Osječki matematički list 18 (2018), 129-146

O nilpotentnim matricama reda 2

Rajna Rajić *

Sažetak

U ovom radu dajemo nekoliko karakterizacija kompleksnih nilpotentnih matrica reda 2, a koje se temelje na Hamilton–Cayleyjevom teoremu. U terminima tragova i determinanti matrica, opisujemo uvjete na matrice $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ uz koje je komutator $AB - BA$ nilpotentna matrica.

Ključne riječi: *nilpotentna matrica, komutator, Hamilton–Cayleyjev teorem*

On nilpotent matrices of order 2

Abstract

In this paper, we give several characterizations of complex nilpotent matrices of order 2, which are based on the Cayley–Hamilton theorem. In terms of traces and determinants of matrices, we describe the conditions on $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ under which the commutator $AB - BA$ is a nilpotent matrix.

Keywords: *nilpotent matrix, commutator, Cayley–Hamilton theorem*

*Rudarsko-geološko-naftni fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Pierottijeva 6, Zagreb, *email: rajna.rajic@rgn.hr*

1 Uvod

Označimo s $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ algebru svih kompleksnih kvadratnih matrica reda n, a s $I \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ jediničnu matricu. *Trag* matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, u oznaci $\operatorname{tr} A$, definira se kao zbroj njezinih dijagonalnih elemenata;

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Trag je linearni funkcional na prostoru kvadratnih matrica te vrijedi

$$\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr} A, \quad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA), \quad A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}),$$

gdje smo s A^T označili transponiranu matricu matrice A.

Broj $\lambda \in \mathbb{C}$ zovemo *svojstvenom vrijednošću* matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ ako postoji vektor $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ takav da je $Ax = \lambda x$. (Pritom elemente prostora $\mathbb{C}^n$ zapisujemo kao jednostupčane matrice.) Skup svih svojstvenih vrijednosti matrice A zovemo *spektrom* od A i označavamo sa $\sigma(A)$. Pokazuje se da je trag matrice jednak zbroju, a determinanta umnošku njezinih svojstvenih vrijednosti (v. npr. [7, teorem 3.3]).

Karakteristični (*svojstveni*) *polinom* matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ definira se kao

$$k_A(\lambda) = \det(\lambda I - A),$$

gdje smo s $\det(\cdot)$ označili determinantu matrice. To je polinom n-tog stupnja nad poljem $\mathbb{C}$ pa prema osnovnom teoremu algebre ima n kompleksnih nultočaka, i to su svojstvene vrijednosti matrice A. Prema Hamilton–Cayleyjevom teoremu svaka kvadratna matrica poništava svoj karakteristični polinom.

U slučaju matrica reda 2 karakteristični polinom ima jednostavni oblik; njegovi se koeficijenti iskazuju u terminima traga i determinante matrice. U ovom radu bavimo se nilpotentnim matricama reda 2. Koristeći Hamilton–Cayleyjev teorem dobivamo razne karakterizacije nilpotentnih matrica reda 2, ispitujemo njihova svojstva te razmatramo uvjete uz koje je komutator nilpotentna matrica. Rad se temelji na rezultatima koji se mogu naći u [2, 3, 4, 5].

2 Karakterizacije nilpotentnih matrica reda 2

Kažemo da je matrica $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *nilpotentna* ako je $A^k = 0$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Najmanji broj k s takvim svojstvom zovemo *indeksom nilpotentnosti* matrice A. Nilpotentne matrice imaju važnu ulogu u matričnoj teoriji. Koriste se, primjerice, pri nalaženju Jordanove kanonske forme matrice, te nam omogućuju da lakše analiziramo strukturu bilo koje linearne transformacije.

Jasno je da je nilpotentna matrica singularna jer, prema Binet–Cauchyjevom teoremu, iz $0 = \det(A^k) = (\det A)^k$ slijedi $\det A = 0$. Stoga je 0 svojstvena vrijednost nilpotentne matrice. Međutim, pokazuje se da su sve svojstvene vrijednosti od A jednake nuli. Zaista, ako je λ proizvoljna svojstvena vrijednost matrice A i $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ njoj pridruženi svojstveni vektor, onda iz $Ax = \lambda x$ slijedi $0 = A^k x = \lambda^k x$ pa je $\lambda = 0$. Štoviše, vrijedi i obrat. Ako su sve svojstvene vrijednosti matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ jednake nuli, onda je $k_A(\lambda) = \lambda^n$ i stoga je, prema Hamilton–Cayleyjevom teoremu, $A^n = 0$ tj. matrica A je nilpotentna.

Budući da je trag matrice jednak sumi njezinih svojstvenih vrijednosti, to je $\operatorname{tr} A = 0$ za svaku nilpotentnu matricu A.

