



KOGNITIVNA REPREZENTACIJA BROJEVA U DJECE RAZLIČITE DOBI

Vesna VLAHOVIĆ ŠTETIĆ
Filozofski fakultet, Zagreb

Suzana KOVAČIĆ
Dječji vrtić "Bambi", Zagreb

UDK: 159.953-053.2
Izvorni znanstveni rad

Primljeno: 31. 1. 1997.

Cilj ovog rada bio je provjeriti i usporediti kognitivnu reprezentaciju brojeva u tri skupine djece: predškolaca (N=30), učenika 1. razreda (N=31) i učenika 2. razreda (N=30) osnovne škole. U skladu s razvojnom teorijom razumijevanja brojeva, pretpostavljeno je da mlađa djeca i konstruiraju brojeve kao cjeline sastavljene od jediničnih elemenata, a da učenici prvog i drugog razreda imaju više složenijih konstrukcija. Zadatak ispitanika bio je prikazati pet brojeva zadanih slučajnim redoslijedom, rabeći pritom jedinične i desetične kockice. U drugom pokušaju ispitanici su trebali iste brojeve prikazati na drukčiji, nov način. Točne dječje konstrukcije razvrstane su u sljedeće kategorije: 1) reprezentacije jedan-po-jedan, 2) kanoničke reprezentacije i 3) nekanoničke reprezentacije. Rezultati govore kako nema razlika u uratku između djevojčica i dječaka. Analize s obzirom na dob djece pokazuju da u prvom pokušaju konstrukcije učenici drugog razreda imaju manje jedan-po-jedan reprezentacija, a više kanoničkih reprezentacija nego ostale dvije skupine ispitanika. U nekanoničkim reprezentacijama nema razlika među ispitanim skupinama. Kad se analiziraju točne konstrukcije u drugom pokušaju, tri skupine ispitanika ne razlikuju se međusobno po broju jedan-po-jedan konstrukcija. Predškolska djeca imaju veći broj kanoničkih reprezentacija nego učenici drugog razreda, a manji broj nekanoničkih reprezentacija od učenika prvog i drugog razreda. Učenici drugog razreda pokazali su veću sposobnost od predškolske djece da konstruiraju zadani broj na dva različita načina. Dobiveni rezultati u skladu su s pretpostavkama razvojne teorije razumijevanja brojeva.

DRUŠ. ISTRAŽ. ZAGREB
GOD. 8 (1999),
BR. 4 (42),
STR. 563-577

VLAHOVIĆ-ŠTETIĆ, V.,
KOVAČIĆ, S.:
KOGNITIVNA
REPREZENTACIJA...

Dosadašnja istraživanja govore o postupnom razvoju različitih oblika dječje matematičke kompetencije. Počeci usvajanja matematičkih pojmova javljaju se već u vrlo ranoj dobi. Čak i djeca mlađa od šest mjeseci mogu uočiti jednakost ili razliku između skupova ako imaju manje od četiri elementa (Starkey i Cooper, 1980, prema Klein i Starkey, 1987).

Tijekom druge godine života djeca počinju rabiti nazive za brojeve u odgovarajućem kontekstu, npr. pri penjanju uz stube ili u igri (Wynn, 1992).

Djeca u trećoj godini poznaju dva od tri osnovna načela u brojenju (Klein i Starkey, 1987; Sophian, 1988). Prvo načelo je korespondencija jedan prema jedan, tj. da se svaki objekt iz skupa može povezati s jednim i samo jednim brojem. Drugo načelo je stalnost redoslijeda brojeva, tj. da svaki broj ima prethodnika i sljedbenika i da je taj redoslijed nepromjenjiv. Načelo kardinalnosti, tj. da je posljedni broj uporabljen u prebrojavanju skupa ujedno i broj koji predstavlja ukupnu količinu u skupu, djeca počinju razumijevati s četiri godine (Frye i sur., 1989). Kad je riječ o brojenju, odnosno prebrojavanju elemenata skupa, upitno je prethodi li razumijevanje načela brojenja samoj vještini ili je redoslijed obrnut. Gelman pretpostavlja dječje implicitno poznavanje pet načela brojenja (Gelman i Meck, 1986; Gelman i sur., 1986). Uz već navedena načela tu su još načelo prebrojivosti bilo kojeg skupa elemenata i načelo irelevantnog redoslijeda, tj. brojenje može započeti na bilo kojem dijelu niza ili skupa. Prema mišljenju Gelman prethodno poznavanje načela dovodi do usvajanja vještine. Drugi autori (Baroody i Ginsburg, 1986; Fuson, 1990; Fuson i Hall, 1983) drže kako djeca značenje brojeva uče postupno i ovisno o kontekstu u kojem ih susreću, pa da tako vještina prethodi načelima brojenja. Nema konačnih empirijskih dokaza u prilog bilo kojoj od ovih teorija, no istraživanja jasno pokazuju da je brojenje iznimno važno za kasnije usvajanje operacija zbrajanja i oduzimanja (Fuson i Hall, 1983).

Mnoga predškolska djeca mogu točno brojiti i iznad 20. Pritom obično zastaju na broju koji završava s 9 ili 0, a najčešće pogreške su preskakanje desetica (npr....37, 38, 39, 50...), ponavljanje desetica (npr....37, 38, 39, 20, 21...) i kreiranje nestandardnih brojevnih imena koja pokazuju vezu između desetica i jedinica u broju (npr....dvadeset osam, dvadeset devet, dvadeset deset, dvadeset jedanaest..).

