Osječki matematički list 18 (2018), 105-122

Izvod jednadžbi diskretnog Kalmanovog filtera

Mihael Alapić [*], Igor Velčić [†]

Sažetak

Ovaj članak daje izvod jednadžbi za diskretan Kalmanov filter koji procjenjuje vektor stanja preko vektora ulaza i izlaza koristeći metodu najmanjih kvadrata. Kalmanov filter ima važnu primjenu u inženjerstvu.

Ključne riječi: *filteri, predikcija, stohastička diferencijska jednadžba*

Derivation of the Discrete-Time Kalman filter

Abstract

In this paper we derive the equations of discrete-time Kalman filter which estimates state variables using input and output variables by means of least square method. Kalman filter is very important for applications.

Keywords: *filters, prediction, stochastic differential equations*

[*]student, PMF–Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, email: mihaelalapic@yahoo.com

[†]Fakultet elektrotehnike i računarstva, Sveučilište u Zagrebu, email: igor.velcic@fer.hr

1 Uvod

Kalmanov filter procjenjuje vektor stanja iz danih rezultata mjerenja. Procjene mogu biti prediktivne ili neprediktivne (filteri ili splineovi). Prediktivne procjene za vektor stanja u aktualnom trenutku koriste samo podatke dobivene do nekog prethodnog trenutka, a neprediktivne procjene ili koriste sve mjerne podatke do aktualnog trenutka (uključujući i aktualni) kada govorimo o filterima ili koriste mjerne podatke do nekog prethodnog trenutka i mjerne podatke iz nekih budućih koraka kada govorimo o splineovima. Mi ćemo u ovom radu obraditi filtere.

Rudolph Emil Kalman (1930.–2016.) američki matematičar i elektroničar mađarskoga podrijetla, poznat po razvoju matematičkog algoritma (Kalmanov filter) koji ima vrlo široku primjenu

Veliki problem kod procjena je pojavljivanje nepreciznih i netočnih mjerenja koja sadrže šum. Uz mjerni šum postoji i procesni šum zbog kojeg proces ne završi točno u onom stanju koje je predviđeno samim modelom procesa. Ovakav problem se javlja pri znanstvenim i edukacijskim pokusima, tehničkim i proizvodnim procesima. Rudolph Emil Kalman objavio je rekurzivni matematički algoritam za procjenu stanja dinamičkih sustava sa zašumljenim mjernim signalima i varijablama stanja. Riječ *filter* koristi se ovdje zbog činjenice da se pri procjeni stanja filtrira šum iz podataka.

Kalman je svoju verziju algoritma objavio 1960. godine (vidi [4]) i od tada Kalmanov algoritam nije izgubio na značaju. Jedna od prednosti Kalmanovog filtera je *rekurzivnost* jer nije potrebno pamtiti sva prethodna mjerenja, već se u trenutnoj iteraciji koristi samo najbolja procjena prethodnog stanja procesa koja je rekurzivno određena na temelju svih prethodnih mjerenja.

Nakon što je Kalman objavio svoj rad, znanstvenici iz NASA-e su prepoznali potencijalnu primjenu Kalmanovog filtera za njihov projekt. Radilo se o procjeni trajektorija i kontrolnog problema za *Apollo projekt* - misije do Mjeseca i natrag. To je bila prva potpuna implementacija Kalmanovog filtera. Kalmanov filter pronašao je veliku primjenu i kod digitalnih izračunavanja u sustavima upravljanja, navigaciji, praćenju i predviđanju putanje objekta, robotici, itd.

Zbog mnogih prednosti ovog algoritma, postoje mnoge modifikacije originalnog diskretnog Kalmanovog filtera. Zasigurno treba spomenuti *kontinuirani Kalmanov filter* namijenjen kontinuiranim sustavima i *prošireni Kalmanov filter* koji rješava problem procjene i kod nelinearnih sustava. Za objašnjenje Kalmanovog filtera i njegovih modifikacija u ovom radu, promatrat ćemo linearne diskretne stohastičke diferencijske jednadžbe s određenim *ulazom (kontrolom)*, čija se rješenja nazivaju *stanja*. Pretpostavka algoritma je da je mjerenjima dostupna samo reducirana informacija o stanjima – određena linearna funkcija koju nazivamo *izlazi*. Problem filtriranja se svodi na traženje najboljeg linearnog procjenitelja slučajne varijable stanja kao funkcije slučajnih varijabli izlaza na nekom vremenskom intervalu ili u konačnom skupu trenutaka.

2 Kalmanovi filteri

Mnogi procesi opisani su determinističkim modelima. Međutim, ponašanje realnog sustava nikada nije potpuno determinističko jer na njega djeluju različiti poremećaji - šumovi. Mjerenja određenih veličina stanja također su u pravilu zašumljena i nepouzdana.

Pretpostavljamo postojanje vremenski diskretnog procesa kojim se upravlja odnosno koji se nadzire (takav diskretan proces može nastati i diskretizacijom u vremenu nekog kontinuiranog procesa). Vremenski diskretan linearan proces, koji nije potpuno deterministički, može biti opisan diferencijskom jednadžbom stanja i jednadžbom mjernog sustava na sljedeći način

$$\begin{cases} x_k = \Phi_{k-1} x_{k-1} + \Gamma_{k-1} u_{k-1} + w_{k-1}, \\ z_k = H_k x_k + D_k u_k + v_k, \end{cases} \tag{1}$$

gdje je x_k n-dimenzionalni slučajni vektor stanja koji sadrži sve relevantne veličine u koraku k i pomnožen $n \times n$-dimenzionalnom matricom sustava Φ_{k-1} čini homogeni dio diferencijske jednadžbe stanja. Vektor ulaza u_k u koraku k je r-dimenzionalni vektor, koji se množi s $n \times r$-dimenzionalnom matricom ulaza Γ_{k-1}. Procesni šum u koraku k je n-dimenzionalni slučajni vektor w_k za koji pretpostavljamo da je normalni slučajni vektor očekivanja nula.