Pogledajmo koji je opći oblik kompleksne nilpotentne matrice reda 2. Za kvadratnu matricu
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
karakteristični polinom glasi
$$\begin{aligned} k_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - d) - bc \\ &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc \\ &= \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A \end{aligned}$$
pa je prema Hamilton–Cayleyjevom teoremu
$$A^2 - (\operatorname{tr} A)A + (\det A)I = 0. \tag{1}$$
Uočimo, ako je $\det A = 0$ i $\operatorname{tr} A = 0$, onda je $A^2 = 0$, tj. matrica A je nilpotentna. Prema tome,
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
je nilpotentna matrica ako i samo ako je $\operatorname{tr} A = 0$ i $\det A = 0$, tj. ako i samo ako je $a + d = 0$ i $ad - bc = 0$, odnosno $d = -a$ i $a^2 + bc = 0$. Uočimo, ako je $b \neq 0$, tada je $c = -\frac{a^2}{b}$, a ako je $b = 0$ tada je $a = d = 0$. Time smo pokazali da vrijedi sljedeći rezultat.

Teorem 2.1. *Nilpotentne matrice reda* 2 *su matrice oblika*
$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C},\ b \neq 0$$
i

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

U slučaju matrica reda 2 nilpotentne su točno one matrice čiji je kvadrat nul-matrica. Osim toga, nilpotentnost matrice reda 2 može se karakterizirati i u terminima traga matrice. Naime, vrijedi sljedeći rezultat.

Teorem 2.2. *Za $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne*:

(i) *A je nilpotentna,*

(ii) $A^2 = 0$,

(iii) $\operatorname{tr} A = \det A = 0$,

(iv) $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}(A^2) = 0$.

Dokaz. Jasno je da iz (ii) slijedi (i). Za nilpotentnu matricu A je $\operatorname{tr} A = \det A = 0$ budući da su joj obje svojstvene vrijednosti jednake nuli pa stoga iz (i) slijedi (iii). Prema (1), iz (iii) slijedi (ii). Time smo pokazali da su tvrdnje (i), (ii) i (iii) međusobno ekvivalentne.

Djelujemo li tragom na obje strane jednakosti (1), dobije se

$$\operatorname{tr}(A^2) - (\operatorname{tr} A)^2 + 2 \det A = 0$$

odakle slijedi da su tvrdnje (iii) i (iv) međusobno ekvivalentne. □

U nastavku dajemo još jednu karakterizaciju nilpotentnosti matrice, i to u terminima determinanti.

Teorem 2.3. *$A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ je nilpotentna matrica ako i samo ako je*

$$|\det(A + B)| \geq |\det B|$$

za svaku matricu $B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ koja komutira s A.

Dokaz. Neka je A nilpotentna matrica, a B proizvoljna matrica koja komutira s A. Prema teoremu 2.2 vrijedi $A^2 = 0$ te $\operatorname{tr} A = 0$. Također je $(AB)^2 = A^2B^2 = 0$ pa prema teoremu 2.2 slijedi $\operatorname{tr}(AB) = 0$. Primijenimo Hamilton–Cayleyjev teorem na matricu $A + B$. Imamo

$$(A + B)^2 - (\operatorname{tr}(A + B))(A + B) + \det(A + B)I = 0,$$

odnosno

$$B^2 + 2AB - (\operatorname{tr} B)A - (\operatorname{tr} B)B + \det(A + B)I = 0. \tag{2}$$

Kako je $B^2 - (\operatorname{tr} B)B = -(\det B)I$, to iz (2) slijedi

$$-(\det B)I + 2AB - (\operatorname{tr} B)\, A + \det(A+B)I = 0. \tag{3}$$

Djelujemo li tragom na obje strane jednakosti (3), dobije se

$$-2(\det B) + 2\operatorname{tr}(AB) - (\operatorname{tr} B)\operatorname{tr} A + 2\det(A+B) = 0,$$

a budući da je $\operatorname{tr} A = 0$ i $\operatorname{tr}(AB) = 0$, slijedi $\det(A+B) = \det B$.

Obratno, pretpostavimo da je $|\det(A+B)| \geq |\det B|$ za svaku matricu $B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ koja komutira s A. Neka je λ proizvoljna svojstvena vrijednost matrice A. Tada je $\det(A - \lambda I) = 0$. Kako matrica $-\lambda I$ komutira s A, prema pretpostavci je

$$0 = |\det(A - \lambda I)| \geq |\det(-\lambda I)| = |\lambda|^2$$

te je stoga $\lambda = 0$. Prema tome, obje svojstvene vrijednosti matrice A su jednake nuli pa je matrica A nilpotentna. $\square$

Vidjeli smo da je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotentna matrica ako i samo ako je A rješenje matrične jednadžbe $A^2 = 0$. Sljedeći rezultati pokazuju da se svaka nilpotentna matrica A reda 2 može opisati kao rješenje matrične jednadžbe $AB + BA = I$, odnosno $A = AB - BA$ za neku matricu $B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

Teorem 2.4. *Ako za singularnu matricu $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ postoji $B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ tako da je $AB + BA = I$, onda je matrica A nilpotentna.*

Obratno, ako je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotentna ne-nul matrica, onda postoji $B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ tako da je $AB + BA = I$.

