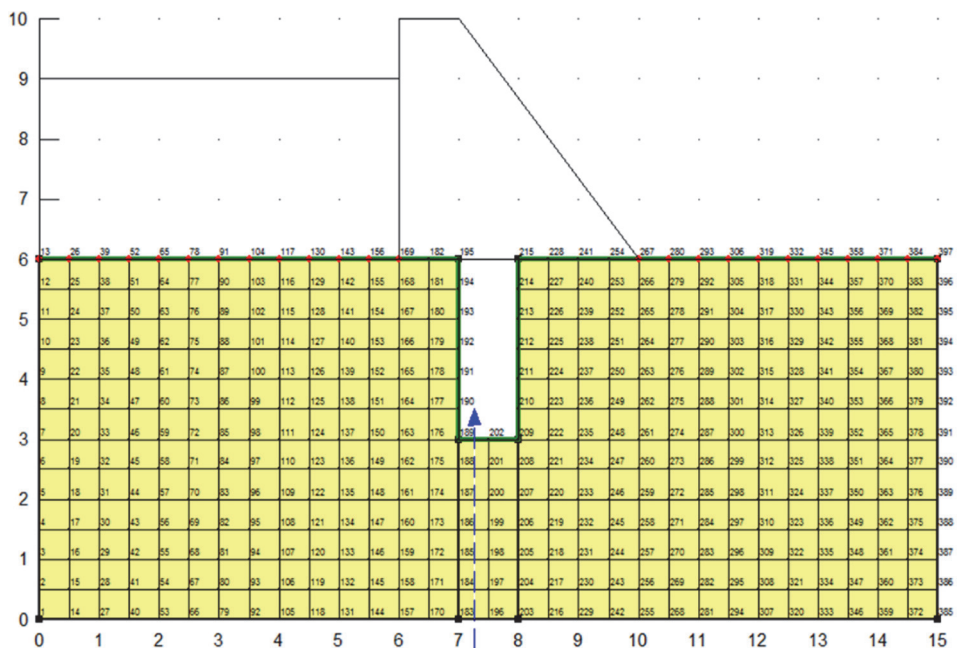
Izračun programa opisanog u ovom radu (Slika 9) uspoređen je i s rezultatima programskog paketa SEEP/W za primjer procjeđivanja kroz temeljno tlo ispod gravitacijske brane (Slika 8) opisan u (Stanojević 2012).

Uzvodna strana brane

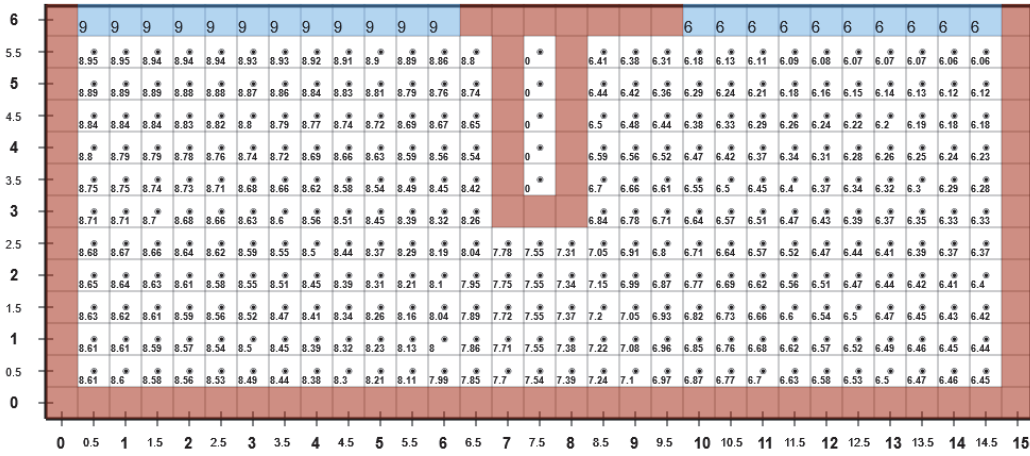
- H = 9 m;
- u/γ_w (tlačna visina) = 3 m
- z (geodetska visina) = 6 m