Jednadžba mjernog sustava pokazuje da je l-dimenzionalni slučajni vektor izlaza z_k također jednak zbroju $l \times n$ dimenzionalne matrice H_k pomnožene vektorom stanja x_k, $l \times r$ dimenzionalne matrice D_k pomnožene vektorom ulaza u_k te l-dimenzionalnog slučajnog vektora v_k koji predstavlja mjerni šum u koraku k za koji pretpostavljamo da je normalni slučajni vektor očekivanja nula. U pravilu je $l < n$ i matrica H_k je punog ranga l. To je razumno jer je mjerenjima dostupna samo reducirana informacija i različita mjerenja su linearno nezavisna.

Pretpostavlja se da se procesi (w_k) i (v_k) sastoje od nezavisnih slučajnih vektora i da su međusobno nezavisni. Napominjemo da za fiksni k same komponente vektora w_k odnosno vektora v_k ne moraju biti nezavisne.

Ponekad se umjesto nezavisnosti zahtijeva slabiji uvjet nekoreliranosti. No zna se da za normalni slučajni vektor vrijedi da su mu komponente nezavisne ako i samo ako su nekorelirane (vidi [5]). Kao posljedica toga, ako proces $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ima svojstvo da za svaki izbor $k_1, \ldots, k_d \in \mathbb{N}$ slučajni vektor $(w_{k_1}, \ldots, w_{k_d})$ duljine $n \times d$ ima normalnu distribuciju, tada je nekoreliranost ekvivalentna s nezavisnošću.

Kalmanov filter procjenjuje stanje procesa u nekom vremenskom trenutku k i koristi rezultate mjerenja. Kao što smo rekli jedan je od problema što su mjerenja dobivena iz senzora često nepotpuna (matrica H_k u našem modelu ne mora biti regularna) i gotovo uvijek sadrže određeni stupanj šuma. U procjeni stanja procesa cilj je dobiti pouzdane vrijednosti varijabli stanja procesa procjenjujući ih podacima dobivenima iz senzorskih očitanja tj. rezultatima mjerenja. Model je određen matricama $(\Phi_k)_k$, $(\Gamma_k)_k$, $(H_k)_k$, $(D_k)_k$, koje su nam poznate. Indeks k za prve dvije matrice prima vrijednosti u skupu $\mathbb{N}_0$ dok za posljednje dvije matrice prima vrijednosti u skupu $\mathbb{N}$ (ili do neke fiksne vrijednosti $M \in \mathbb{N}$). Pored toga, u izvodu jednadžbi Kalmanovog filtera uzimamo da nam je poznata distribucija šuma što se svodi na poznavanje matrice kovarijanci $(Q_k)_k$ tj. $(R_k)_k$ (vidi (6)-(8) ispod). Početni uvjet za stanje x_0 može biti poznat ili nepoznat. Ukoliko nam je nepoznat, uzimamo da je (normalan) slučajni vektor kojem poznajemo očekivanje i matricu kovarijanci P_0 (vidi primjer 4.1). U ovom slučaju pretpostavljamo nezavisnost x_0 s procesima (w_k) odnosno (v_k). Ukoliko nam je poznat (deterministički), tada je $P_0 = 0$. Naravno, kao što smo napomenuli, pretpostavka je da su nam u trenutku k poznate varijable ulaza $\{u_1, \ldots, u_k\}$ i rezultati mjerenja koji su realizacije slučajnih vektora $\{z_1, \ldots, z_k\}$, ali nam realizacije slučajnih varijabli šumova nisu poznate. Same realizacije slučajnih stanja $(x_k)_k$ nam nisu poznate. Cilj je pronaći kvalitetnog procjenitelja za vektor stanja kao funkciju slučajnih vektora $\{z_1, \ldots, z_k\}$.

Primjer 2.1. Želimo procijeniti položaj nekog robota kojeg smo ostavili na određenoj poziciji p_0 i početne brzine b_0. Mjerimo mu poziciju pomoću GPS sistema svakih Δt sekundi. Vektor stanja x_k u trenutku k se sastoji od vektora pozicije p_k i vektora brzine b_k; $x_k = (p_k, b_k)$. Robot između dva trenutka akcelerira sa slučajnom akceleracijom a_k koja je normalni slučajni vektor s poznatim očekivanjem i varijancom (očekivanje akceleracije ima ulogu kontrole u sustavu). Pretpostavka je da su a_k nezavisne slučajne varijable. Diferencijsku jednadžbu vektora stanja možemo zapisati u ovom obliku

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p_k &=& p_{k-1} + b_{k-1}\Delta t + \frac{1}{2} a_{k-1} (\Delta t)^2 \\ &=& p_{k-1} + b_{k-1}\Delta t + \frac{1}{2} E[a_{k-1}] (\Delta t)^2 + \frac{1}{2} \left(a_{k-1} - E[a_{k-1}] \right) (\Delta t)^2, \\ b_k &=& b_{k-1} + a_{k-1}\Delta t \\ &=& b_{k-1} + E[a_{k-1}]\Delta t + \left(a_{k-1} - E[a_{k-1}] \right) \Delta t \end{array} \right. \tag{2}$$

GPS sustav može dati točnu lokaciju do na određenu preciznost; uzimamo da je mjerenje realizacija slučajne varijable dane sa

$$z_k = p_k + v_k, \tag{3}$$

gdje je v_k normalan slučajan vektor s očekivanjem nula. Pretpostavka je da su v_k međusobno nezavisni i da su nezavisni s procesom (a_k). Lagano se vidi da se gornji sustav (2), (3) može zapisati u obliku (1). U praksi su nam u trenutku k poznati rezultati mjerenja tj. realizacije slučajnih vektora $\{z_1, \ldots, z_k\}$, a tražimo procjenu za vektor stanja x_k. Kao što smo napomenuli poznati su nam je još početni položaj x_0 i očekivanje i varijanca slučajne varijable a_k za svaki k.