Dokaz. Pretpostavimo da za singularnu matricu A postoji $B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ tako da je $AB + BA = I$. Tada je $\operatorname{tr}(AB) + \operatorname{tr}(BA) = 2$, tj. $\operatorname{tr}(AB) = 1$. Osim toga je $\det(AB) = 0$, budući da je matrica A singularna. Stoga, prema Hamilton–Cayleyjevom teoremu za matrice AB i BA, vrijedi $(AB)^2 = AB$ i $(BA)^2 = BA$. Nadalje,

$$\begin{aligned} I &= (AB + BA)^2 \\ &= (AB)^2 + (BA)^2 + AB^2A + BA^2B \\ &= AB + BA + AB^2A + BA^2B \\ &= I + AB^2A + BA^2B \end{aligned}$$

pa je $AB^2A + BA^2B = 0$. Kako je $\det A = 0$, prema Hamilton–Cayleyjevom teoremu je $A^2 = (\operatorname{tr} A)A$. Stoga je $0 = AB^2A + BA^2B = AB^2A + (\operatorname{tr} A)BAB$, tj.

$$AB^2A = -(\operatorname{tr} A)BAB. \tag{4}$$

Množenjem jednakosti $B^2 - (\operatorname{tr} B)B + (\det B)I = 0$ slijeva i zdesna s A i korištenjem jednakosti (4) dobije se

$$(\operatorname{tr} A)BAB + (\operatorname{tr} B)ABA - (\det B)A^2 = 0. \tag{5}$$

Djelujemo li na (5) tragom, imamo

$$(\operatorname{tr} A)\operatorname{tr}(BAB) + (\operatorname{tr} B)\operatorname{tr}(ABA) - (\det B)\operatorname{tr}(A^2) = 0. \tag{6}$$

Kako je $A^2 = (\operatorname{tr} A)A$, to je

$$\operatorname{tr}(A^2) = (\operatorname{tr} A)^2, \quad \operatorname{tr}(ABA) = \operatorname{tr}(A^2B) = \operatorname{tr} A \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr} A$$

pa iz (6) slijedi

$$(\operatorname{tr} A)\operatorname{tr}(BAB) + (\operatorname{tr} B)\operatorname{tr} A - (\det B)(\operatorname{tr} A)^2 = 0. \tag{7}$$

Pretpostavimo da je $\operatorname{tr} A \neq 0$. Tada iz (7) slijedi

$$\operatorname{tr}(BAB) + \operatorname{tr} B - (\det B)\operatorname{tr} A = 0. \tag{8}$$

Budući da je $B^2 = (\operatorname{tr} B)B - (\det B)I$, imamo

$$\operatorname{tr}(BAB) = \operatorname{tr}(AB^2) = (\operatorname{tr} B)\operatorname{tr}(AB) - (\det B)\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B - (\det B)\operatorname{tr} A$$

pa iz (8) slijedi $\operatorname{tr}(BAB) = 0$. Osim toga je $\det(BAB) = 0$ pa je, prema teoremu 2.2, $(BAB)^2 = 0$. Odavde je

$$0 = A(BAB)^2A = (AB)^2(BA)^2 = (AB)(BA) = AB^2A$$

pa iz (4) slijedi $BAB = 0$. Tada je $0 = A(BAB) = (AB)^2 = AB$, što je u kontradikciji s $\operatorname{tr}(AB) = 1$. Prema tome, mora biti $\operatorname{tr} A = 0$. Tada je $A^2 = (\operatorname{tr} A)A = 0$, tj. matrica A je nilpotentna.

Obratno, pretpostavimo da je matrica $A \neq 0$ nilpotentna. Tada je prema teoremu 2.1,

$$A = A_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C},\ b \neq 0$$

ili

$$A = A_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Lako se provjeri da su u slučaju $A = A_{a,b}$ elementi matrice $B = (b_{ij})$ za koju vrijedi $AB + BA = I$ rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} b_{11} + b_{22} &= 0 \\ 2ab_{11} + bb_{21} - \frac{a^2}{b} b_{12} &= 1, \end{aligned}$$

i takvih je rješenja beskonačno mnogo. Naprimjer, jedno rješenje je $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$, $b_{21} = \frac{1}{b}$, tj.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ako je $A = A_c$, tada je $B = (b_{ij})$ matrica za koju vrijedi $AB + BA = I$ ako i samo ako njeni elementi ispunjavaju uvjete $b_{22} = -b_{11}$ i $b_{12} = \frac{1}{c}$. Primijetimo da i u ovom slučaju ima beskonačno mnogo rješenja. Stoga za B možemo uzeti naprimjer

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{c} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Time je teorem dokazan. □

Teorem 2.5. *$A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ je nilpotentna matrica ako i samo ako postoji matrica $B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ takva da je $A = AB - BA$.*

Dokaz. Neka je $A = AB - BA$ za neku matricu $B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. Tada je $\operatorname{tr} A = 0$,

$$\operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}(A(AB - BA)) = \operatorname{tr}(A^2B) - \operatorname{tr}(ABA) = \operatorname{tr}(A^2B) - \operatorname{tr}(A^2B) = 0,$$

pa je prema teoremu 2.2 matrica A nilpotentna.