Nizvodna strana brane

- H = 6 m;
- u/γ_w (tlačna visina) = 0 m
- z (geodetska visina) = 6 m

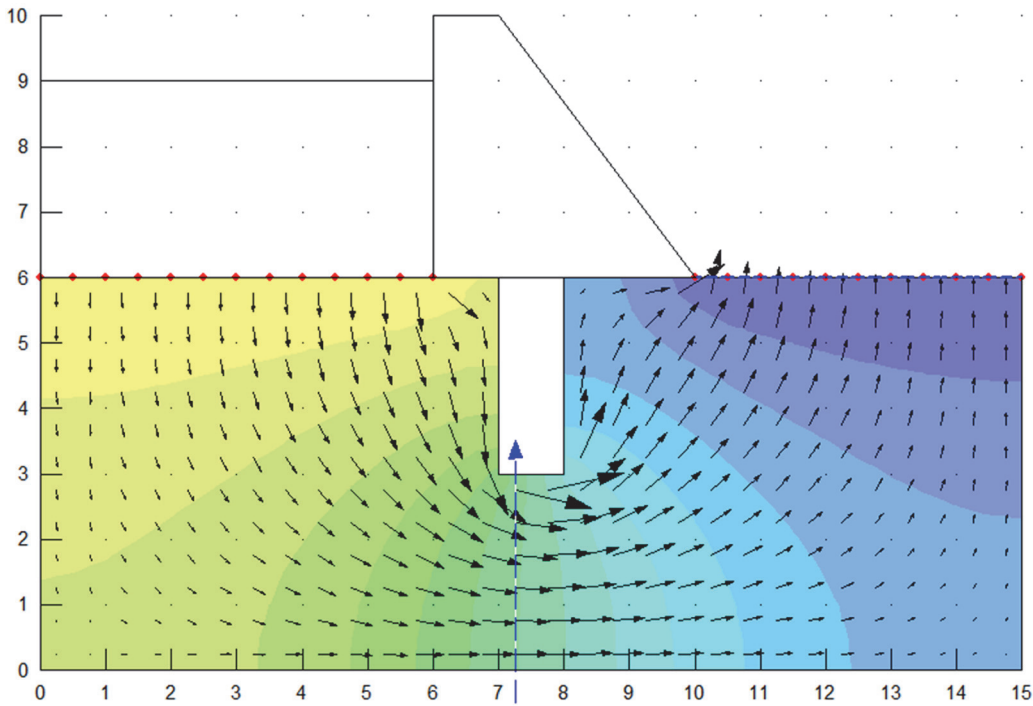


Slika 8. Skica numeričkog modela gravitacijske brane (Stanojević 2012)

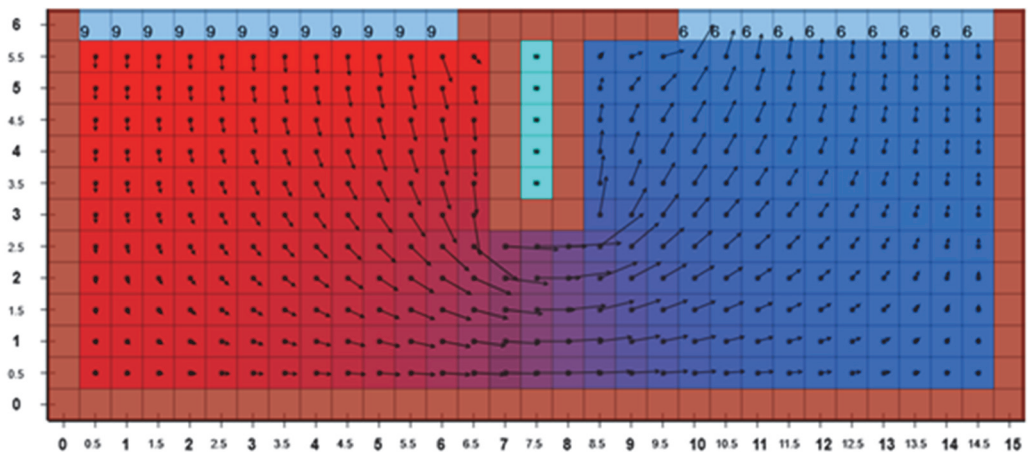


Slika 9. Profil (Stanojević 2012) definiran u našem programu

Usporedba rješenja vektorskog polja brzina (Slika 10 i 11):