3 Glavni izvod

S obzirom da je vektor ulaza u_k kontroliran ili barem poznat u izvodu ćemo, zbog jednostavnosti, pretpostaviti da je u sustavu (1) vektor ulaza $u_k = 0$. Tada linearna diferencijska stohastička jednadžba stanja (linearni stohastički dinamički sustav) glasi

$$x_k = \Phi_{k-1} x_{k-1} + w_{k-1}, \tag{4}$$

gdje je x_k slučajni vektor stanja u trenutku k, Φ_{k-1} je tranzicijska matrica iz stanja u trenutku $k-1$ do stanja u trenutku k dimenzije $n \times n$ i w_{k-1} je slučajni vektor šuma duljine n. Linearna stohastička jednadžba mjernih rezultata je dana sa

$$z_k = H_k x_k + v_k, \tag{5}$$

gdje je slučajni vektor mjerenja z_k duljine l, matrica H_k opisuje povezanost između stanja i izlaza i dimenzije je $l \times n$, a v_k je slučajni vektor koji predstavlja mjerni šum i koji je također vektor duljine l kao i slučajni vektor mjerenja. Slučajni procesi (w_k) i (v_k) se sastoje od nezavisnih slučajnih vektora i međusobno su nezavisni.

Pretpostavka je da su oba šuma nultih očekivanih vrijednosti i da vrijedi sljedeće

$$w_k \sim N(0, Q_k), \quad v_k \sim N(0, R_k), \tag{6}$$

$$E[w_k w_j^T] = Q_k \delta_{kj}, \quad E[v_k v_j^T] = R_k \delta_{kj}, \tag{7}$$

$$E[w_k v_j^T] = 0. \tag{8}$$

Ovdje su Q_k i R_k pozitivno definitne matrice dimenzija $n \times n$ i $l \times l$ redom, δ_{kj} je Kroneckerov delta simbol, a $N(\mu, \Sigma)$ označava normalan slučajan vektor očekivanja μ i kovarijacijske matrice Σ. Uvjet (6) u potpunosti određuju distribuciju w_k i v_k za fiksni k, uvjeti (7) i (8) su uvjeti nekoreliranosti, koji kao što smo rekli, se često zamjenjuju jačim uvjetom nezavisnosti. U slučaju nezavisnosti, uvjetima (6)-(8), u potpunosti su određene konačno-dimenzionalne distribucije procesa $(x_k, z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (uz poznato početno stanje x_0).

Diskretni Kalmanov filter (DKF) rekurzivno procjenjuje vrijednost i kovarijancu stanja linearnog stohastičkog dinamičkog sustava. Procjenitelj koji se temelji samo na znanju procesa prije trenutka k naziva se *apriorni procjenitelj stanja* i označava s $\hat{x}_k(-)$. Procjenitelj stanja koji je izračunat u koraku k, koji je dodatno i funkcija od z_k, naziva se *aposteriorni procjenitelj stanja* i označava s $\hat{x}_k(+)$.

Kod procjena uvijek nailazimo na pogreške pa zato definiramo dvije vrste grešaka (koje su slučajne varijable):

- *Apriorna greška procjenitelja*

$$e_k(-) = x_k - \hat{x}_k(-).$$

- *Aposteriorna greška procjenitelja*

$$e_k(+) = x_k - \hat{x}_k(+).$$

Slično, definiramo i dvije matrice kovarijance grešaka

- *Matrica kovarijance apriorne greške procjenitelja*

$$P_k(-) = E[e_k(-)e_k^T(-)]. \tag{9}$$

- *Matrica kovarijance aposteriorne greške procjenitelja*

$$P_k(+) = E[e_k(+)e_k^T(+)]. \tag{10}$$

3.1 Princip ortogonalnosti Kalmanovog filtera

Neka je $Z_k = \{z_1, z_2, ..., z_k\}$ skup svih slučajnih varijabli koji modeliraju mjerenja do trenutka k. Cilj je pronaći najboljeg procjenitelja stanja u trenutku k i ponoviti to također za sljedeći korak uz mjerenje z_{k+1}. Najboljeg procjenitelja čini svojstvo minimalne varijance što možemo zapisati na način

$$\begin{aligned} J(a) &= E\left[(x_k - a)^T(x_k - a)\middle|Z_k\right] \\ &= E\left[\|x_k - a\|^2\middle|Z_k\right], \\ \hat{x}_k(+) &= \underset{a}{\operatorname{argmin}}\, J(a), \\ J(\hat{x}_k(+)) &= \min_a J(a). \end{aligned} \tag{11}$$