Obratno, pretpostavimo da je matrica A nilpotentna. Ako je $A = 0$, onda je $A = AB - BA$ za svaku matricu $B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. Stoga pretpostavimo da je $A \neq 0$. Tada je prema teoremu 2.1

$$A = A_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C},\, b \neq 0$$

ili

$$A = A_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Ako je $A = A_{a,b}$, onda su elementi matrice $B = (b_{ij})$ za koju vrijedi $A = AB - BA$ rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} bb_{21} + \frac{a^2}{b} b_{12} &= a \\ 2ab_{12} + b(b_{22} - b_{11}) &= b \\ \frac{a^2}{b}(b_{22} - b_{11}) - 2ab_{21} &= -\frac{a^2}{b}, \end{aligned}$$

a takvih je rješenja beskonačno mnogo. Jedno moguće rješenje je $b_{11} = b_{12} = 0, b_{22} = 1, b_{21} = \frac{a}{b}$, tj.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{a}{b} & 1 \end{pmatrix}.$$

Ako je $A = A_c$, onda su elementi od B rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} b_{12} &= 0 \\ b_{11} - b_{22} &= 1. \end{aligned}$$

Jedno moguće rješenje je $b_{11} = 1, b_{12} = b_{21} = b_{22} = 0$, tj.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Time je teorem dokazan. □

3 Neka svojstva nilpotentnih matrica

Ako su $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ proizvoljne nilpotentne matrice, tada niti njihov zbroj niti umnožak ne mora biti nilpotentna matrica. Primjerice, matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

su nilpotentne, ali niti $A + B$ niti AB nije nilpotentna matrica. Općenito se ne može dogoditi da je zbroj dviju nilpotentnih matrica nilpotentna matrica dok njihov umnožak to nije, odnosno da njihov umnožak jeste, a da zbroj nije nilpotentna matrica. O tome govori sljedeći rezultat.

Lema 3.1. *Neka su $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotentne matrice. Tada je $A \pm B$ nilpotentna matrica ako i samo ako je matrica AB nilpotentna.*

Dokaz. Najprije pretpostavimo da je matrica AB nilpotentna. Tada prema teoremu 2.2 vrijedi $(AB)^2 = 0$. Odavde slijedi $(BA)^3 = B(AB)^2A = 0$ pa je matrica BA također nilpotentna. Ponovo prema teoremu 2.2 zaključujemo da je $(BA)^2 = 0$. Stoga je

$$(A \pm B)^2 = A^2 + B^2 \pm AB \pm BA = \pm(AB + BA)$$

pa je

$$(A \pm B)^4 = (AB + BA)^2 = (AB)^2 + (BA)^2 + AB^2A + BA^2B = 0$$

jer su A i B nilpotentne, čime je pokazano da je $A \pm B$ nilpotentna matrica.

Obratno, pretpostavimo da je $A + B$ nilpotentna matrica. Tada je, prema teoremu 2.2, $(A + B)^2 = 0$ odakle slijedi $A^2 + B^2 + AB + BA = 0$ odnosno $AB = -BA$. Stoga je

$$(AB)^2 = ABAB = A(-AB)B = -A^2B^2 = 0,$$

odnosno matrica AB je nilpotentna. Sada je jasno da nilpotentnost matrice AB slijedi i iz pretpostavke da je $A - B$ nilpotentna. Time je tvrdnja dokazana. □

Uočimo da matrice A i B iz (9) ne komutiraju. Vidjet ćemo sada da uvjet komutativnosti osigurava da zbroj odnosno umnožak nilpotentnih matrica bude nilpotentna matrica.

Lema 3.2. *Ako su $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotentne matrice i $AB = BA$, onda su i matrice $A + B$ i $A - B$ nilpotentne i vrijedi $AB = 0$.*

Dokaz. Budući da su matrice A i B nilpotentne, prema teoremu 2.2 vrijedi $A^2 = B^2 = 0$. Odavde, i zbog pretpostavke da matrice A i B komutiraju, imamo

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2 = \pm 2AB. \tag{10}$$

Kvadriranjem gornje jednakosti dobije se

$$(A \pm B)^4 = 4ABAB = 4A^2B^2 = 0$$

pa zaključujemo da su $A + B$ i $A - B$ nilpotentne matrice. Tada je, prema teoremu 2.2, $(A \pm B)^2 = 0$ odakle prema (10) slijedi $AB = 0$. □

Formula za kvadrat binoma

$$(t \pm s)^2 = t^2 + s^2 \pm 2ts, \quad t, s \in \mathbb{C},$$

općenito ne vrijedi za matrice budući da množenje matrica nije komutativno. Ipak, implikacija

$$t^2 + s^2 \pm 2ts = 0 \Rightarrow (t \pm s)^2 = 0,$$

može se generalizirati na matrice reda 2, kao što pokazuje sljedeći rezultat.