Prije početka školovanja mnoga djeca nauče i pisane simbole za jednoznačenaste brojeve (Sinclair i Sinclair, 1986). Predškolska djeca rabe istodobno različite strategije zbrajanja i oduzimanja. Fuson (1990) i Siegler i Jenkins (1989) navode nekoliko dječjih strategija pri zbrajanju. Najjednostavnija je strategija prebrojavanja kojom dijete rješava zadatak prebro-

DRUŠ. ISTRAŽ. ZAGREB
GOD. 8 (1999),
BR. 4 (42),
STR. 563-577

VLAHOVIĆ-ŠTETIĆ, V.,
KOVAČIĆ, S.:
KOGNITIVNA
REPREZENTACIJA...

javajući zadane pribrojnice npr. $3 + 4$ dijete izračunava brojenjem: "1, 2, 3, 4, 5, 6, 7"; pri čemu se može, ali i ne mora služiti konkretnim objektima. Druga strategija je nastavljanje na jedan od pribrojnika. Tako dijete $3 + 4$ računa kao: "3, 4, 5, 6, 7". Pri uporabi te strategije djeca vrlo brzo nauče da je efikasnije nastaviti brojenje od većeg pribrojnika (npr. "4, 5, 6, 7"). Treća strategija je rastavljanje pribrojnika na dva jednaka broja i pribrajanje ostatka, npr: " $3 + 3 = 6$ i zatim $6 + 1 = 7$ ". I konačno, četvrta strategija je dozivanje rezultata iz dugoročnog pamćenja, tj. dijete izravno odgovori " $3 + 4 = 7$ ". Siegler (1987) navodi četiri strategije predškolaca za operaciju oduzimanja. Prva strategija je brojenje prstiju pri kojoj djeca podižu u zrak prste koji predstavljaju umanjenik (bilo jedan po jedan, bilo odjednom), zatim spuštaju onoliko prstiju koliko iznosi umanjitelj te prebroje prste koji su preostali kao razliku. Druga strategija sličí prvoj po načinu rada, ali dijete ne rabi konkretne objekte već broji na glas. Treća strategija je po uporabi prstiju vrlo slična prvoj, ali u njoj dijete ne prebrojava prste koji predstavljaju razliku već samo izriče njihov broj. Četvrta strategija je dozivanje rezultata iz dugoročnog pamćenja. Prema mišljenju Sieglera (1987), iako djeca mogu istodobno rabiti više strategija, u pravilu pokazuju preferenciju za jednu ili dvije.

Brojna istraživanja pokazuju kako su predškolci sposobni rješavati i problemske matematičke zadatke, iako su im oni relativno teški (Hudson, 1983; Riley i Greeno, 1988; Riley i sur., 1983; Stern i Lehrndorfer, 1992).

Kao što je vidljivo iz spomenute literature, djeca predškolske dobi i u početku školovanja imaju već razvijena neka matematička znanja i vještine, ali priroda njihova razumijevanja matematike i matematičkih koncepata nije još sasvim poznata.

Prema razvojnoj teoriji razumijevanja brojeva Lauren Resnick (1983), djeca predškolske dobi reprezentiraju brojeve pomoću mentalnog brojevnog pravca. Broj je određen pozicijom na pravcu, a vrijedi relacija da je svaki sljedeći broj veći od prethodnog. Vježbanjem brojenja numerički niz mijenja se iz liste riječi u reprezentaciju količine pri čemu svako mjesto na brojevnom pravcu označava neku količinu. Djeca rabe mentalni brojevni pravac za brojenje i usporedbu količina, ali još uvijek imaju teškoća ako brojenje moraju započeti od nekog drugog broja, a ne od jedan (Resnick, 1983). Pri usporedbi dva broja dječje vrijeme latencije je to dulje što su brojevi međusobno bliže na brojevnom pravcu (Donaldson i Balfour, 1968).

Resnick (1983) drži da predškolska djeca vide brojeve kao količine sastavljene od jedinica, a u prvim godinama školovanja djeca počinju rabiti shemu "dio cjelina" koja im omoguću-

DRUŠ. ISTRAŽ. ZAGREB
GOD. 8 (1999),
BR. 4 (42),
STR. 563-577

VLAHOVIĆ-ŠTETIĆ, V.,
KOVAČIĆ, S.:
KOGNITIVNA
REPREZENTACIJA...

je da količine vide kao dijelove drugih količina. Ta shema čini mogućim rješavanje složenijih matematičkih problema (npr. nekih vrsta problemskih zadataka), ali i razumijevanje višeznamenkastih brojeva. Uz pomoć sheme "dio-cjelina" djeca shvaćaju da se dvoznamenkasti brojevi sastoje od desetica i jedinica, što je preduvjet kanoničke i nekanoničke reprezentacije. Kanonička reprezentacija broja znači da dijete vidi broj organiziran kao određen broj desetica i najviše 9 jedinica (npr. 82 je predstavljen kao 8 desetica i 2 jedinice). Nekanonička reprezentacija pretpostavlja organizaciju broja u desetice i jedinice, ali je broj jedinica veći od 9 (npr. 82 je 7 desetica i 12 jedinica).

Prema toj teoriji školska djeca, nakon što uvide shemu "dio cjelina", prolaze kroz tri faze u kognitivnoj reprezentaciji višeznamenkastih brojeva. U prvoj fazi uviđaju da se višeznamenkasti broj sastoji od desetica i jedinica (npr. broj 26 sastavljen je od dvije desetice i šest jedinica). U drugoj fazi na dva načina spoznaju mogućnost različitog dijeljenja količina: empirijski (prebrojavanjem mogu utvrditi kako su 3 desetice i 15 jedinica jednaki kao 4 desetice i 5 jedinica) i direktno (primjenjujući zamjenu jedinica deseticom pa je $40 + 5 = 30 + 15$, jer se jedna desetica može zamijeniti s deset jedinica). U trećoj fazi (tzv. fazi formalne aritmetike) djeca primjenjuju načela zamjene na pisane brojeve čime je omogućeno razumijevanje "posuđivanja" i "prenošenja" prilikom osnovnih aritmetičkih operacija s višeznamenkastim brojevima.