Kalmanov filter omogućava efikasno izračunavanje stanja diskretnog linearnog procesa uz minimiziranje srednje kvadratne pogreške. Može se pokazati da je optimalan procjenitelj minimalne varijance upravo uvjetno očekivanje

$$\hat{x}_k(+) = E\left[x_k \middle| Z_k\right].$$

Generalno govoreći, uvjetno očekivanje je teško računati i zahtijeva poznavanje distribucije vektora (x_k, Z_k) za svaki $k \in \mathbb{N}$. U praksi se često zadovoljavamo najboljim linearnim procjeniteljem. Poznato je za normalni slučajni vektor da je najbolji linearni procjenitelj jedne njegove komponente u ovisnosti o drugim komponentama ujedno i uvjetno očekivanje te komponente uz poznate ostale komponente. To ima za posljedicu da je u slučaju pretpostavke nezavisnosti šumova najbolji linearni procjenitelj od x_k uz poznato Z_k ujedno i uvjetno očekivanje $E\left[x_k \middle| Z_k\right]$ (uoči i da za početno stanje x_0 moramo pretpostaviti da je determinističko ili normalna slučajna varijabla nezavisna sa šumovima). No ukoliko se zadovoljavamo najboljim linearnim procjeniteljem (vidi (13) ispod) onda je za izvod jednadžbi Kalmanovog filtera dovoljna pretpostavka nekoreliranosti šumova (pretpostavka normalnosti od w_k odnosno v_k se tada može zamijeniti time da su to slučajni vektori očekivanja nula i matrica kovarijanci Q_k odnosno R_k), što ćemo pokazati u ovom i sljedećem poglavlju. U generalnom slučaju je procjenitelj dan s (11) bilo koja funkcija vektora iz Z_k (vidi npr. [5]) pa je bolji od najboljeg linearnog procjenitelja u smislu da je srednja kvadratna pogreška manja. Iz činjenice da je optimalan procjenitelj dan s (11) takav da najbolje procjenjuje svaku komponentu vektora x_k u skupu procjenitelja sastavljenog od svih komponenata vektora u skupu Z_k lagano se vidi da se funkcija pogreške J u (11) može zamijeniti s funkcijom $\tilde{J}$ danom s

$$\tilde{J}(a) = E\left[(x_k - a)^T M_k (x_k - a) \middle| Z_k\right],$$

gdje je M_k proizvoljna pozitivno definitna matrica (koja može ovisiti o k), te da to neće utjecati na optimalan procjenitelj (prisjetimo se također da se svaka simetrična matrica može dijagonalizirati u ortonormiranoj bazi).

U ovom poglavlju želimo traženje najboljeg linearnog procjenitelja interpretirati preko *Gram–Schmidtovog postupka ortogonalizacije*. Skup slučajnih vektora mjerenja $\{z_1, z_2, ..., z_d\}$ tvore unitaran vektorski prostor $\mathcal{Z}_d$ zajedno s operacijom definiranom sljedećom formulom

$$\langle z_i, z_j \rangle = E\left[z_i z_j^T\right].$$

Iako ova operacija nije skalaran produkt jer je rezultat matrica (riječ je samo o notaciji), treba je se interpretirati po komponentama (tj. treba se uzeti prostor sastavljen od svih slučajnih varijabli koje čine komponente vektora iz Z_k; vidi izvod ispod) čime onda dobijemo unitaran prostor. Vektorski prostor $\mathcal{Z}_d$ sadrži sve linearne kombinacije komponenata d slučajnih vektora što možemo zapisati ovako

$$\mathcal{Z}_d = \left\{ \sum_{i=1}^{d} A_i z_i \;\middle|\; \forall A_i \in \mathbb{R}^{lxl} \right\}.$$

Na tom vektorskom prostoru također se može definirati skup vektora $\{o_1, o_2, \ldots, o_d\}$ koji čini (tj. čije komponente čine) ortonormiranu bazu pa vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned} \{o_1, o_2, \ldots, o_d\}, \\ \langle o_i, o_j \rangle = E\left[o_i o_j^T \right] = 0, \\ \langle o_i, o_i \rangle = I, \end{aligned}$$

gdje je I jedinična matrica. Navedenu ortonormiranu bazu čine vektori $\{o_i\}_{i=1}^{d}$, koji su nekorelirani. Baza se može dobiti različitim tehnikama, a jedna od njih je i Gram–Schmidtov postupak ortogonalizacije. Kalmanov problem se svodi na projiciranje x_k u prostor $\tilde{\mathcal{Z}}_k$ tako da udaljenost bude minimalna. Ovdje je

$$\tilde{\mathcal{Z}}_k = \left\{ \sum_{i=1}^{d} B_i z_i \;\middle|\; \forall B_i \in \mathbb{R}^{nxl} \right\}.$$

$\hat{x}_k(+)$ je odgovarajuća aproksimacija koja pripada prostoru $\tilde{\mathcal{Z}}_k$. Slučajni vektor $\hat{x}_k(+) - x_k$ mora zbog optimalnosti tada biti ortogonalan na prostor $\tilde{\mathcal{Z}}_k$. Geometrijska interpretacija problema se svodi na to da je najbolja aproksimacija vektora u nekoj ravnini njegova ortogonalna projekcija na tu ravninu što se može zapisati na način

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}_k(+) - x_k, a \rangle = \langle e_k(+), a \rangle = 0, \forall a \in \mathcal{Z}_k \Leftrightarrow \\ E\left[e_k(+) a^T \right] = 0, \forall a \in \mathcal{Z}_k. \end{aligned} \tag{12}$$

Drugim riječima, aposteriorna pogreška optimalnog procjenitelja $e_k(+)$ nije korelirana ni s jednom komponentom mjerenja $\{z_1, z_2, ..., z_k\}$, niti s bilo kojom linearnom kombinacijom komponenata tih mjerenja, tj. geometrijski rečeno okomita je na $\tilde{\mathcal{Z}}_k$. Za tako odabrani $\hat{x}_k(+)$ i funkciju pogrešku $\hat{J}$

vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned} \hat{J}(a) &= E\left[\|x_k - a\|^2\right], \\ \hat{x}_k(+) &= \operatorname*{argmin}_{a\in\tilde{\mathcal{Z}}_k} \hat{J}(a), \\ \hat{J}(\hat{x}_k(+)) &= \min_{a\in\tilde{\mathcal{Z}}_k} \hat{J}(a). \end{aligned} \tag{13}$$

Kao što smo već napomenuli, ako se pretpostavka nekoreliranosti šumova zamijeni pretpostavkom nezavisnosti tada su definicije dane s (11) i (13) ekvivalentne.