Teorem 3.1. *Ako za $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ vrijedi $A^2 + B^2 \pm 2AB = 0$, onda je $AB = BA$ i $k_A = k_{\mp B}$. Posebno, $(A \pm B)^2 = 0$, tj. $A \pm B$ je nilpotentna matrica.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $A^2 + B^2 = 2AB$. Najprije ćemo pokazati da matrice A i B imaju isti spektar. Neka je λ proizvoljna svojstvena vrijednost matrice B i $x \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ njoj pridružen svojstveni vektor. Tada je $Bx = \lambda x$ i $B^2 x = \lambda^2 x$ odakle se dobije

$$\begin{aligned} 0 &= (A^2 + B^2 - 2AB)x \\ &= A^2 x + B^2 x - 2ABx \\ &= A^2 x + \lambda^2 x - 2\lambda Ax \\ &= (A^2 - 2\lambda A + \lambda^2 I)x \\ &= (A - \lambda I)^2 x. \end{aligned}$$

Kako je $x \neq 0$, slijedi da je matrica $A - \lambda I$ singularna pa je $\lambda \in \sigma(A)$. Time smo pokazali da je $\sigma(B) \subseteq \sigma(A)$.

Da bismo pokazali da vrijedi obratna inkluzija, transponirat ćemo jednakost $A^2 + B^2 = 2AB$. Dobije se $(A^T)^2 + (B^T)^2 = 2B^T A^T$ pa prijašnjim rasuđivanjem slijedi $\sigma(A^T) \subseteq \sigma(B^T)$, odnosno $\sigma(A) \subseteq \sigma(B)$ budući da se matričnim transponiranjem ne mijenja spektar matrice. Dakle, $\sigma(A) = \sigma(B)$.

U slučaju matrica reda 2, jednakost $\sigma(A) = \sigma(B)$ povlači da obje matrice imaju istu svojstvenu vrijednost kratnosti 2, ili da obje matrice u spektru imaju iste dvije međusobno različite svojstvene vrijednosti. U oba slučaja je $k_A = k_B$. Posebno, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$.

Pokažimo sada da matrice A i B međusobno komutiraju te da je matrica $A - B$ nilpotentna. Prema pretpostavci imamo

$$(A - B)^2 = (A^2 + B^2) - AB - BA = 2AB - AB - BA = AB - BA. \quad (11)$$

Stoga je

$$\operatorname{tr}((A - B)^2) = \operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0$$

i također

$$\operatorname{tr}(A - B) = \operatorname{tr} A - \operatorname{tr} B = 0,$$

odakle prema teoremu 2.2 slijedi $(A - B)^2 = 0$. Konačno, iz (11) slijedi $AB = BA$.

U slučaju $A^2 + B^2 = -2AB$, prethodna razmatranja se primijene na matrice A i $-B$ i dobije se $AB = BA$, $k_A = k_{-B}$ i $(A + B)^2 = 0$. $\square$

Napomena 3.1. Obrat tvrdnje teorema 3.1 ne vrijedi. Ilustrirajmo to na primjeru. Ako je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

tada je matrica $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ nilpotentna. Međutim,

$$A^2 + B^2 + 2AB = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4 Nilpotentni komutatori

Za matricu $T \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ kažemo da je *komutator* ako postoje matrice $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ takve da je $T = AB - BA$. Jasno je da je $\operatorname{tr} T = 0$. Međutim, pokazuje se da vrijedi i obrat, tj. T je komutator ako i samo ako je $\operatorname{tr} T = 0$ ([1, 6]). Stoga je svaka nilpotentna matrica komutator. Obrat općenito ne vrijedi. Naime, prema teoremu 2.2, komutator $T \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ je nilpotentna matrica ako i samo ako je $\det T = 0$ odnosno T singularna matrica. U ovoj točki, u terminima tragova odnosno determinanti matrica, opisujemo razne uvjete na matrice $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ uz koje je komutator $T = AB - BA$ nilpotentna matrica. U tu svrhu najprije dokažimo nekoliko tvrdnji o determinantama i tragovima matrica reda 2, a koje se temelje na Hamilton–Cayleyjevom teoremu.

Lema 4.1. *Za $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ vrijedi*

$$\det A = \frac{1}{2}\big((\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)\big). \tag{12}$$

Dokaz. Djelujemo li tragom na obje strane jednakosti

$$A^2 - (\operatorname{tr} A)A + (\det A)I = 0$$

dobije se $\operatorname{tr}(A^2) - (\operatorname{tr} A)^2 + 2\det A = 0$ čime je tvrdnja dokazana. $\square$

Lema 4.2. *Za* $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ *vrijedi*:

(i) $\det(A+B) = \det A + \det B + \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B - \operatorname{tr}(AB)$,

(ii) $\det(AB - BA) = \operatorname{tr}(A^2B^2) - \operatorname{tr}((AB)^2)$.