Mnogobrojna istraživanja pokazuju međukulturalne razlike u razumijevanju brojeva i to u korist djece iz azijskih zemalja (Fuson i sur., 1994; Saxe i Posner, 1983; Song i Ginsburg, 1987; Stevenson i sur., 1986). Razumijevanje pojma broja ovisi o kognitivnoj reprezentaciji broja, a ona je pod izravnim utjecajem jezika kojim dijete govori. Djeca iz engleskog govornog područja sklonija su vidjeti brojeve organizirane kao skupove jedinica, a azijska djeca vide brojeve kao kombinaciju jedinica i desetica (Miura, 1987; Miura i Okamoto, 1989; Miura i sur., 1993; Nunes, 1992). Slični podaci dobiveni su i usporedbom hrvatske i američke djece, pri čemu hrvatski prvoškolci brojeve češće vide kao organizirane u desetice i jedinice (bilo kanonički bilo nekanonički), a američka djeca češće prikazuju brojeve kao cjeline sastavljene od jediničnih elemenata (Vlahović-Štetić i Miura, 1995).

Prilikom polaska u školu, vještine i predznanja iz matematike mogu olakšati, ali ponekad i otežati uradak u tzv. "školskoj" matematici. Dječje poimanje brojeva djeluje na kasnije razumijevanje položaja znamenke u višeznamenkastom broju i razumijevanje operacija zbrajanja i oduzimanja (Fuson, 1990). Zato nam se čini zanimljivim ispitati način na koji pred-

DRUŠ. ISTRAŽ. ZAGREB
GOD. 8 (1999),
BR. 4 (42),
STR. 563-577

VLAHOVIĆ-ŠTETIĆ, V.,
KOVAČIĆ, S.:
KOGNITIVNA
REPREZENTACIJA...

školci i djeca u početku školovanja vide brojeve i upoznati značenje koje im pridaju.

U skladu s pretpostavkama razvojne teorije razumijevanja brojeva (Resnick, 1983), očekujemo da mlađa djeca vide (i konstruiraju) brojeve kao cjeline sastavljene od jediničnih elemenata, a da učenici prvog i drugog razreda imaju više kaničkih i nekanoničkih konstrukcija. Također pretpostavimo kako će starija djeca biti sposobnija načiniti više međusobno različitih konstrukcija istog broja.

METODOLOGIJA

Ispitanici

U ispitivanju su sudjelovale tri skupine djece različite dobi. Skupinu predškolaca (N=30) činilo je 14 djevojčica i 16 dječaka iz starije vrtičke grupe, prosječne dobi od 6 godina i 4 mjeseca.

Skupina učenika prvog razreda (N=31) sastojala se od 15 djevojčica i 16 dječaka prosječne dobi od 7 godina i 3 mjeseca.

Treću skupinu činili su učenici drugog razreda (N=30), 17 djevojčica i 13 dječaka, prosječne dobi od 8 godina i 6 mjeseci.

Pribor i postupak

Pri ispitivanju su rabljene kockice kojima se nastoji prikazati struktura brojevnog sustava s bazom 10 (tzv. "Base 10 blocks"). Komplet kockica sadrži 100 bijelih jediničnih kockica i 20 plavih desetičnih blokova. Na svakom desetičnom bloku označene su jedinične kockice pa je vidljivo da se blok sastoji od 10 jednakih jediničnih dijelova. U Sjedinjenim Američkim Državama pomoću takvih kockica poučava se koncept višeznamenastog broja, tj. mjesto i značenje jedinica i desetica u broju.

Osim kockica rabljene su i raznobojne kartice s ispisanim brojevima (za vježbu: 2 i 7, za zadatke: 11, 13, 28, 30 i 42).

Djevojčice i dječaci ispitani u ovom istraživanju nisu bili ranije upoznati s opisanim priborom. Individualno ispitivanje, prema standardnoj proceduri (Miura, 1987), provodila je uvježbana eksperimentatorica, studentica psihologije.

Na početku ispitivanja dijete je upoznato s kockicama i rečeno mu je da se kockice mogu rabiti za brojenje i prikazivanje (sastavljanje) brojeva. Zatim je djetetu prikazano standardno brojenje po jedan do deset, rabeći prvo jedinične kockice, a potom desetični blok. Istaknuto je da su ta dva skupa jednaka, tj. da je deset jediničnih kockica po duljini jednako desetičnom bloku. U dva zadatka za vježbu, dijete je pomoću kockica sastavljalo brojeve 2 i 7. Nakon toga, slučajnim redoslijedom zadavano je pet preostalih kartica s brojevima. Dijete bi naglas pročitalo broj s kartice i pomoću kockica konstruiralo zadani broj, pri čemu je moglo rabiti sve kockice iz kom-

pleta. Način konstrukcije svakog pojedinog broja zapisan je u djetetov protokol.

Kako bi se ispitala sposobnost djeteta da broj konstruira na nov način, uveden je i drugi pokušaj konstrukcije istog broja. Dijete je ponovno upozoreno na jednakost jedne desetične i deset jediničnih kockica te da pri konstrukciji brojeva može rabiti kockice obiju boja.

Zatim je prikazana prva od pet kartica sa zadatkom i eksperimentatorica je kockicama na stolu pred djetetom prikazala njegovu/njezinu prvu konstrukciju zadanog broja. Dijete je upitano može li prikazati broj rabeći kockice drukčije. Način na koji je drugi put složilo isti broj zapisan je u protokol. Isti postupak primijenjen je za svih pet brojeva.

Dječji odgovori ocjenjivani su zasebno za prvi i drugi pokušaj prikazivanja svakog broja. Točnim konstrukcijama držane su one koje brojem kockica potpuno odgovaraju zadanom broju, a razvrstane su u sljedeće kategorije (prema Miura, 1987):

1) Reprezentacija jedan-po-jedan – prikaz broja u kojem su rabljene samo jedinične kockice (npr. broj 28 prikazan pomoću dvadeset osam jediničnih kockica).