Kada promatramo nekoreliranost s obzirom na ortonormiranu bazu o_i (podsjetimo se da je za svaki k $\mathcal{Z}_k$ razapet i s $\{o_1, \dots, o_k\}$) iz (12) slijedi također izraz

$$\begin{aligned} E\left[(\hat{x}_k(+) - x_k)o_i^T\right] &= 0, \forall i \Leftrightarrow \\ E\left[x_k o_i^T\right] &= E\left[\hat{x}_k(+)o_i^T\right], \forall i. \end{aligned}$$

Pomnožimo zadnji izraz s o_i i sumiramo po i i dobijemo

$$\sum_{i=1}^{k} E\left[\hat{x}_k(+)o_i^T\right] o_i = \sum_{i=1}^{k} E\left[x_k o_i^T\right] o_i.$$

Pošto $\hat{x}_k(+)$ pripada prostoru $\tilde{\mathcal{Z}}_k$, $\hat{x}_k(+)$ se može zapisati kao linearna kombinacija baznih vektora na način

$$\hat{x}_k(+) = \sum_{i=1}^{k} E\left[x_k o_i^T\right] o_i.$$

Da bi dobili rekurzivnu strukturu, navedenu sumu ćemo podijeliti na dva dijela na način

$$\hat{x}_k(+) = \sum_{i=1}^{k-1} E\left[x_k o_i^T\right] o_i + E\left[x_k o_k^T\right] o_k.$$

Koristeći (4) možemo zadnji izraz raspisati na način

$$\begin{aligned} \hat{x}_k(+) &= \sum_{i=1}^{k-1} E\left[(\Phi_{k-1}x_{k-1} + w_{k-1})o_i^T\right] o_i + E\left[x_k o_k^T\right] o_k \\ &= \Phi_{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} E\left[x_{k-1} o_i^T\right] o_i + E\left[x_k o_k^T\right] o_k \\ &= \Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+) + E\left[x_k o_k^T\right] o_k. \end{aligned} \tag{14}$$

Član $E\left[w_{k-1}o_i^T\right]$ nestane zato što su mjerenja $\mathcal{Z}_{k-1}$ nekorelirana sa slučajnom varijablom w_{k-1} i očekivanje od w_{k-1} je nula. Zadatak je naći drugačiji oblik izraza $E\left[x_k o_k^T\right] o_k$ koji neće koristiti vektore o_k zbog njihovog prezahtjevnog računanja. Kao što je već napisano, promatranu sumu podijelili smo na dva dijela. Prvi dio pripada prostoru $\tilde{\mathcal{Z}}_{k-1}$, dok drugi pripada smjeru nekoreliranog o_k. Tražimo vektor koji je također smjera o_k, pripada $\mathcal{Z}_k$ i ortogonalan je na $\mathcal{Z}_{k-1}$. Tada možemo izraz $E\left[x_k o_k^T\right] o_k$ zamijeniti tim vektorom skaliranim s nekom matricom koeficijenata. Znamo da za procjenitelja u trenutku $k-1$ vrijedi sljedeće

$$E\left[(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}(+))z_i^T\right] = 0, \quad \forall i = 1, \dots, k-1.$$

Množeći zadnji izraz matricom Φ_{k-1} on postaje

$$E\left[(\Phi_{k-1}x_{k-1} - \Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+))z_i^T\right] = 0, \quad \forall i = 1, \dots, k-1.$$

Koristimo opet (4) i činjenicu da je w_{k-1} nekorelirana sa svim z_i za $i \leq k-1$ i dobijemo

$$E\left[(x_k - \Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+))z_i^T\right] = 0, \quad \forall i = 1, \dots, k-1.$$

Dobiveni izraz množimo matricom H_k. Koristeći (5) i činjenicu da je vektor v_k nekoreliran sa svim z_i za $i \leq k-1$ i očekivanja nula, dobijemo

$$E\left[(z_k - H_k\Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+))z_i^T\right] = 0, \quad \forall i = 1, \dots, k-1.$$

Vrijedi da je slučajni vektor $z_k - H_k\Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+)$ nekoreliran sa $\mathcal{Z}_{k-1}$ i da pripada prostoru $\mathcal{Z}_k$, pošto je linearna kombinacija izraza koji pripadaju $\mathcal{Z}_k$. Zato vrijedi

$$E\left[x_k o_k^T\right] o_k = K_k(z_k - H_k\Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+)), \tag{15}$$

gdje je K_k matrica koeficijenata dimenzije $n \times l$. Naime, komponente vektora o_k i komponente vektora $z_k - H_k\Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+)$ pripadaju ortogonalnom komplementu prostora razapetog komponentama svih vektora u skupu $\{o_1, \dots, o_{k-1}\}$ tj. komponentama svih vektora u skupu Z_{k-1} u prostoru razapetom komponentama svih vektora u skupu $\{o_1, \dots, o_k\}$ tj. razapetom komponentama svih vektora u skupu Z_k. Iz toga slijedi da je svaka linearna kombinacija komponenata vektora o_k ujedno i linearna kombinacija komponenata vektora $z_k - H_k\Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+)$.

Iz (14) i (15) slijedi da vrijedi sljedeća rekurzivna relacija za $\hat{x}_k(+)$

$$\hat{x}_k(+) = \Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+) + K_k(z_k - H_k\Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+)). \tag{16}$$

Sumandi u (16) su nekorelirani (okomiti).