Dokaz. (i) Prema (12) imamo

$$\begin{aligned}
\det(A+B) &= \frac{1}{2}\big((\operatorname{tr}(A+B))^2 - \operatorname{tr}((A+B)^2)\big)\\
&= \frac{1}{2}\big((\operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B)^2 - \operatorname{tr}(A^2 + B^2 + AB + BA)\big)\\
&= \frac{1}{2}\big((\operatorname{tr} A)^2 + (\operatorname{tr} B)^2 + 2\operatorname{tr} A \operatorname{tr} B - \operatorname{tr}(A^2) - \operatorname{tr}(B^2) - 2\operatorname{tr}(AB)\big)\\
&= \frac{1}{2}\big((\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)\big) + \frac{1}{2}\big((\operatorname{tr} B)^2 - \operatorname{tr}(B^2)\big) + \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B - \operatorname{tr}(AB)\\
&= \det A + \det B + \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B - \operatorname{tr}(AB).
\end{aligned}$$

(ii) Prema (12) je

$$2\det(AB) = (\operatorname{tr}(AB))^2 - \operatorname{tr}((AB)^2).$$

Odavde i uz primjenu tvrdnje (i) na matrice AB i $-BA$ dobije se

$$\begin{aligned}
\det(AB - BA) &= \det(AB) + \det(BA) - \operatorname{tr}(AB)\operatorname{tr}(BA) + \operatorname{tr}(AB^2A)\\
&= 2\det(AB) - (\operatorname{tr}(AB))^2 + \operatorname{tr}(A^2B^2)\\
&= \operatorname{tr}(A^2B^2) - \operatorname{tr}((AB)^2).
\end{aligned}$$

Time je lema dokazana. □

Lema 4.3. *Za* $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ *vrijedi*:

(i) $\det(A+B) + \det(A-B) = 2(\det A + \det B)$,

(ii) $\det(A-B)\det(A+B) = \det(A^2 - B^2) + \det(AB - BA)$,

(iii) $\det(A^2 + B^2) = \det(AB - BA) + (\det A - \det B)^2 + {}$
$\qquad + (\det(A+B) - \det A - \det B)^2$.

Dokaz. (i) Primijenimo li lemu 4.2(i) na matrice A, B te zatim $A, -B$, dobije se

$$\det(A+B) = \det A + \det B + \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B - \operatorname{tr}(AB),$$

$$\det(A-B) = \det A + \det B - \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B + \operatorname{tr}(AB),$$

odakle zbrajanjem ovih dviju jednakosti slijedi tvrdnja (i).

(ii) Primijenimo li tvrdnju (i) na matrice $A^2 - B^2$ i $AB - BA$, imamo

$$\begin{aligned}\det((A^2 - B^2) + (AB - BA)) + \det((A^2 - B^2) - (AB - BA))\\ = 2(\det(A^2 - B^2) + \det(AB - BA)).\end{aligned}$$

Međutim,

$$\det((A^2-B^2)+(AB-BA)) = \det((A-B)(A+B)) = \det(A-B)\det(A+B),$$

$$\det((A^2-B^2)-(AB-BA)) = \det((A+B)(A-B)) = \det(A+B)\det(A-B),$$

čime je dokazana tvrdnja (ii).

(iii) Primijenimo li tvrdnju (ii) na matrice A i iB, imamo

$$\det(A - iB)\det(A + iB) = \det(A^2 + B^2) + \det(i(AB - BA)),$$

odakle slijedi

$$\det(A^2 + B^2) = \det(AB - BA) + \det(A - iB)\det(A + iB). \tag{13}$$

S druge strane, primijenimo li lemu 4.2(i) na matrice A, iB te zatim na $A, -iB$ dobije se

$$\det(A + iB) = \det A - \det B + (\operatorname{tr} A \operatorname{tr} B - \operatorname{tr}(AB))i,$$

$$\det(A - iB) = \det A - \det B - (\operatorname{tr} A \operatorname{tr} B - \operatorname{tr}(AB))i,$$

odakle slijedi

$$\det(A - iB)\det(A + iB) = (\det A - \det B)^2 + (\operatorname{tr} A \operatorname{tr} B - \operatorname{tr}(AB))^2. \tag{14}$$

Prema lemi 4.2(i) te iz (13) i (14) slijedi tvrdnja (iii). $\square$

Lema 4.4. *Za* $A, B, C \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ *vrijedi*

$$\det(A+B+C) + \det A + \det B + \det C = \det(A+B) + \det(A+C) + \det(B+C).$$

Dokaz. Primijenimo Hamilton–Cayleyjev teorem na matrice $A + B + C$, A, B i C redom. Dobije se

$$(\det(A+B+C))I = -(A+B+C)^2 + (\operatorname{tr}(A+B+C))(A+B+C), \tag{15}$$

$$(\det A)I = -A^2 + (\operatorname{tr} A)A, \tag{16}$$

$$(\det B)I = -B^2 + (\operatorname{tr} B)B, \tag{17}$$

$$(\det C)I = -C^2 + (\operatorname{tr} C)C. \tag{18}$$

Zatim Hamilton–Cayleyjev teorem primijenimo na matrice $A+B$, $B+C$ i $A+C$ redom. Dobije se

$$(\det(A+B))I = -(A+B)^2 + (\mathrm{tr}(A+B))(A+B), \tag{19}$$
$$(\det(A+C))I = -(A+C)^2 + (\mathrm{tr}(A+C))(A+C), \tag{20}$$
$$(\det(B+C))I = -(B+C)^2 + (\mathrm{tr}(B+C))(B+C). \tag{21}$$

Lako se provjeri da je zbroj desnih strana jednakosti u (15), (16), (17) i (18) jednak zbroju desnih strana jednakosti u (19) (20) i (21) čime je tvrdnja dokazana. ☐

Uz pomoć prethodnih lema dat ćemo nekoliko karakterizacija nilpotentnosti komutatora u terminima determinanti odnosno tragova matrica, a zatim nekoliko rezultata koji u terminima matričnih jednadžbi daju dovoljne uvjete uz koje je komutator matrica nilpotentan.