2) Kanonička reprezentacija – prikaz broja pomoću desetičnih i jediničnih kockica, ali tako da nema više od 9 jediničnih kockica (npr. broj 28 prikazan pomoću dva desetična bloka i osam jediničnih kockica).

3) Nekanonička reprezentacija – prikaz broja u kojem su rabljene i desetične i jedinične kockice, ali je uporabljeno više od 9 jediničnih kockica (npr. broj 28 prikazan je pomoću jednog plavog desetičnog bloka i osamnaest jediničnih kockica).

REZULTATI

Podaci dobiveni ispitivanjem kognitivne reprezentacije brojeva u djece različite dobi prikazani su u tablici 1. Svako dijete moglo je imati najviše pet točnih konstrukcija u svakom pokušaju. Ako je npr. dijete u prvom pokušaju za konstrukciju tri broja rabilo jedan-po-jedan reprezentaciju, a za dva broja kanoničku reprezentaciju, njegov/njezin rezultat u prvom pokušaju je 3 u kategoriji jedan-po-jedan, 2 u kanoničkoj i 0 u nekanoničkoj reprezentaciji. U drugom pokušaju zadatak je bio prikazati isti broj na drukčiji način. U tablici 1. prikazane su dječje točne konstrukcije u prvom pokušaju i točne konstrukcije u drugom pokušaju, bez obzira na to je li dijete uspjelo drukčije prikazati broj. Uspješne, a različite konstrukcije prikazane su i analizirane kasnije.

Iz tablice 1. vidljivo je da djeca nisu imala teškoća u konstrukciji zadanih brojeva. Broj točnih konstrukcija učenika prvog i drugog razreda i u prvom i u drugom pokušaju iznosi

● TABLICA 1
Točne kognitivne reprezentacije brojeva predškolske djece, učenika prvog i učenika drugog razreda

100 posto. Postotak točnih konstrukcija u djece predškolske dobi u prvom pokušaju iznosi 99.33 posto, a u drugom pokušaju 84.66 posto.

Ispitanici	Pokušaj	Vrsta kognitivne reprezentacije broja						Ukupno točnih konstrukcija	
		jedan-po-jedan		kanonička		nekanonička		broj	%
		broj	%	broj	%	broj	%	broj	%
Predškolci (N=30)	1.	101	67.33	35	23.33	13	8.67	149	99.33
	2.	41	27.33	74	49.33	12	8.00	127	84.66
1. razred (N=31)	1.	75	48.39	64	41.29	16	10.32	155	100.00
	2.	58	37.42	53	34.19	44	28.39	155	100.00
2. razred (N=30)	1.	26	17.33	119	79.34	5	3.33	150	100.00
	2.	73	48.67	28	18.66	49	32.67	150	100.00

● TABLICA 2
Prosječne vrijednosti (M i SD) uratka djevojčica i dječaka u kognitivnoj reprezentaciji brojeva i rezultati t-testova

Ovim radom željeli smo usporediti prosječan uradak djece različite dobi unutar svake pojedine vrste kognitivne reprezentacije brojeva (jedan po jedan, nekanonička i kanonička reprezentacija).

Međutim, prije detaljnije analize dječjeg uratka, provjeren je postoje li razlike u načinu prikazivanja brojeva između djevojčica i dječaka (tablica 2).

Redni broj pokušaja	Vrsta kognitivne reprezentacije	Djevojčice		Dječaci		t-test
		M	SD	M	SD	
1	jedan-po-jedan	2.37	2.02	2.07	2.18	.68
	kanonička	2.28	2.04	2.51	2.10	.53
	nekanonička	.33	.56	.42	.81	.62
2	jedan-po-jedan	1.76	1.68	2.02	1.83	.71
	kanonička	1.80	1.70	1.60	1.84	.54
	nekanonička	1.15	1.17	1.16	1.21	.04

● TABLICA 3
Prosječne vrijednosti (M i SD) različitih vrsta kognitivnih reprezentacija brojeva u prvom pokušaju kognitivna reprezentacija brojeva

Budući da nisu nađene statistički značajne razlike u uratku s obzirom na spol ispitanika, a izvršene su i dodatne analize na dobnim poduzorcima, rezultati dječaka i djevojčica analizirani su zajedno.

Prosječan broj različitih reprezentacija u prvom pokušaju prikazan je u tablici 3.

Ispitanici	Kognitivna reprezentacija brojeva					
	jedan-po-jedan		kanonička		nekanonička	
	M	SD	M	SD	M	SD
Predškolci	3.36	1.92	1.17	1.58	.43	.77
1. razred	2.42	2.03	2.07	1.88	.52	.81
2. razred	.87	1.53	3.97	1.67	.17	.38

U tablici 3. vidljiv je prosječan broj zadataka koje su tri skupine djece riješile pomoću reprezentacije jedan-po-jedan.

Analiza varijance pokazala je statistički značajne razlike u uratku između skupina ispitanika ($F_{2,88} = 14.55, p < .01$). Naknadna provjera Scheffeovim testom pokazala je statistički značajne razlike u aritmetičkim sredinama uratka između učenika drugog razreda i ostalih dviju skupina djece, s time da je s porastom dobi broj jedan-po-jedan konstrukcija manji.

Prosječna uporaba kanoničke reprezentacije vidljiva je, također, iz tablice 3. Uočljiv je porast broja kanoničkih konstrukcija s porastom dobi ispitanika. Analiza varijance pokazala je postojanje statistički značajnih razlika među aritmetičkim sredinama skupina ($F_{2,88} = 20.85, p < .01$). Prema rezultatima Scheffeova testa učenici drugog razreda značajno češće rabe kanoničku reprezentaciju brojeva nego što to čine predškolci i učenici prvog razreda.

U tablici 3. prikazana je i prosječna nekanonička reprezentacija brojeva. Vidljivo je kako sve tri skupine ispitanika rijetko spontano rabe ovaj način prikazivanja brojeva, a analiza varijance pokazuje kako pritom nema statistički značajnih razlika među skupinama ($F_{2,88} = 2.16, p = .12$).