Napomena 3.1. S obzirom da je $\hat{x}_k(+)$ tj. svaka njegova komponenta, geometrijskim jezikom zapravo projekcija od svake komponente stanja x_k u prostor razapet svim komponentama vektora skupa Z_k, lagano se vidi da je $\hat{x}_k(+)$ jedinstven.

3.2 Izvod algoritma Kalmanovog filtera

Jednadžba (16) kombinira utjecaj apriorne procjene stanja i izmjerene veličine. Aposteriorna procjena stanja $\hat{x}_k(+)$ je linearna kombinacija apriorne procjene stanja $\hat{x}_k(-)$ i razlike između aktualnog mjerenja z_k i izraza $H_k\hat{x}_k(-)$ pomnožene s matricom K_k.

Matrica K_k se zove *Kalmanovo pojačanje*, a slučajni vektor $z_k - H_k\hat{x}_k(-)$ se zove *mjerni rezidual*. Kalmanovo pojačanje K_k je matrica veličine $n \times l$ i cilj je izabrati takvu matricu koja minimizira kovarijancu aposteriorne greške procjenitelja. Optimalan odabir Kalmanovog pojačanja koji minimizira utjecaj procesnog i mjernog šuma iznosi

$$K_k = P_k(-)H_k^T(H_kP_k(-)H_k^T + R_k)^{-1}, \tag{17}$$

što ćemo dokazati kasnije. Za sada uočimo da je matrica $H_kP_k(-)H_k^T + R_k$ sigurno regularna jer je R_k regularna, a $H_kP_k(-)H_k^T$ pozitivno semidefinitna.

Supstitucijom (5) u (16) dobijemo

$$\hat{x}_k(+) = \hat{x}_k(-) + K_k\left(H_kx_k + v_k - H_k\hat{x}_k(-)\right), \tag{18}$$

gdje smo koristili

$$\hat{x}_k(-) = \Phi_k\hat{x}_{k-1}(+). \tag{19}$$

Izraz (18) ubacimo u (10) čime dobijemo

$$\begin{aligned} P_k(+) \quad = \quad & E\big[\,((I - K_kH_k)(x_k - \hat{x}_k(-)) - K_kv_k) \\ & \qquad \cdot ((I - K_kH_k)(x_k - \hat{x}_k(-)) - K_kv_k)^T\,\big]. \end{aligned}$$

Ovdje treba primijetiti da je slučajni vektor $x_k - \hat{x}_k(-)$ apriorna greška procjenitelja i nekoreliran je sa šumom v_k pa se zbog toga očekivanje može raspisati na način

$$\begin{aligned} P_k(+) =& (I - K_kH_k)E\left[(x_k - \hat{x}_k(-))(x_k - \hat{x}_k(-))^T\right](I - K_kH_k)^T \\ & + K_kE[v_kv_k^T]K_k^T. \end{aligned} \tag{20}$$

Iz (9) dobijemo

$$P_k(+) = (I - K_k H_k) P_k(-) (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T, \qquad (21)$$

gdje je $P_k(-)$ matrica kovarijance apriorne greške procjenitelja. Raspisujući (21) dobijemo

$$\begin{aligned} P_k(+) = & P_k(-) - K_k H_k P_k(-) - P_k(-) H_k^T K_k^T \\ & + K_k (H_k P_k(-) H_k^T + R_k) K_k^T. \end{aligned} \qquad (22)$$

Teorem 3.1. *Optimalna vrijednost matrice Kalmanovog pojačanja - vrijednost koja minimizira grešku u smislu metode najmanjih kvadrata je dana s* (17).

Dokaz. Kalmanov filter je procjenitelj koji procjenu vrši pomoću metode najmanjih kvadrata. Aposteriorna greška procjenitelja je $e_k(+) = x_k - \hat{x}_k(+)$. Želimo minimizirati očekivanu vrijednost kvadrata norme te greške (vidi (13)). To je ekvivalentno minimiziranju traga matrice kovarijance aposteriorne greške procjenitelja $P_k(+)$. Uzimajući u obzir da je trag matrice jednak tragu transponirane matrice, iz izraza (22) dobijemo

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,(P_k(+)) &= \mathrm{tr}(P_k(-)) - 2\,\mathrm{tr}(K_k H_k P_k(-)) \\ &\quad + \mathrm{tr}(K_k (H_k P_k(-) H_k^T + R_k) K_k^T). \end{aligned} \qquad (23)$$

Da bi postigli minimizaciju traga matrice promatramo izraz (23) kao funkciju K_k, deriviramo (23) po K_k i izjednačimo dobiveno s nulom tj. tražimo K_k koji zadovoljava

$$D\,[\mathrm{tr}(P_k(+))]\,(K_k) = 0,$$

gdje smo s D označili diferencijal. Uoči da za matricu V dimenzije $n \times l$ vrijedi

$$\begin{aligned} D_V\,[tr(P_k(+))]\,(K_k) &= -2\,\mathrm{tr}(V H_k P_k(-)) + \mathrm{tr}(V (H_k P_k(-) H_k^T + R_k) K_k^T) \\ &\quad + \mathrm{tr}(K_k (H_k P_k(-) H_k^T + R_k) V^T). \end{aligned}$$

Uzimajući u obzir da je trag matrice jednak tragu njoj transponirane matrice dobijemo slijedeću jednakost za svaku matricu V

$$\mathrm{tr}(V H_k P_k(-)) = \mathrm{tr}(V (H_k P_k(-) H_k^T + R_k) K_k^T),$$

iz čega slijedi (sjetimo se da je na prostoru matrica dimenzije $n \times l$ jedan od mogućih skalarnih produkata dan s $\langle A, B \rangle \mapsto \mathrm{tr}(AB^T)$) sljedeća jednakost

$$(H_k P_k(-))^T = K_k (H_k P_k(-) H_k^T + R_k),$$

iz koje pak slijedi da K_k određen s (17). K_k za koji vrijedi (17) je očito točka jedinstvenog globalnog minimuma funkcije (23) (uoči da je funkcija kvadratična u K_k s pozitivno definitnim vodećim članom). Na ovaj način izvedeno je optimalno pojačanje koje minimizira grešku procjene u smislu najmanjih kvadrata. □