Korolar 4.1. *Neka su* $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. *Tada su sljedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne*:

(i) $AB - BA$ *je nilpotentna matrica,*

(ii) $\det(AB - BA) = 0$,

(iii) $\det(A-B)\det(A+B) = \det(A^2 - B^2)$.

Dokaz. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ je posljedica teorema 2.2 i činjenice $\mathrm{tr}(AB - BA) = 0$.
$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ je posljedica leme 4.3(ii). ☐

Korolar 4.2. *Ako su* $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ *gdje je* A *nilpotentna matrica, onda je matrica* $AB - BA$ *nilpotentna ako i samo ako je* $\det(A+B) = \det B$.

Dokaz. Kako je A nilpotentna, to je $A^2 = 0$ prema teoremu 2.2 te također $\det A = 0$. Prema lemi 4.3(iii) je

$$\det(B^2) = \det(AB - BA) + (\det B)^2 + (\det(A+B) - \det B)^2,$$

tj.

$$\det(AB - BA) + (\det(A+B) - \det B)^2 = 0$$

pa je $\det(AB - BA) = 0$ ako i samo ako je $\det(A+B) = \det B$. Tvrdnja slijedi prema korolaru 4.1. ☐

Korolar 4.3. *Neka su* $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. *Matrica* $AB - BA$ *je nilpotentna ako i samo ako je* $\mathrm{tr}(A^2B^2) = \mathrm{tr}((AB)^2)$. *Posebno, ako je* A *ili* B *nilpotentna matrica, onda je* $AB - BA$ *nilpotentna ako i samo ako je* $\mathrm{tr}((AB)^2) = 0$.

Dokaz. Tvrdnja je direktna posljedica leme 4.2(ii) i korolara 4.1. $\square$

Korolar 4.4. *Ako su $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \neq |\beta|$, tako da je $\alpha AB + \beta BA = I$, onda je matrica $AB - BA$ nilpotentna.*

Dokaz. Matrice AB i BA imaju isti karakteristični polinom pa je stoga

$$\det(I - \lambda AB) = \det(I - \lambda BA), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Prema pretpostavci je

$$\alpha(AB - BA) = I - (\alpha + \beta)BA, \quad \beta(BA - AB) = I - (\alpha + \beta)AB.$$

Stoga je

$$\det(\alpha(AB - BA)) = \det(\beta(BA - AB),$$

tj.

$$\alpha^2 \det(AB - BA) = \beta^2 \det(AB - BA),$$

pa zbog $|\alpha| \neq |\beta|$ slijedi $\det(AB - BA) = 0$. Prema korolaru 4.1 matrica $AB - BA$ je nilpotentna. $\square$

Korolar 4.5. *Ako su $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ takve da je $A^2 + B^2 = AB$, onda je matrica $AB - BA$ nilpotentna.*

Dokaz. Najprije uočimo da je

$$\det(A^2 - AB) = \det A \det(A - B) = \det(A - B) \det A = \det(A^2 - BA),$$

$$\det(B^2 - AB) = \det(B - A) \det B = \det B \det(B - A) = \det(B^2 - BA).$$

Prema lemi 4.4 imamo

$$\begin{aligned}
\det(A^2 + B^2 - AB) &= \det(A^2 + B^2) + \det(A^2 - AB) + \det(B^2 - AB) - \\
&\quad - \det(A^2) - \det(B^2) - \det(AB) \\
&= \det(A^2 + B^2) + \det(A^2 - BA) + \det(B^2 - BA) - \\
&\quad - \det(A^2) - \det(B^2) - \det(BA) \\
&= \det(A^2 + B^2 - BA).
\end{aligned}$$

Kako je $A^2 + B^2 = AB$, slijedi

$$0 = \det(A^2 + B^2 - BA) = \det(AB - BA)$$

pa je prema korolaru 4.1 matrica $AB - BA$ nilpotentna. $\square$

Teorem 4.1. *Neka su $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, gdje je $A \neq 0$ nilpotentna matrica. Ako je $BAB = ABA$, onda je:*

(*i*) $AB - BA$ *nilpotentna matrica,*

(*ii*) $(\operatorname{tr} B)BAB = 0$,

(*iii*) $\det B = 0$.

Štoviše, ako je $AB = BA$, onda je i B nilpotentna matrica.

Dokaz. Kako je A nilpotentna matrica, prema teoremu 2.2 vrijedi $A^2 = 0$. Množenjem jednakosti $BAB = ABA$ slijeva, odnosno zdesna s A dobije se $(AB)^2 = A^2BA = 0$ i $(BA)^2 = ABA^2 = 0$. Stoga je

$$(AB - BA)^2 = (AB)^2 + (BA)^2 - AB^2A - BA^2B = -AB^2A \tag{22}$$

te je

$$\operatorname{tr}((AB - BA)^2) = \operatorname{tr}(-AB^2A) = -\operatorname{tr}(A^2B^2) = 0.$$

Kako je osim toga $\operatorname{tr}(AB - BA) = 0$, matrica $AB - BA$ je prema teoremu 2.2 nilpotentna.