Drugi pokušaj prikazivanja broja povezan je s prvim. U drugom pokušaju dijete nije moglo spontano izabrati način prikazivanja već je upućeno da broj konstruira na nov način, različit od prvog pokušaja. Čestoća točnih dječjih konstrukcija u drugom pokušaju (ali ne nužno različitih od prvog pokušaja) prikazana je u tablici 1, a aritmetičke sredine i standardne devijacije takvog uratka nalaze se u tablici 4.

● **TABLICA 4**
Prosječne vrijednosti (M i SD) različitih vrsta kognitivnih reprezentacija u brojevima u drugom pokušaju

Ispitanici	Kognitivna reprezentacija brojeva					
	jedan-po-jedan		kanonička		nekanonička	
	M	SD	M	SD	M	SD
Predškolci	1.43	1.91	2.47	2.08	.40	.73
1. razred	1.87	1.75	1.71	1.46	1.42	1.20
2. razred	2.43	1.57	.93	1.51	1.63	1.22

Analiza varijance pokazala je da u drugom pokušaju nema razlika u broju jedan-po-jedan konstrukcija između tri skupine ispitanika ($F_{2,88} = 2.59, p = .08$).

Iz tablice 4 vidljiv je pad broja kanoničkih konstrukcija u drugom pokušaju s porastom dobi ispitanika. Provedena analiza varijance utvrdila je postojanje statistički značajnih razlika među aritmetičkim sredinama skupina ($F_{2,88} = 6.36, p < .01$). Provjera Scheffeovim testom pokazala je da predškolci u drugom pokušaju rabe ovaj način konstrukcije češće od učenika drugog razreda.

Analiza uporabe nekanoničkih konstrukcija u drugom pokušaju pokazuje kako postoji značajna razlika među aritmetičkim sredinama skupina ($F_{2,88} = 11.53, p < .01$). Prema rezul-

DRUŠ. ISTRAŽ. ZAGREB
GOD. 8 (1999),
BR. 4 (42),
STR. 563-577

VLAHOVIĆ-ŠTETIĆ, V.,
KOVAČIĆ, S.:
KOGNITIVNA
REPREZENTACIJA...

➔ **TABLICA 5**
Prosječne vrijednosti
(M i SD) točnih i
međusobno različitih
kognitivnih
reprezentacija brojeva
u dva pokušaja

tatima Scheffeova testa učenici prvog i drugog razreda značajno češće rabe nekanoničku reprezentaciju brojeva nego što to čine predškolci.

Željeli smo provjeriti jesu li, i u kojoj mjeri, djeca različite dobi sposobna predstaviti isti broj na dva različita načina. U sljedećoj analizi usporedili smo skupine djece prema broju različitih reprezentacija. Broj je različito reprezentiran ako su oba prikaza točna, ali se međusobno razlikuju po vrsti kognitivne reprezentacije (npr. prvi pokušaj je prikaz jedan-po-jedan, a drugi pokušaj npr. kanonička konstrukcija). Prikaz prosječnog broja međusobno različitih konstrukcija nalazi se u tablici 5. Analiza varijance pokazala je statistički značajnu razliku među aritmetičkim sredinama skupina ($F_{2,88} = 7.53, p < .01$), a prema rezultatima Scheffeova testa predškolci imaju statistički značajno manje različitih reprezentacija brojeva od učenika drugog razreda.

Ispitanici	M	SD
Predškolci	3.87	1.50
1. razred	4.55	1.18
2. razred	4.97	0.18

Zanimljive podatke pruža analiza individualnih protokola.

Od 30 predškolaca njih 14 imalo je barem jednu kanoničku reprezentaciju broja pri prvom pokušaju, a njih 8 imalo je barem jednu nekanoničku konstrukciju. U pet slučajeva to su isti ispitanici. U drugom pokušaju 21 predškolac ima kanoničke reprezentacije, a njih 9 nekanoničke reprezentacije. U sedam slučajeva to su ista djeca.

Od 31 učenika prvog razreda njih 20 je barem jednom kanonički prikazalo zadane brojeve u prvom pokušaju, a nekanonički prikaz imalo je 12 učenika. Pri tome je u jedanaest slučajeva riječ o istim ispitanicima. U drugom pokušaju 22 učenika imaju kanoničke konstrukcije, a isto toliko učenika ima barem jednu nekanoničku konstrukciju. U šesnaest slučajeva riječ je o istim učenicima.

Ukupno 27 od 30 učenika drugog razreda imalo je kanoničke prikaze u prvom pokušaju, a 5 učenika imalo je nekanoničke prikaze. U četiri slučaja riječ je o istoj djeci. U drugom prikazu 11 učenika ima kanoničke reprezentacije, a 22 učenika nekanoničke reprezentacije. Od toga je šest istih ispitanika.

RASPRAVA

Prije rasprave o kognitivnoj reprezentaciji brojeva djece različite dobi, osvrnut ćemo se ukratko na rezultate provjere uratka s obzirom na spol ispitanika.

Maccoby i Jacklin (1974) navode kako dječaci po uratku u matematici nadmašuju djevojčice, no na temelju nalaza meta-

DRUŠ. ISTRAŽ. ZAGREB
GOD. 8 (1999),
BR. 4 (42),
STR. 563-577

VLAHOVIĆ-ŠTETIĆ, V.,
KOVAČIĆ, S.:
KOGNITIVNA
REPREZENTACIJA...

analize Hyde i suradnice (1990) drže da pri donošenju zaključaka valja uzeti u obzir i dob ispitanika i kognitivnu razinu zadataka. Rezultati neselekcioniranih uzoraka pokazuju da su u osnovnoškolskoj dobi djevojčice uspješnije od dječaka ako je predmet ispitivanja računanje. No, ako je riječ o rješavanju problemskih zadataka, javljaju se razlike u korist muških ispitanika kod srednjoškolaca, studenata i odraslih. Ni u jednoj dobi nema razlika među spolovima u razumijevanju matematičkih koncepata. Kako je predmet ovog ispitivanja bilo razumijevanje matematičkog koncepta, rezultati koji govore o nepostojanju razlika u uratku između djevojčica i dječaka sukladni su novijim nalazima u literaturi (Hyde i sur., 1990; Leder, 1990).