Izraz (22) se može pojednostavniti koristeći (17) na sljedeći način. Najprije zaključimo iz (17) da vrijedi

$$K_k H_k P_K(-) = K_k(H_k P_k(-) H_k^T + R_k) K_k^T.$$

Sada, koristeći opet (17), (22) postaje

$$\begin{aligned} P_k(+) &= P_k(-) - P_k(-) H_k^T (H_k P_k(-) H_k^T + R_k)^{-1} H_k P_k(-) \\ &= P_k(-) - K_k H_k P_k(-) \\ &= (I - K_k H_k) P_k(-). \end{aligned}$$

Dobivena jednadžba daje nam vezu između apriorne i aposteriorne matrice kovarijance greške. Potrebno je još naći jednadžbu koja će izraziti matricu kovarijance apriorne pogreške preko matrice kovarijanci aposteriorne pogreške iz prethodnog koraka. To ćemo postići na sljedeći način. Najprije uočimo da vrijedi (podsjetimo se (19))

$$\begin{aligned} e_{k+1}(-) &= x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}(-) \\ &= (\Phi_k x_k + w_k) - \Phi_k \hat{x}_k(+) \\ &= \Phi_k e_k(+) + w_k. \end{aligned}$$

Iz ovoga slijedi

$$P_{k+1}(-) = E\left[e_{k+1}(-) e_{k+1}(-)^T\right] = E\left[(\Phi_k e_k(+) + w_k)(\Phi_k e_k(+) + w_k)^T\right].$$

Sada dobijemo

$$\begin{aligned} P_{k+1}(-) &= E\left[e_{k+1}(-) e_{k+1}(-)^T\right] \\ &= E\left[\Phi_k e_k(+)(\Phi_k e_k(+))^T\right] + E[w_k w_k^T] \\ &= \Phi_k P_k(+) \Phi_k^T + Q_k. \end{aligned}$$

4 Algoritam diskretnog Kalmanovog filtera

Prethodno dobiveni algoritam Kalmanovog filtera ima dva koraka. Prvi korak zovemo *prediktivnim*, dok će drugi biti *korekcijski*. Rezultat prediktivnog koraka predstavljaju apriorne procjene stanja i matrica kovarijance apriorne greške procjenitelja. U korekcijskom koraku sustav dobiva informacije o novim (realizacijama) mjerenjima i na osnovu tih informacija vrši korekciju apriornih pretpostavki. Rezultat korekcijskog koraka naziva se aposteriorna procjena. Jednadžbe Kalmanovog filtera mogu se po tome onda podijeliti u dvije grupe:

- jednadžbe predikcije

$$\begin{aligned}\hat{x}_k(-) &= \Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+),\\ P_k(-) &= \Phi_{k-1}P_{k-1}(+)\Phi_{k-1}^T + Q_{k-1}.\end{aligned}$$

- jednadžbe korekcije

$$\begin{aligned}K_k &= P_k(-)H_k^T(H_kP_k(-)H_k^T + R_k)^{-1},\\ \hat{x}_k(+) &= \hat{x}_k(-) + K_k(z_k - H_k\hat{x}_k(-)),\\ P_k(+) &= (I - K_kH_k)P_k(-).\end{aligned}$$

Nakon što se mjerenjem dobije realizacija od z_k, računa se Kalmanovo pojačanje, aposteriorna procjena stanja i matrica kovarijance aposteriorne greške procjenitelja. Aposteriorna procjena nakon jednog vremenskog koraka određuje apriornu procjenu u sljedećem koraku. Nakon jedne iteracije gore navedenih jednadžbi, proces se ponavlja.

Kada su matrice kovarijance šuma procesa Q i šuma mjerenja R konstante, tada će se i matrice kovarijance greške P_k i matrica K_k brzo stabilizirati i ostati konstantni. Konačni algoritam Kalmanovog filtera može se zapravo opisati pomoću beskonačne petlje u kojoj se cijelo vrijeme izmjenjuju obje grupe jednadžbi s ciljem procjene trenutnog stanja procesa. Slijedi algoritam za procjenu stanja modela danog sa sljedećim jednadžbama

$$\begin{cases} x_k = \Phi_{k-1}x_{k-1} + w_{k-1},\\ z_k = H_kx_k + v_k.\end{cases}$$

4.1 Koraci algoritma

1. U trenutku $k-1$ nakon što je izmjerena realizacija varijable z_{k-1}, treba izračunati $\hat{x}_{k-1}(+)$ i $P_{k-1}(+)$.
2. U trenutku k prije mjerenja realizacije od z_k, izračunaju se apriorne procjene $\hat{x}_k(-)$ i $P_k(-)$ koristeći formule

$$\begin{aligned}\hat{x}_k(-) &= \Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+),\\ P_k(-) &= \Phi_{k-1}P_{k-1}(+)\Phi_{k-1}^T + Q_{k-1}.\end{aligned}$$

