Školsko natjecanje iz matematike 2003.

V. gimnazija
24. veljače 2003.

Ciklus prošlogodišnjih natjecanja za učenike V. gimnazije počeo je školskim natjecanjem. Natjecanje je proveo aktiv matematike. Pokazalo se da je školsko natjecanje bilo znatno teže nego općinsko na koje su se najuspješniji učenici (njih oko 30) iz svakog razreda plasirali.

Prvi razred

1. Dokaži da je za proizvoljan $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ broj $n^4 + 4$ složen.
2. Ani je nedostajalo 7 kuna, a Maši 2 kune kako bi mogle kupiti kutiju bojica. Kada su skupile sav svoj novac, nedostajalo im je čak za kupovinu jedne kutije. Koliko stoji kutija bojica?
3. Odredi sve vrijednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ tako da svako rješenje sustava jednadžbi $x+7y = a$, $2x-y = 5$ zadovoljava uvjet $x > y - 2$.
4. Dokaži: ako je $a + b + c = 0$ tada je $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.
5. Dan je jednakokračan trokut ABC tako da je $|AC| = |BC|$. Okomica iz vrha A na krak BC dijeli kut α na dva kuta koji su u omjeru $1 : 4$. Koliki su unutarnji kutovi trokuta ABC?

Drugi razred

1. Neka su z_1 i z_2 kompleksni brojevi za koje vrijedi $z_1 \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1} \cdot z_2 = 1$. Dokaži da je $\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ realan broj.
2. Ako je $p_1 p_2 = 2(q_1 + q_2)$, tada barem jedna od jednadžbi $x^2 + p_1 x + q_1 = 0$, $x^2 + p_2 x + q_2 = 0$ ima realan korijen. Dokaži!
3. Na simetrali pravog kuta označena je točka T. Točkom T povučen je pravac p koji na krakovima kuta odsijeca dužine duljina a i b. Dokaži da vrijednost izraza $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ ne ovisi o izboru pravca p.
4. Zadana je jednadžba $mx^2 - (1 + 8m)x + 4(4m + 1) = 0$.
   (a) Odredi vrijednost parametra m tako da među rješenjima vrijedi relacija $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{1}{4}$.
   (b) Napiši funkciju $f(x) = mx^2 - (1 + 8m)x + 4(4m + 1)$ za manju vrijednost parametra m iz (a).
   (c) Nacrtaj graf te funkcije i odredi ekstrem.
5. U kvadratnoj tablici 4×4 proizvoljno su razmješteni brojevi $1, 2, 3, \ldots, 16$. Dokaži da postoje dva susjedna polja (tj. polja sa zajedničkim bridom) u koja su upisani brojevi razlika kojih je barem 4.

Treći razred

1. Ako je $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, bez upotrebe kalkulatora odredi vrijednost $\cos 2\alpha$, $(\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle)$ i zatim odredi $\cos\left(6\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

2. Riješi nejednadžbu $4^{\sin^2 \pi x} + 3 \cdot 4^{\cos^2 \pi x} \leq 8$.

3. Odredi nul-točke te točke u kojima se dobivaju ekstremne vrijednosti funkcije $f(x) = -\sqrt{3}\sin 4x - \cos 4x + 1$ i skiciraj graf na intervalu $[0, 3\pi]$.

4. Ako za stranice trokuta vrijedi $a^2 = b(b+c)$, dokaži da je $\alpha = 2\beta$.

5. Kut pobočke pravilne uspravne četverostrane piramide prema ravnini osnovke je α. Osnovnim bridom položena je ravnina koja s ravninom osnovke zatvara kut β. Izračunaj površinu presjeka piramide s tom ravninom ako je osnovni brid piramide jednak a. Diskusija!

Četvrti razred

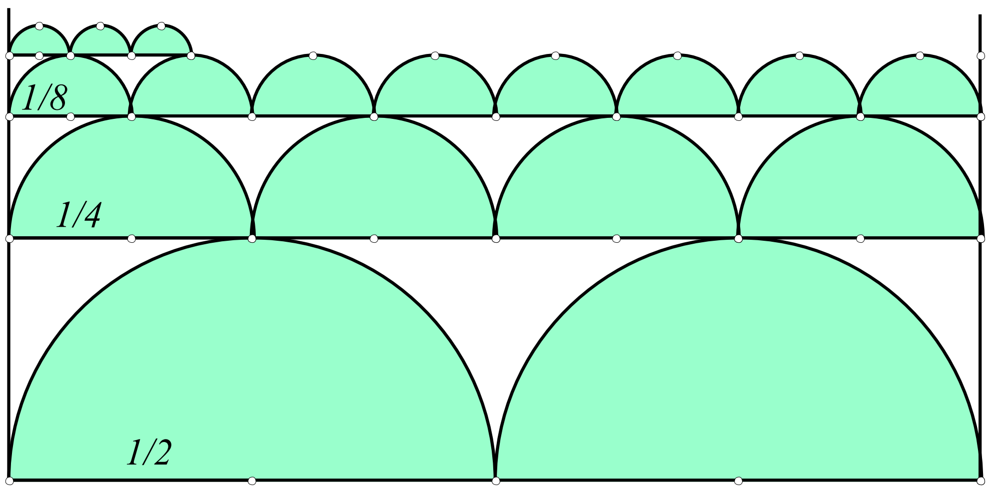
1. Broj 123456789(10)(11)(12)(13)(14) napisan je u bazi 15. Koliki je ostatak pri dijeljenju s brojem 7?

2. Nađi cijeli broj a takav da broj $(x-a)(x-10)+1$ ima rastav $(x+b)(x+c)$, gdje su $b, c \in \mathbb{Z}$.

3. Koliko je $S = 1\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + \ldots + (n+1)\binom{n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$?

4. Jednadžba $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, gdje su a, b, c, d realni brojevi ima četiri kompleksna rješenja. Umnožak dva od tih rješenja je $13+i$, a zbroj druga dva rješenja je $3+4i$. Odredi b.

5. Na slici 1. vide se tri retka i početak četvrtog retka niza polukrugova. U n-tom retku nalazi se 2^n polukrugova polumjera $r_n = \dfrac{1}{2^n}$. Nađi zbroj površina svih polukrugova.



Slika 1.