Kad se rezultati analiziraju s obzirom na dob, vidljivo je da starija djeca lakše barataju složenijim oblicima reprezentacije brojeva, dok su mlađa djeca sklonija jedan po jedan konstrukcijama. Tako u prvom pokušaju djeca predškolske dobi rabe najviše jedan po jedan konstrukcije, učenici prvog razreda podjednako često izvode jedan po jedan i kanoničku konstrukciju, a učenici drugog razreda najčešće oblikuju kanoničke reprezentacije brojeva. Izgleda da se učenici prvog razreda nalaze u prijelaznom razdoblju u kojem su im podjednako bliske reprezentacije karakteristične za mlađu i stariju dob.

Ako se promotre jedan-po-jedan konstrukcije, rezultati pokazuju da je ovaj oblik reprezentacije u prvom pokušaju manje zastupljen kod starije djece. Učenici drugog razreda razreda imaju manje jedan po jedan konstrukcija nego druge dvije skupine ispitanika. Obrnut rezultat dobiva se kod kanoničke reprezentacije brojeva u prvom pokušaju; učenici drugog razreda imaju više kanoničkih konstrukcija nego ostale dvije skupine. U nekanoničkim reprezentacijama nema razlika među ispitanim skupinama.

U drugom pokušaju konstrukcije istog broja predškolci imaju najviše kanoničkih prikaza, učenici prvog razreda imaju podjednak broj svih triju oblika reprezentacije, a učenici drugog razreda imaju najviše jedan po jedan konstrukcija. Ovdje valja napomenuti kako je drugi pokušaj bio determiniran zahtjevom da se novi prikaz razlikuje od prvog pokušaja. Posljedica tog zahtjeva je slabija uspješnost prvoškolaca u drugom pokušaju (99.33 posto: 84.66 posto).

Kad se analiziraju točne konstrukcije u drugom pokušaju, bez obzira na zahtijevane razlike, tri skupine ispitanika ne razlikuju se međusobno po broju jedan-po-jedan konstrukcija. Predškolska djeca imaju veći broj kanoničkih konstrukcija nego učenici drugog razreda, a manji broj nekanoničkih konstrukcija od učenika prvog i drugog razreda.

DRUŠ. ISTRAŽ. ZAGREB
GOD. 8 (1999),
BR. 4 (42),
STR. 563-577

VLAHOVIĆ-ŠTETIĆ, V.,
KOVAČIĆ, S.:
KOGNITIVNA
REPREZENTACIJA...

Dobiveni rezultati u skladu su s osnovnim pretpostavka-
ma razvojne teorije razumijevanja brojeva L. Resnick (1983),
mlađa djeca sklonija su vidjeti broj kao cjelinu sastavljenu od
jediničnih dijelova, a stariji su skloniji složenijim reprezenta-
cijama brojeva.

Resnick drži kako je kanonička reprezentacija prva faza
u razumijevanju višeznamenkastih brojeva nakon koje slijedi
i mogućnost razumijevanja nekanoničke reprezentacije. Na
temelju dobivenih rezultata možemo izvesti samo neke pretpostavke o razumijevanju koncepta višeznamenkastog broja u ispitane djece.

Hrvatski jezik potiče kanoničku reprezentaciju u spon-
tanoj konstrukciji (Vlahović-Štetić i Miura, 1995), što pred-
stavlja prednost pri razumijevanju koncepta višeznamenkas-
tog broja (Fuson, 1990; Miura 1987; Miura i sur., 1993). Imena
brojeva pogoduju kognitivnoj organizaciji brojeva uz bazu 10
(npr. 22 je u hrvatskom "dvadeset i dva" tj. dvije desetice i još
dva; dok je 22 npr. u engleskom jeziku "twenty two" tj. neko
novo ime za količinu od 20 i još 2, što ništa ne govori o količini
desetice u broju).

Pretpostavljamo da će naši ispitanici, zbog osobina hrvat-
skog jezika, rabiti kanoničku reprezentaciju brojeva i onda kad
znaju da se broj može podijeliti i na drukčije cjeline, tj. pred-
staviti na nekanonički način. Čini nam se da rezultati učenika
prvog i drugog razreda u drugom pokušaju govore u prilog
ovoj pretpostavci. Oni češće od predškolaca rabe nekanonič-
ke reprezentacije kad se od njih traži novi način konstrukcije
zadanih brojeva. Taj nalaz ukazuje na to kako razumiju da se
broj može predstaviti i na nekanonički način. Drugim rije-
čima, na temelju rezultata ispitivanja možemo pretpostaviti
da su učenici 1. i 2. razreda već u drugoj fazi razumijevanja
višeznamenkastog broja prema razvojnoj teoriji L. Resnick (1983).

Podaci o broju različitih konstrukcija istog broja pokazu-
ju da on raste s porastom dobi, s time da statistički značajna
razlika postoji između skupine predškolske djece i učenika
drugog razreda. Po svojem uratku učenici prvog razreda na-
laze se između tih skupina i ne razlikuju se statistički značaj-
no od njih.

Dobiveni rezultati uklapaju se u razvojnu teoriju razu-
mijevanja brojeva, ali i u Piagetovu teoriju kognitivnog razvo-
ja. Predškolska djeca su ili u predoperativnom razdoblju ili na
prijelazu u razdoblje konkretnih operacija. Njihovo mišljenje
je konkretno i ireverzibilno. Starija djeca, što naročito vrijedi
za učenike drugog razreda, nalaze se u razdoblju konkretnih
operacija. Mišljenje im je više reverzibilno i prilagodljivije, što
im omogućuje širi repertoar reprezentacija brojeva.

