Osječki matematički list 18 (2018), 123-128

Neke nove nejednakosti za trokut

Šefket Arslanagić*

Sažetak

U ovom radu dokazujemo osam novih nejednakosti za trokut. Te nejednakosti se temelje na jednoj dvostrukoj algebarskoj nejednakosti koju dokazujemo u teoremu 1. U dokazima koristimo više raznih jednakosti koje se odnose na elemente trokuta. Neke od tih jednakosti su dobro poznate.

Ključne riječi: *trokut, algebarska nejednakost, nejednakosti za trokut, stranice, kutovi, visine, poluopseg, polumjer trokutu upisane i opisane kružnice, polumjeri trokutu pripisanih kružnica, površina trokuta*

Some new inequalities for triangle

Abstract

In this paper we prove eight new inequalities for a triangle. These inequalities are based on a double algebraic inequality that we prove in Theorem 1. In the proofs we use a variety of equalities related to elements of a triangle. Some of these equalities are well known.

Keywords: *triangle, algebraic inequality, inequalities for triangle, sides, angles, altitudes, semi-perimeter, radii of incircle, circumcircle and excircles, area of triangle*

*Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu, Odsjek za matematiku, email: asefket@pmf.unsa.ba

1 Uvod

Najprije ćemo dokazati sljedeći teorem:

Teorem 1.1. *Ako su x, y i $z > 0$, tada važi nejednakost:*

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}} \geq \sqrt[3]{xyz} \tag{1}$$

Dokaz. Lijeva nejednakost je nakon kvadriranja ekvivalentna sljedećoj nejednakosti:

$$\begin{aligned} &(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \qquad (2)\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \geq 0\\ &\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx \geq 0\\ &\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

što je točno, pa je i nejednakost (2) točna.

Da bi dokazali desnu stranu nejednakosti (1) koristit ćemo dobro poznatu nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja:

$$\begin{aligned} \frac{xy+yz+zx}{3} &\geq \sqrt[3]{xy \cdot yz \cdot zx}\\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}} &\geq \sqrt{\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}\\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}} &\geq \sqrt[3]{xyz} \end{aligned}$$

Jednakosti u (1) vrijede ako i samo ako je $x = y = z$. □

2 Poznate jednakosti za trokut

Ovdje ćemo dati veći broj dobro poznatih (i neke manje poznatih) jednakosti koje se odnose na trokut.

Za trokut ABC sa stranicama a, b i c, unutarnjim kutovima α, β i γ te visinama h_a, h_b i h_c, vrijedi sljedeći niz jednakosti, gdje je $a+b+c=2s$, r polumjer trokutu upisane kružnice, R polumjer trokutu opisane kružnice,

r_a, r_b i r_c polumjeri trokutu pripisanih kružnica, a P je površina trokuta.

$$\begin{aligned}
P &= \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}, \\
P &= \sqrt{s\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)}, \\
r &= \frac{P}{s}, \\
R &= \frac{abc}{4P}, \\
r_a = \frac{P}{s-a},\ r_b &= \frac{P}{s-b},\ r_c = \frac{P}{s-c}, \\
r_a + r_b + r_c &= 4R + r, \\
r_a r_b r_c &= s^2 r, \\
r_a r_b + r_b r_c + r_a r_c &= s^2, \\
\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right) &= sr^2, \\
\left(s-a\right)\left(s-b\right) + \left(s-b\right)\left(s-c\right) + \left(s-a\right)\left(s-c\right) &= 4\left(4R+r\right), \\
ab + bc + ac &= s^2 + r^2 + 4Rr, \\
h_a + h_b + h_c &= \frac{s^2 + r^2 + 4Rr}{2R}, \\
h_a h_b h_c &= \frac{2r^2 s^2}{R}, \\
h_a h_b + h_b h_c + h_a h_c &= \frac{2s^2 r}{R}, \\
\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} &= \frac{4R+r}{s}, \\
\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} &= \frac{r}{s}, \\
\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} &= 1, \\
\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma &= 1 + \frac{r}{R}, \\
\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} &= \frac{s}{r}, \\
\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} &= \frac{s}{r}, \\
\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} + ctg\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} &= \frac{4R+r}{r}, \\
a^2 + b^2 + c^2 &= 2s^2 - 2r^2 - 8Rr, \\
\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} &= \frac{2R-r}{2R},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2} &= \frac{r^2}{16R^2}\\
\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2} &= \frac{s^2+r^2-8Rr}{16R^2}\\
\cos^2\frac{\alpha}{2}+cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2} &= \frac{4R+r}{2R}\\
\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}cos^2\frac{\gamma}{2} &= \frac{s^2}{16R^2}\\
\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2} &= \frac{s^2+(4R+r)^2}{16R^2}
\end{aligned}$$