3. U trenutku k računamo optimalno Kalmanovo pojačanje na način

$$K_k = P_k(-)H_k^T(H_kP_k(-)H_k^T + R_k)^{-1}.$$

4. Nakon mjerenja realizacije od z_k, korigiraju se apriorne procjene $\hat{x}_k(-)$ i $P_k(-)$ te se dobiju aposteriorne procjene $\hat{x}_k(+)$ i $P_k(+)$ koristeći formule

$$\begin{aligned}\hat{x}_k(+) &= \hat{x}_k(-) + K_k(z_k - H_k\hat{x}_k(-),\\ P_k(+) &= (I - K_kH_k)P_k(-).\end{aligned}$$

Primjer 4.1. Pretpostavimo da je promatrani sustav sljedećeg oblika

$$\begin{aligned}x_k &= \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} x_{k-1} + w_{k-1},\\ z_k &= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} x_k + v_k,\end{aligned}$$

gdje su šumovi w_k i v_k određeni svojstvom

$$w_k \sim N(0, I), \quad v_k \sim N\left(0, 2 + (-1)^k\right),$$

i zadana je matrica

$$P_0 = \begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{bmatrix}.$$

Izračunat ćemo za korake $k = 1, 2, 3, 10, 1000$ vrijednosti matrica $P_k(-)$, $P_k(+)$ i K_k. Primijetimo prvo da nam je poznato

$$\Phi_k = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \quad H_k = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}.$$

Za korak $k = 1$ vrijedi sljedeće

$$
\begin{aligned}
P_k(-) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 21 & 10 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}, \\
K_k &= \begin{bmatrix} 21 & 10 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 & 10 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T + 1 \right)^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 0.9545 \\ 0.4545 \end{bmatrix}, \\
P_k(+) &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.9545 \\ 0.4545 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 21 & 10 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.95 & 0.45 \\ 0.45 & 6.45 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Isto ponavljamo za ostale korake i tako dobijemo tablicu prikazanu dolje s vrijednostima matrica $P_k(-)$, $P_k(+)$ i K_k za korake $k = 1, 2, 3, 10, 1000$.

k	R_k	Q_k	$P_k(-)$	K_k	$P_k(+)$
1	1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 21 & 10 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.9545 \\ 0.4545 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.45 \\ 0.45 & 6.45 \end{pmatrix}$
2	3	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9.31 & 6.9 \\ 6.9 & 7.45 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.7564 \\ 0.5608 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.26 & 1.68 \\ 1.68 & 3.57 \end{pmatrix}$
3	1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10.21 & 5.26 \\ 5.26 & 4.57 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.9108 \\ 0.4692 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.91 & 0.46 \\ 0.46 & 2.11 \end{pmatrix}$
10	3	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4.64 & 2.36 \\ 2.36 & 2.96 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.6074 \\ 0.31 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.82 & 0.93 \\ 0.93 & 2.23 \end{pmatrix}$
1000	3	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4.64 & 2.36 \\ 2.36 & 2.96 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.6074 \\ 0.31 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.82 & 0.93 \\ 0.93 & 2.23 \end{pmatrix}$

Tablica 2.1: Vrijednosti matrica $P_k(-)$, $P_k(+)$ i K_k za korake $k = 1, 2, 3, 10, 1000$

Vidimo da se filter već nakon desetog koraka stabilizirao.

5 Algoritam diskretnog Kalmanovog filtera s kontrolom

Kao što smo već napomenuli u praksi se često javlja sustav koji sadrži kontrolu koju označavamo s u_k. Smatramo da nam je u_k unaprijed poznata. Jednadžbe modela su dane s (1). Slijedi algoritam za procjenu stanja takvog općenitijeg modela, čiji izvod lagano slijedi iz prethodnih razmatranja.

5.1 Koraci algoritma

1. U trenutku $k-1$ nakon što je izmjerena realizacija varijable z_{k-1}, treba izračunati $\hat{x}_{k-1}(+)$ i $P_{k-1}(+)$.

2. U trenutku k prije mjerenja z_k, izračunaju se apriorne procjene $\hat{x}_k(-)$ i $P_k(-)$ koristeći formule

$$\begin{aligned}\hat{x}_k(-) &= \Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+) + \Gamma_{k-1}u_{k-1},\\ P_k(-) &= \Phi_{k-1}P_{k-1}(+)\Phi_{k-1}^T + Q_{k-1}.\end{aligned}$$

3. U trenutku k računamo optimalno Kalmanovo pojačanje preko formule

$$K_k = P_k(-)H_k^T(H_kP_k(-)H_k^T + R_k)^{-1}.$$

4. Nakon mjerenja z_k, korigiraju se apriorne procjene $\hat{x}_k(-)$ i $P_k(-)$ te se dobiju aposteriorne procjene $\hat{x}_k(+)$ i $P_k(+)$ koristeći formule

$$\begin{aligned}\hat{x}_k(+) &= \hat{x}_k(-) + K_k(z_k - D_ku_k - H_k\hat{x}_k(-)),\\ P_k(+) &= (I - K_kH_k)P_k(-).\end{aligned}$$

Zadatak 5.1. Neka je model zadan s (4) i (5) i neka su nam u trenutku k dostupne samo realizacije do trenutka $r < k$. Razmislite kako biste izračunali procjenu stanja u trenutku k!

Uputa: Procjenitelj $\hat{x}^s_{r+s}(-)$, $s > 0$, za x_{r+s} je dan s $\hat{x}^s_{r+s}(-) := \Phi_{r+s-1}\dots\Phi_r\hat{x}_r(+)$.

Literatura

[1] M. Alapić, *Kalmanovi filteri*, Diplomski rad, Zagreb, 2019.

[2] C. K. Chui & G. Chen, *Kalman Filtering wtih Real-Time Application*, Springer, Berlin, 2009.

[3] M. S. Grewal & A. P. Andrews, *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001.

[4] R. E. Kalman, *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*, Transaction of the ASME - Journal of Basic Engineering, Baltimore, 1960.

[5] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.