DRUŠ. ISTRAŽ. ZAGREB
GOD. 8 (1999),
BR. 4 (42),
STR. 563-577

VLAHOVIĆ-ŠTETIĆ, V.,
KOVAČIĆ, S.:
KOGNITIVNA
REPREZENTACIJA...

Valja napomenuti da bi se sigurniji zaključci mogli izvesti uz longitudinalan nacrt istraživanja. Također je upitno u kojoj su mjeri dobivene razlike u kognitivnoj reprezentaciji brojeva u funkciji dobi samo rezultat kognitivnog razvoja djece, a koliko su posljedica školskog poučavanja. Naime, učenici drugog razreda kod kojih je zabilježeno najviše razlika u odnosu na druge skupine, poučeni su u školskom radu konceptu višeznamenkastog broja i ulozi položaja desetice i jedinice u broju.

Ipak, možemo zaključiti da se u funkciji dobi djeteta mijenja način kognitivne reprezentacije brojeva, i to od jednostavnih k složenijim konstrukcijama. S dobi se povećava i sposobnost djece da isti broj konstruiraju na različite načine.

LITERATURA

Barody, A. J. i Ginsburg, H. P. (1986). The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetics. U: J. Hiebert (Ur.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (75-112), Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.

Donaldson, M. i Balfour, G. (1968). The less is more: A study of language comprehension in children. *British Journal of Psychology*, 59, 461-471.

Frye, D., Braisby, N., Lowe, J., Maroudas, C., i Nicholls, J. (1989). Young children's understanding of counting and cardinality. *Child Development*, 60, 1158-1171.

Fuson, K. C. (1990). Conceptual structures for multiunit numbers: Implications for learning and teaching multidigit addition, subtraction, and place value. *Cognition and Instruction*, 7, 4, 343-403.

Fuson, K. C. i Hall, J. W. (1983). The acquisition of early number word meanings: A conceptual analysis and review. U: H. P. Ginsburg (Ur.), *The development of mathematical thinking*, (49-107), New York, Academic Press.

Fuson, K. C., Perry, T. i Kwon, Y. (1994). Latino, Anglo and Korean children's finger addition methods. U: J.E.H. Van Luit (Ur.), *Research on Learning and instruction of mathematics in kindergarten and primary school*, (220-228), Doetinchem/Rapallo, Graviant Publishing Company.

Gelman, R. i Meck, E. (1986). The notion of principle: The case of counting. U: J. Hiebert (Ur.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (29-58), Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.

Gelman, R., Meck, E. i Merkin, S. (1986). Young children's numerical competence. *Cognitive Development*, 1, 1-29.

Hudson, T. (1983). Correspondences and numerical differences between disjoint sets. *Child Development*, 54, 84-90.

Hyde, J. S., Fennema, E. i Lamon, S. J. (1990). Gender differences in mathematics performance: A meta-analysis. *Psychological Bulletin*, 107, 2, 139-155.

Klein, A. i Starkey, P. (1987). The origins and development of numerical cognition: A comparative analysis. U: J. A. Sloboda i D. Rogers

DRUŠ. ISTRAŽ. ZAGREB
GOD. 8 (1999),
BR. 4 (42),
STR. 563-577

VLAHOVIĆ-ŠTETIĆ, V.,
KOVAČIĆ, S.:
KOGNITIVNA
REPREZENTACIJA...

(Ur.), *Cognitive processes in mathematics*, (1-25), Oxford, England: Clarendon Press.

Leder, G. C. (1990). Gender differences in mathematics: An overview. U: E. Fennema i G. C. Leder (Ur.), *Mathematics and gender: influences on teachers and students*. (27-59). New York, Teachers College Press.

Maccoby, E. E. i Jacklin, C. N. (1974). *The psychology of sex differences*. Stanford, CA, Stanford University Press.

Miura, I. T. (1987). Mathematics achievement as a function of language. *Journal of Educational Psychology*, 79, 1, 79-82.

Miura, I. T. i Okamoto, Y. (1989). Comparisons of U.S. and Japanese first grader's cognitive representation of number and understanding of place value. *Journal of Educational Psychology*, 81, 109-113.

Miura, I., Okamoto, Y., Kim, C. C., Steere, M. i Fayol, M. (1993). First graders' cognitive representation of number and understanding of place value: Cross national comparisons – France, Japan, Korea, Sweden and the United States. *Journal of Educational Psychology*, 85, 1, 24-30.

Nunes, T. (1992). Cognitive invariants and cultural variation in mathematical concepts. *International Journal of Behavioral Development*, 15, 4, 433-453.

Resnick, L. B. (1983). A developmental theory of number understanding. U: H. P. Ginsburg (Ur.), *The development of mathematical thinking*, (109-151), New York, Academic Press.

Riley, M. S. i Greeno, J. G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction*, 5, 1, 49-101.

Riley, M. S., Greeno, J. G. i Heller, J. J. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. U: H. P. Ginsburg (Ur.), *The development of mathematical thinking*, (153-196), New York, Academic Press.

Saxe, G. B. i Posner, J. (1983). The development of numerical cognition: Cross cultural perspectives. U: H. P. Ginsburg (Ur.), *The development of mathematical thinking*, (291-317), New York, Academic Press.

Siegler, R. S. (1987). Strategy choices in subtraction. U: J. A. Sloboda i D. Rogers (Ur.), *Cognitive processes in mathematics*. (81-106), Oxford, England, Clarendon Press.

Siegler, R. S. i Jenkins, E. (1989). *How children discover new strategies*. Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.

Sinclair, H. i Sinclair, A. (1986). Children's mastery of written numerals and the construction of basic number concepts. U: J. Hiebert (Ur.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (59-74), Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.