Dokaz skoro svih ovih jednakosti mogu se naći u [1], [3] i [4].

3 Nove nejednakosti za trokut

Uzimajući u teoremu 1 da je

$$\begin{gathered}
(x,y,z)\in\{(a,b,c),(s-a,s-b,s-c),(h_a,h_b,h_c),(r_a,r_b,r_c),\\
(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\operatorname{tg}\frac{\beta}{2},\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}),(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2},\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}),\\
(\sin^2\frac{\alpha}{2},\sin^2\frac{\beta}{2},\sin^2\frac{\gamma}{2}),(\cos^2\frac{\alpha}{2},\cos^2\frac{\beta}{2},\cos^2\frac{\gamma}{2})\}
\end{gathered}$$

te uvažavajući spomenute jednakosti dobivamo sljedeće nejednakosti:

Nejednakost 1.

$$\frac{2s}{3}\geq\sqrt{\frac{s^2+r^2+4Rr}{3}}\geq\sqrt[3]{4Rrs}. \tag{3}$$

Nejednakost 2.

$$\frac{s}{3}\geq\sqrt{\frac{r\,(4R+r)}{3}}\geq\sqrt[3]{sr^2}. \tag{4}$$

Nejednakost 3.

$$\frac{s^2+r^2+4Rr}{6R}\geq\sqrt{\frac{2s^2r}{3R}}\geq\sqrt[3]{\frac{2s^2r^2}{R}}. \tag{5}$$

Nejednakost 4.

$$\frac{4R+r}{3}\geq\frac{s}{\sqrt{3}}\geq\sqrt[3]{s^2r}. \tag{6}$$

Nejednakost 5.

$$\frac{4R+r}{3s} \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \geq \sqrt[3]{\frac{r}{s}}. \tag{7}$$

Nejednakost 6.

$$\frac{s}{3r} \geq \sqrt{\frac{4R+r}{3r}} \geq \sqrt[3]{\frac{s}{r}}. \tag{8}$$

Nejednakost 7.

$$\frac{2R-r}{6R} \geq \sqrt{\frac{s^2+r^2-8Rr}{48R^2}} \geq \sqrt[3]{\frac{r^2}{16R^2}}. \tag{9}$$

Nejednakost 8.

$$\frac{4R+r}{6R} \geq \sqrt{\frac{s^2+(4R+r)^2}{48R^2}} \geq \sqrt[3]{\frac{s^2}{16R^2}}. \tag{10}$$

U svim ovim nejednakostima, jednakosti vrijede ako i samo ako je u pitanju jednakostranični trokut.

4 Zaključak

Nadam se da će ovaj rad biti zanimljiv i koristan čitaocima koji pokazuju veći interes za matematiku. Neke od dokazanih nejednakosti će ih možda inspirirati da i sami pokušaju na sličan način pronaći neke nove nejednakosti. Dakle, ovom radu ne manjka ideja što je možda i najvažnije. S druge strane, obilje jednakosti u vezi trokuta ponuđenih u ovom radu, svakako će čitaocima upotpuniti znanja iz ove oblasti matematike. Čitaoce upućujemo da posvete jedan dio pažnje i ponuđenoj literaturi.

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene, Bosanska riječ*, Sarajevo, 2005.

[2] O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen (The Netherlands), 1969.

[3] N. Minculete, *Eqalitati si ineqalitati geometrice in trianghi*, Editura Eurocarpatica, Sfantu Gheorge, 2003.

[4] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, V. Volenec, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht/Boston/London, 1989.

[5] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.