Matka 27 (2018./2019.) br. 105

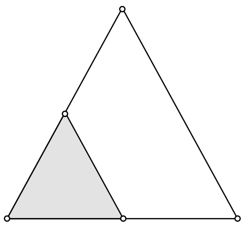
BERTRANDOV PARADOKS

Mislav Brnetić, XV. gimnazija, Zagreb

Bertrandov paradoks jedan je od najpoznatijih problema za koji se nudi više rješenja od kojih sva djeluju točno. Joseph Bertrand naveo ga je u svome djelu *Calcul des probabilités*. Problem glasi:

Kružnici je upisan jednakostraničan trokut. Kolika je vjerojatnost da će nasumično izabrana tetiva te kružnice biti dulja od stranice toga trokuta?

Kako bismo mogli riješiti ovaj problem, potrebno je razumjeti geometrijsku vjerojatnost. Ako imamo konačan broj jednako vjerojatnih događaja, vjerojatnost određujemo kao omjer broja povoljnih (željenih) događaja i svih mogućih događaja. Na sličan ćemo način odrediti i geometrijsku vjerojatnost. Vjerojatnost da se nasumično izabrana točka neke dužine, kružnice ili površine (ili bilo kojeg drugog objekta u geometriji) nalazi u željenom dijelu određuje se kao omjer veličine željenog dijela i cijele dužine, kružnog luka ili površine.



Zadatak 1. Odredite vjerojatnosti sljedećih događaja:

a) Na dužini $\overline{AB}$ nasumično izabrana točka T bliža je točki A nego točki B.

b) U dva slična trokuta kao na slici (na rubu) s koeficijentom sličnosti 2 nasumično izabrana točka T nalazi se u manjem trokutu.

c) Nasumično izabrana točka unutar kvadrata je sjecište dijagonala toga kvadrata.

Rješenje:

a) Neka je točka P polovište dužine $\overline{AB}$. Budući da želimo da točka T bude na dužini $\overline{AP}$, rješenje je omjer duljina dužina $\overline{AP}$ i $\overline{AB}$, a to je $\frac{1}{2}$.

b) Rješenje je omjer površina manjeg i većeg trokuta koji iznosi $\frac{1}{k^2}$ (k je koeficijent sličnosti), odnosno $\frac{1}{4}$.

c) Rješenje je omjer površine željene točke (0) i svih mogućnosti (a^2), a to je 0.

Za rješavanje Bertrandovog paradoksa bit će potrebna sljedeća jednostavna tvrdnja/zadatak.

Zadatak 2. Dokažite da je zadanom kružnicom jednoznačno određena duljina stranice jednakostraničnog trokuta upisanog u tu kružnicu. (1)

Dokaz. Ako je zadani trokut upisan u kružnicu, to znači da je ta kružnica tome trokutu opisana.

Dokažimo zadanu tvrdnju metodom kontradikcije, tj. pretpostavimo suprotno:

Postoje barem dva jednakostranična trokuta s različitim duljinama stranica koji se mogu upisati u istu kružnicu. Prema poučku o sličnosti trokuta K-K, ta dva jednakostranična trokuta su slična (imaju kutove jednakih veličina), a koeficijent sličnosti je različit od 1 s obzirom da su stranice različite duljine. Međutim, s obzirom da se duljine polumjera opisanih kružnica odnose u istom omjeru kao i duljine stranica, zaključujemo da su duljine polumjera opisanih kružnica tih dvaju trokuta međusobno različite. Ta je tvrdnja u kontradikciji s pretpostavkom.

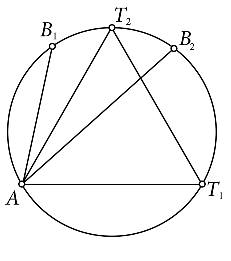
Pokušajmo odrediti rješenje Bertrandovog paradoksa. Ne izgleda teško, ali je li moguće pronaći više različitih rješenja?

1. rješenje Bertrandovog paradoksa

Nasumično odaberimo jednu točku A na kružnici. Konstruirajmo jednakostraničan trokut kojemu je jedan vrh u točki A i koji je upisan u tu kružnicu. Prema zadatku 2., duljina stranice toga trokuta jednoznačno je određena.

Nasumično na kružnici odaberimo točku B, različitu od točke A, i na taj način odredimo tetivu $\overline{AB}$.

Točke B_1 i B_2 predstavljaju neke od mogućih položaja točke B.



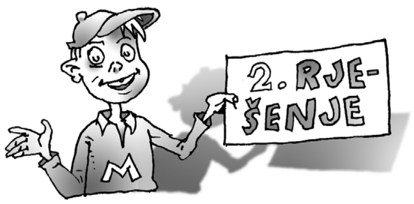
Zadatak 3. Promatrajte položaj točke B na kružnici. Kolika je vjerojatnost da je tetiva $\overline{AB}$ dulja od stranice toga trokuta?

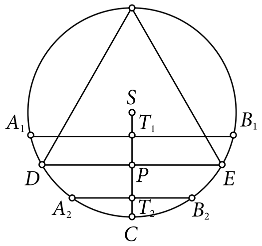
Rješenje: Lako je dokazati kako je duljina tetive $\overline{AB}$ veća od duljine stranice trokuta ako i samo ako se točka B nalazi na kraćem kružnom luku $\overset{\frown}{T_1T_2}$ pa je tražena vjerojatnost omjer duljine kraćeg kružnog luka $\overset{\frown}{T_1T_2}$ i cijele kružnice. S obzirom da su kružni lukovi nad tetivama jednake duljine jednaki, tražena vjerojatnost iznosi $\frac{1}{3}$.