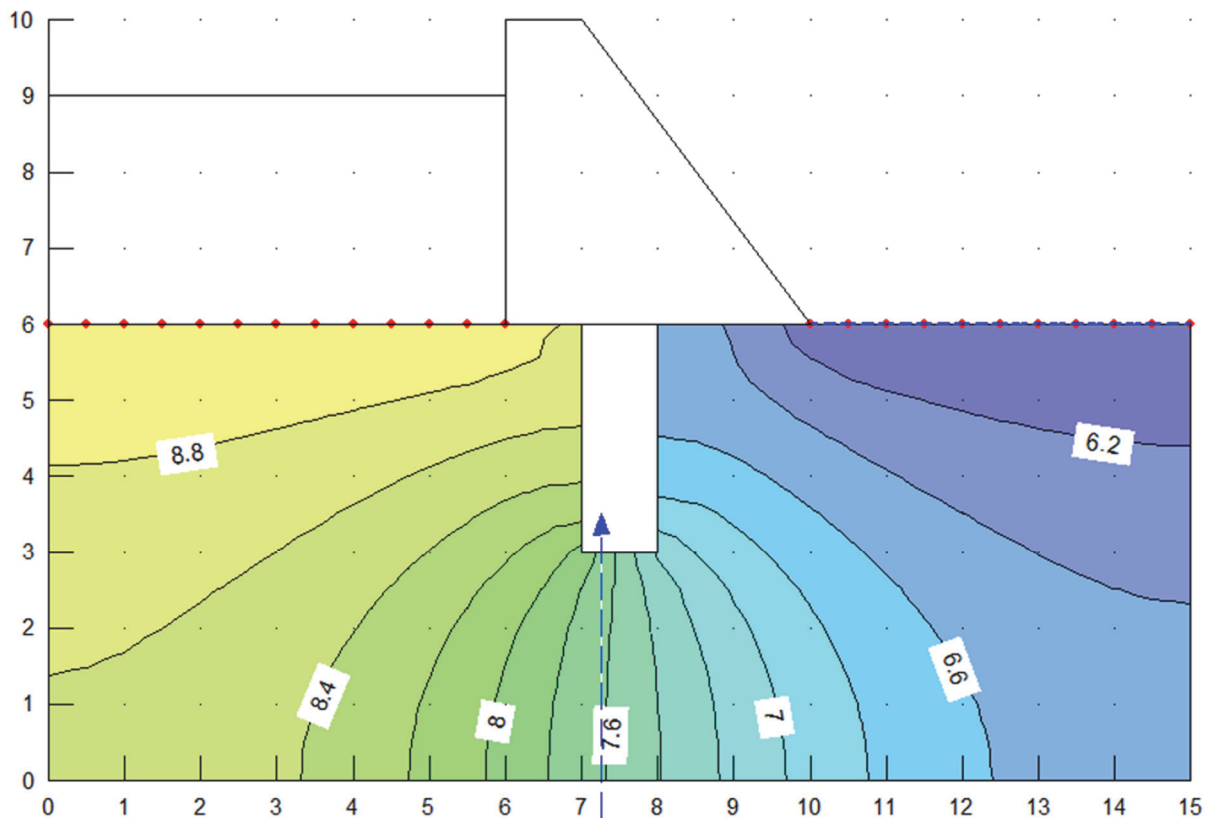


Slika 10. Prikaz vektora brzine toka (Stanojević 2012)