Pokažimo da je $\det B = 0$. Budući da je $AB - BA$ nilpotentna matrica, to je $(AB - BA)^2 = 0$ pa prema (22) slijedi $AB^2A = 0$. Prema Hamilton–Cayleyjevom teoremu je

$$B^2 - (\operatorname{tr} B)B + (\det B)I = 0. \tag{23}$$

Množenjem jednakosti (23) slijeva i zdesna s A, uz uvažavanje činjenice $A^2 = 0$ i $AB^2A = 0$, dobije se

$$(\operatorname{tr} B)ABA = 0. \tag{24}$$

Ako je $\operatorname{tr} B \neq 0$, onda iz (24) slijedi $ABA = 0$ pa je prema pretpostavci i $BAB = 0$. Kada bi matrica B bila regularna, odavde bi slijedilo $A = 0$, što je u suprotnosti s pretpostavkom. Prema tome, B je singularna matrica pa je $\det B = 0$.

Pretpostavimo $\operatorname{tr} B = 0$. Tada iz (23) slijedi $B^2 = -(\det B)I$. Množenjem jednakosti $ABA = BAB$ zdesna s B dobije se

$$0 = (AB)^2 = BAB^2 = -(\det B)BA.$$

Odavde slijedi da je matrica B singularna, jer bi u suprotnom bilo $A = 0$ što je u kontradikciji s pretpostavkom. Dakle, i u ovom slučaju je $\det B = 0$.

Time smo pokazali da je, prema (23), $B^2 = (\operatorname{tr} B)B$. Preostaje dokazati da je, uz pretpostavku $AB = BA$, matrica B nilpotentna. Za to je dovoljno pokazati da je $\operatorname{tr} B = 0$. Kako je $BAB = ABA$, a matrice A i B komutiraju, imamo $B^2A = A^2B = 0$, tj. $(\operatorname{tr} B)BA = 0$. Pretpostavimo $\operatorname{tr} B \neq 0$. Tada je $AB = BA = 0$. Prema Hamilton–Cayleyjevom teoremu, za matricu $A + B$ vrijedi

$$(A+B)^2 - (\operatorname{tr}(A+B))(A+B) + (\det(A+B))I = 0. \tag{25}$$

Uočimo, $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 = B^2$, odakle slijedi da je

$$|\det(A+B)| = |\det B| = 0.$$

Stoga je prema (25)

$$B^2 = (\operatorname{tr}(A+B))(A+B) = (\operatorname{tr} B)(A+B) = (\operatorname{tr} B)A + (\operatorname{tr} B)B = (\operatorname{tr} B)A + B^2$$

pa je $(\operatorname{tr} B)A = 0$ odakle slijedi $A = 0$ što je u suprotnosti s pretpostavkom. Prema tome, pretpostavka $\operatorname{tr} B \neq 0$ vodi do kontradikcije. Zaključujemo da je $\operatorname{tr} B = 0$ i stoga je $B^2 = (\operatorname{tr} B)B = 0$. Time smo pokazali da, uz dodatnu pretpostavku da matrice A i B međusobno komutiraju, matrica B mora biti nilpotentna. $\square$

Napomena 4.1. Matrična jednadžba $BAB = ABA$, gdje je $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ zadana matrica, a $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ nepoznata matrica je matrična varijanta Yang–Baxterove jednadžbe. Za danu matricu A, općenito je teško naći sva rješenja ove jednadžbe, i ona su poznata samo u nekim posebnim slučajevima. Do sada je najveći napredak u rješavanju ove matrične jednadžbe postignut u nalaženju rješenja koja komutiraju sa zadanom matricom, dakle uz uvjet $AB = BA$, i to za neke posebne klase matrica A. U slučaju nilpotentne matrice A, više o tome zainteresirani čitatelj može pronaći u [4].

Zahvala
Najljepše zahvaljujem recenzentu na korisnim komentarima.

Literatura

[1] A. A. Albert, B. Muckenhoupt, *On matrices of trace zero*, Michigan Math. J. **4** (1957), 1–3.

[2] T. Andreescu, *Essential Linear Algebra with Applications. A Problem–Solving Approach*, Springer, New York, 2014.

[3] A. Bostan, T. Combot, *A binomial-like matrix equation*, dostupno na `https://specfun.inria.fr/bostan/publications/BoCo12.pdf`

[4] Q. Dong, J. Ding, Q. Huang, *Commuting solutions of a quadratic matrix equation for nilpotent matrices*, Algebra Colloquium **25** (1) (2018), 31–44.

[5] V. Pop, O. Furdui, *Square Matrices of Order* 2, Springer International Publishing AG, 2017.

[6] K. Shoda, *Einige Sätze über Matrizen*, Japan J. Math. **13** (1936), 361–365.

[7] F. Zhang, *Mathrix Theory*. *Basic Results and Techniques*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 2011.