Song, M.-J. i Ginsburg, H. P. (1987). The development of informal and formal mathematical thinking in Korean and U.S. children. *Child Development*, 58, 1286-1296.

Sophian, C. (1988). Early developments in children's understanding of number: Inferences about numerosity and one-to-one correspondence. *Child Development*, 59, 1397-1414.

Stern, E. i Lehrndorfer, A. (1992). The role of situational context in solving word problems. *Cognitive Development*, 7, 259-268.

DRUŠ. ISTRAŽ. ZAGREB
GOD. 8 (1999),
BR. 4 (42),
STR. 563-577

VLAHOVIĆ-ŠTETIĆ, V.,
KOVAČIĆ, S.:
KOGNITIVNA
REPREZENTACIJA...

Stevenson, H. W., Lee, S-Y., Stigler, J. (1986). Mathematics achievement of Chinese, Japanese, and American children, *Science*, 231, 693 - 699.

Vlahović-Štetić, V. i Miura, I. (1995). Cognitive representation of number and understanding of place value: First graders in Croatia and the United States. *Review of Psychology*, 2,1 2, 23-28.

Wynn, K. (1992). Children's acquisition of the number words and the counting system. *Cognitive Psychology*, 24, 220-251.

Cognitive Representation of Numbers in Children of Different Ages

Vesna VLAHOVIĆ ŠTETIĆ
Faculty of Philosophy, Zagreb

Suzana KOVAČIĆ
Nursery School "Bambi", Zagreb

The aim of this paper was to check and compare the cognitive representation of numbers in three groups of children: preschool (N=30), first-grade schoolchildren (N=31) and second-grade (N=30) elementary schoolchildren. In accordance with the developmental theory of understanding numbers it was presupposed that younger children construct numbers as wholes composed of single elements, while first and second-grade schoolchildren have several more complex constructions. The examinees' task was to present five numbers given in random order by using squares for ones and tens. In the second attempt the examinees were supposed to present the same numbers in a different, new way. The children's correct constructions were divided into the following categories: 1) representations one-by-one, 2) canonical representations and 3) non-canonical representations. The results indicate that there are no differences between girls and boys in the tasks completed. Analyses with regard to the children's age demonstrate that in the first attempt of construction the second-grade children have less one-by-one representations and more canonical representations than the other two groups of examinees. In non-canonical representations there are no differences among the groups examined. When analysing the correct constructions in the second attempt, there are no differences among the three groups of examinees in the one-by-one constructions. Pre-school children have a larger number of canonical representations than second-grade children, and a smaller number of non-canonical representations than first and second-grade children. Second-grade children have shown greater ability than pre-school children in constructing a given number in two different ways. The results obtained are in accordance with the presuppositions of the developmental theory of understanding numbers.

DRUŠ. ISTRAŽ. ZAGREB
GOD. 8 (1999),
BR. 4 (42),
STR. 563-577

VLAHOVIĆ-ŠTETIĆ, V.,
KOVAČIĆ, S.:
KOGNITIVNA
REPREZENTACIJA...

Kognitive Repräsentation von Zahlen bei Kindern unterschiedlichen Alters

Vesna VLAHOVIĆ ŠTETIĆ
Philosophische Fakultät, Zagreb
Suzana KOVAČIĆ
Kindergarten "Bambi", Zagreb

Ziel dieser Arbeit waren Prüfung und Vergleich der kognitiven Repräsentation von Zahlen bei Kindern dreier Altersgruppen: Vorschulkindern (N = 30), Erstkläßlern (N = 31) sowie Schülern der zweiten Grundschulklasse (N = 30). Im Einklang mit der Entwicklungstheorie zum Verständnis von Zahlen ging man von der Annahme aus, daß kleinere Kinder Zahlen folgendermaßen konstruieren, indem sie sich aus je einem Element bestehende Einheiten vorstellen, während Schüler der ersten und zweiten Klasse mehrere Konstruktionen komplexerer Natur anwenden. Den befragten Kindern wurde aufgegeben, fünf in zufälliger Reihenfolge angeführte Zahlen darzustellen, und zwar unter Verwendung von sog. "Base 10 blocks" (in US-Schulen verwendetes System von Klötzchen zur Vermittlung des Stellenwerts von 1er- und 10er-Einheiten in mehrziffrigen Zahlen – Anm. d. Übers.). In einem zweiten Versuch sollten die Kinder dieselben Zahlen auf eine völlig neue Art und Weise darstellen. Die jeweils korrekten Konstruktionen, welche von den Kindern angewandt worden waren, wurden in folgende Kategorien unterteilt: 1) schrittweise Repräsentation (ein Element nach dem anderen), 2) kanonische Repräsentation und 3) nicht-kanonische Repräsentation. Die Ergebnisse weisen keinerlei Unterschiede zwischen Mädchen und Jungen auf. Altersorientierte Analysen zeigen, daß im Vergleich mit den beiden anderen Altersgruppen die Schüler der zweiten Grundschulklasse weniger schrittweise Repräsentationen anwandten zugunsten einer größeren Zahl von kanonischen Darstellungsweisen. Im Falle nicht-kanonischer Repräsentationen gibt es keinerlei Unterschiede zwischen den Altersgruppen. Dasselbe gilt für schrittweise Konstruktionen, wie die Analyse der korrekten Konstruktionen des zweiten Versuchs ergab. Kinder des Vorschulalters wenden mehr kanonische Darstellungsweisen an als Schüler der zweiten Grundschulklasse sowie weniger nicht-kanonische Repräsentationen als Schüler der 1. und der 2. Klasse. Im Unterschied zu Kindern des Vorschulalters zeigten Zweitkläßler größere Geschicklichkeit bei der Konstruierung einer Zahl auf zwei verschiedene Weisen. Die erzielten Untersuchungsergebnisse stimmen mit den Ausgangspositionen der Entwicklungstheorie zum Verständnis von Zahlen bei Kindern überein.