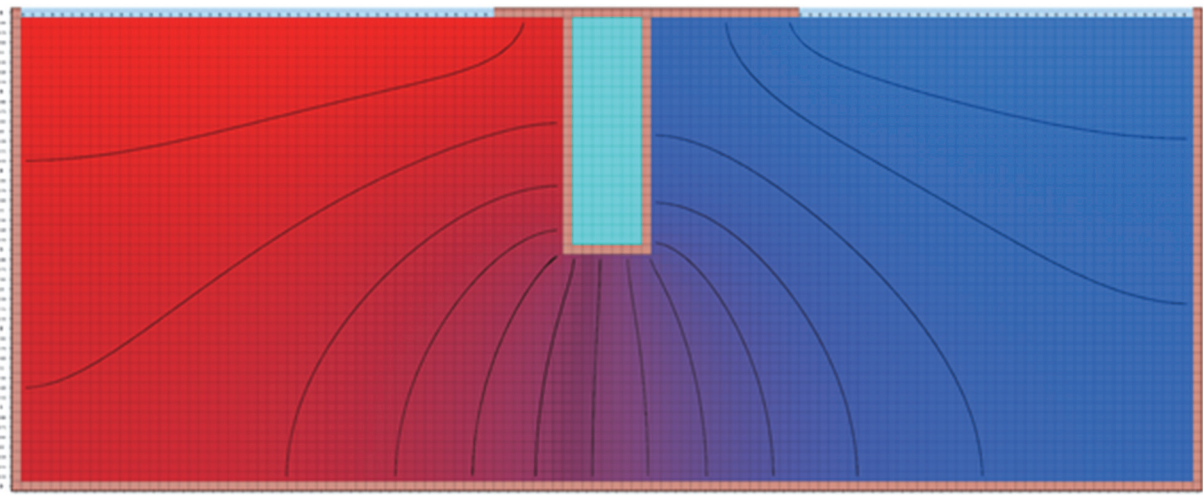


Slika 11. Prikaz vektora brzine toka u našem programu (razmak između čvorova: 0,5)

Usporedba ekvipotencijala (Slika 12 i 13):



Slika 12. Ekvipotencijale (Stanojević 2012)



Slika 13. Ekvipotencijale izračunate u našem programu (razmak između čvorova: 0,125)

9. ZAKLJUČAK

Razvijen je program za numeričko rješavanje i vizualizaciju rješenja Laplaceove jednadžbe koji koristi metodu konačnih razlika. Usporedbom rezultata programa s analitičkim rješenjem i rješenjima drugih programskih paketa potvrđeno je da je program ispravno implementiran. Implementacija u programskom jeziku JavaScript i HTML5 element *canvas* omogućuju vizualizaciju rješenja u bilo kojem modernom web pregledniku, a sam program i njegov izvorni kod slobodno su dostupni za korištenje na web adresama navedenim u uvodu ovog rada.

Zbog jednostavnosti korisničkog sučelja i raznolikih mogućnosti vizualizacije te lake dostupnosti putem web preglednika program je prikladan za korištenje u edukativne svrhe. Studenti ga mogu koristiti kako bi stekli intuiciju za rješenja Laplaceove jednačbe i odgovarajuće probleme iz raznih područja znanosti i tehnike kao što su stacionarno vođenje topline i stacionarno tečenje vode u tlu.

10. LITERATURA

- Burden, R.L., Faires, J.D. (1989). *Numerical Analysis*, 4th Ed. Boston: PWS-KENT Publishing Company
- Jović, V. (2006). *Osnove hidromehanike*. Zagreb: Element. 9. pogl.
- Lang, C.B., Pucker N. (2005). *Mathematische Methoden in der Physik*, 2. Auflage. München: Elsevier GmbH (Spektrum Akademischer Verlag)
- Pitts, D.R., Sissom, L.E. (1998). *Heat Transfer*, 2nd Ed. New York: McGraw-Hill / Schaum's Outline Series.
- Press, W.H. et al. (1992). *Numerical Recipes in FORTRAN*, 2nd Ed. Cambridge: Cambridge University Press
- Selvadurai, A.P.S. (2000). *Partial Differential Equations in Mechanics 1: Fundamentals, Laplace's Equation, Diffusion Equation, Wave Equation*. Berlin: Springer Verlag
- Stanojević I. (2012). *PROGRAMSKI PAKET SEEP/W*. Završni rad. Varaždin: Sveučilište u Zagrebu, Geotehnički fakultet.
- Strelec F. (2018). *NUMERIČKO RJEŠAVANJE I VIZUALIZACIJA RJEŠENJA LAPLACEOVE JEDNAČBE*. Završni rad. Varaždin: Sveučilište u Zagrebu, Geotehnički fakultet.