2. rješenje Bertrandovog paradoksa

Nasumično odaberimo polumjer zadane kružnice i točku T na tom polumjeru različitu od središta kružnice i koja ne pripada kružnici. Kroz tu točku odredimo okomicu na taj polumjer. Krajnje točke tetive A i B su sjecišta kružnice i okomice.

Konstruirajmo jednakostraničan trokut kojem je jedna stranica okomita na odabrani polumjer (postojanje i jedinstvenost takvog trokuta jasni su iz konstrukcije). Prema Zadatku 2., duljina stranice toga trokuta jednoznačno je određena.





Točke T_1 i T_2 predstavljaju neke od mogućih položaja točke T.

Zadatak 4. Promatrajte položaj točke T na dužini $\overline{SC}$. Kolika je vjerojatnost da je duljina tetive veća od stranice trokuta?

Rješenje: Za svaku točku T na dužini $\overline{PC}$ tetiva će biti kraća od duljine stranice trokuta, a na dužini $\overline{SP}$ će biti dulja od stranice trokuta. Zbog sukladnosti trokuta ΔDPC i ΔDPS zaključujemo da je točka P polovište dužine $\overline{SC}$. Tražena vjerojatnost jednaka je omjeru duljina dužina $\overline{SP}$ i $\overline{SC}$ te iznosi $\frac{1}{2}$.

3. rješenje Bertrandovog paradoksa

Upišimo kružnicu zadanom trokutu.

Zadatak 5. Odredite duljinu polumjera jednakostraničnom trokutu upisane kružnice ako je duljina polumjera njemu opisane kružnice jednaka R.

Rješenje: Označimo vrhove trokuta s A, B i C, polovište dužine $\overline{AB}$ sa P i središte upisane i opisane kružnice sa S. Upisana kružnica prolazi točkom P. Duljina polumjera upisane kružnice r jednaka je duljini dužine $\overline{SP}$, a duljina polumjera opisane kružnice R jednaka je duljini dužine $\overline{SA}$. Budući da je trokut ΔAPS pravokutan trokut s veličinama kutova 30°, 60° i 90°, omjer duljina dužina $\overline{SP}$ i $\overline{SA}$ iznosi $\frac{1}{2}$, pa je duljina polumjera upisane kružnice jednaka $\frac{R}{2}$.

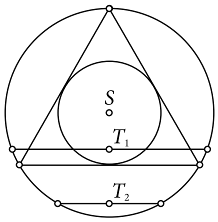
Zadatak 6. Izaberite nasumično točku T unutar zadane kružnice, različitu od središta, i konstruirajte tetivu kojoj je to polovište.

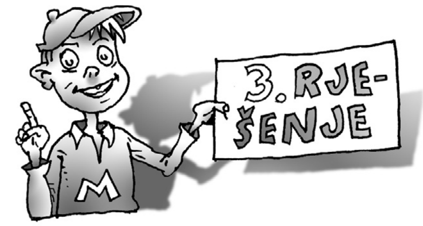
Dokažite da je na taj način jednoznačno određena tetiva.

Rješenje. Pretpostavimo suprotno. Za neku točku T postoje barem dvije različite tetive kojima je točka T polovište. Spajanjem krajnjih točaka tih tetiva sa središtem kružnice dobivamo dva jednakokračna trokuta pa je dužina koja spaja središte kružnice i točku T okomita na svaku od tih tetiva, što nije moguće.

Konstruirajmo jednakostraničan trokut upisan u zadanu kružnicu kojem je jedna stranica paralelna s tom tetivom. Duljina stranice toga trokuta jednaka je duljini stranice zadanoga trokuta po (1).

Točke T_1 i T_2 predstavljaju neke od mogućih položaja točke T.





Zadatak 7. Promatrajte položaj točke T i duljine tetive u odnosu na upisanu kružnicu. Kolika je vjerojatnost da je duljina tetive veća od duljine stranice trokuta?

Rješenje. Pomoću sličnosti lako je dokazati da je duljina tetive veća od duljine stranice trokuta ako i samo ako je točka T unutar upisane kružnice. Rješenje je omjer površina upisane kružnice i zadane kružnice, a to je (uz primjenu 5. zadatka) $\frac{1}{4}$.

Primijetimo da u 2. i 3. rješenju nasumično izabrana točka nije mogla biti središte zadane kružnice. Ako bismo izabrali središte zadane kružnice, tetiva bi bila promjer. U 2. rješenju tada bismo svaki promjer mogli izabrati na dva načina, a u 3. bi rješenju postojalo beskonačno mnogo promjera kojima je ta točka polovište (tetiva ne bi bila određena jednoznačno). Kako bismo izbjegli te probleme, u zadatku možemo isključiti promjere bez utjecaja na rješenja.

Dobili smo tri različita rješenja Bertrandovog problema: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{4}$.

Je li moguće da ovaj problem ima više rješenja? Možemo zaključiti kako vjerojatnost ovisi o metodi odabira tetive. Problem je što metoda nasumičnog odabira tetive nije određena (koristili smo tri različite metode). Bertrand je na ovaj način pokazao kako je potrebno jasno definirati metodu nasumičnog odabira kako bismo jednoznačno odredili vjerojatnost. U ovom problemu, ako bismo definirali metodu nasumičnog odabira tetive, dobili bismo jedinstveno rješenje.