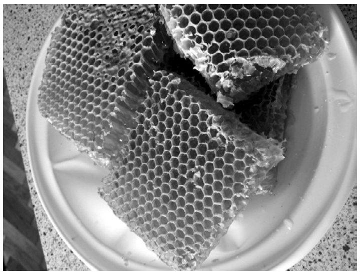
ZAŠTO JE PČELINJE SAĆE OBLIKA PRAVILNOG ŠESTEROKUTA?

Jadranka Delač-Klepac, Zagreb



Slika 1.

To je pitanje koje je profesor Baltazar našao na svojoj ploči kada je ušao u razred. Kako su upravo tih dana u školi učili o pravilnim mnogokutima, učinilo mu se prikladnim zadržati se na toj temi.

Pa, nije baš jednostavno pitanje. Za odgovoriti na nj trebamo malo vremena i znanja iz povijesti.

Čim su čuli da će početi od povijesnih legendi, dvojica nestašnih učenika okrenula su očima. Ipak, Baltazar se pravio da ih ne vidi.

Postoji legenda o tome kako je osnovana Kartaga. O tome u svojoj „Eneidi" piše i rimski pjesnik Vergilije. U vrlo davna vremena (9. st. p. n. e), princeza Didona bila je, s nekolicinom svojih podanika, izgnana iz svoga grada Tira koji se nalazio obali Libanona. Nakon nekoliko dana plovidbe iskrcali su se na obali mora te dobili dopuštenje nastaniti se na obali. Međutim, smjeli su svoje nastambe izgraditi samo na zemlji koju su mogli ograditi bivoljom kožom.

Snalažljiva je Didona izrezala kožu u tanke trakice i načinila uže te tako ogradila površinu u obliku polukruga budući da je komad zemlje koji je priželjkivala bio na samoj obali mora. Iskoristila je obalu kao promjer polukruga i tako ogradila najveću moguću površinu na kojoj je potom nastao grad Kartaga.

Dakle, ako taj problem izrazimo matematičkim jezikom, on bi glasio:

1. **Od svih zatvorenih krivulja u ravnini koje imaju zadani i jednak opseg, treba odrediti onu krivulju koja zatvara najveću površinu**.

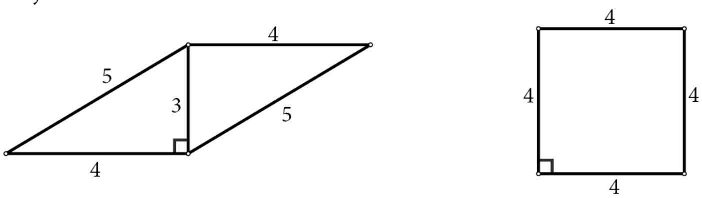
Već su starogrčki matematičari naslućivali da je rješenje toga problema kružnica. Među njima je bio, primjerice, Arhimed, ali je to matematički dokazao tek Bernoulli 1701. godine. Takve probleme određivanja maksimalne površine uz zadani opseg krivulje zovemo **izoperimetrički problem**.

Da to nije tako jednostavan problem, možemo vidjeti promotrivši sljedeća dva pravokutnika:

Neka su duljine stranica prvog pravokutnika 1 cm i 8 cm, dakle opseg mu je **18** cm, a površina mu je **8** cm^2.

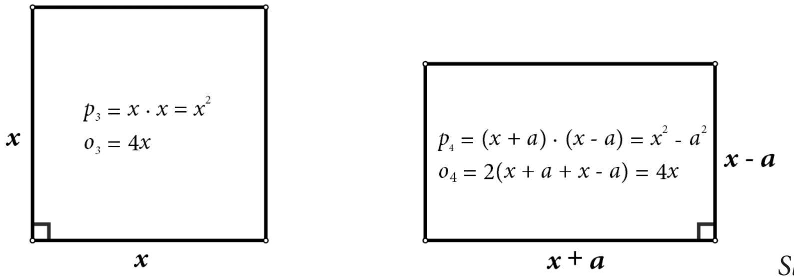
Duljine stranica drugog pravokutnika su 4 cm i 5 cm, dakle ovi pravokutnici imaju isti opseg **18** cm, samo je površina drugog veća i iznosi **20** cm^2.

Proučimo sljedeću sliku:



$p_1 = 4 \cdot 3 = 12$ $p_2 = 4 \cdot 4 = 16$

$o_1 = 2(4+5) = 18$ $o_2 = 4 \cdot 4 = 16$



Slika 2.

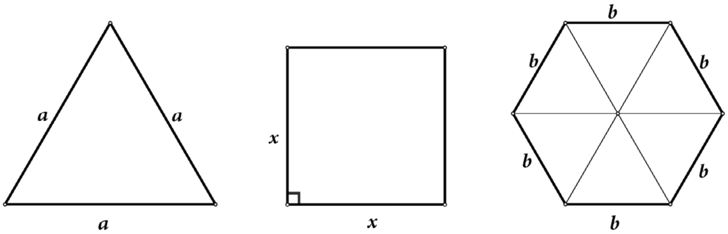
Dakle, prvi paralelogram na ovoj slici ima veći opseg, ali manju površinu od kvadrata.

Iz donja dva pravokutnika (kvadrat i pravokutnik) možemo zaključiti da od svih pravokutnika zadanog opsega ($4x$) kvadrat ima najveću površinu.

Malo smo se približili problemu pčela i oblika saća.

2. Sljedeće pitanje na koje tražimo odgovor je – na koliko načina možemo prekriti ravninu pravilnim mnogokutima, ali tako da između njih nema praznog prostora?

Već intuitivno dolazimo do odgovora koji ćemo kasnije i dokazati. Na tri načina: kvadratima, jednakostraničnim trokutima i pravilnim šesterokutima. Promotrimo ta tri mnogokuta i pretpostavimo da su im opsezi jednaki ($4x$). Kako im se tada odnose površine?



$$3a = 4x \Rightarrow a = \frac{4}{3}x$$

$$p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{16}{9}x^2\sqrt{3}$$

$$p = \frac{4}{9}x^2\sqrt{3} \approx 0.7698\ x^2$$

$$p = x^2$$

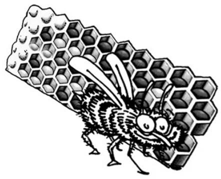
$$6b = 4x \Rightarrow b = \frac{2}{3}x$$

$$p = 6\cdot\frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6}{4}\cdot\frac{4}{9}x^2\sqrt{3}$$

$$p = \frac{2}{3}x^2\sqrt{3} \approx 1.1547\,x^2$$

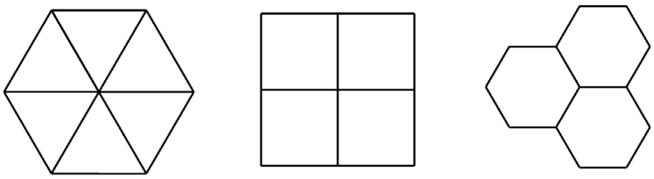
Slika 3.

Očito je da od ova tri mnogokuta istog opsega pravilan šesterokut ima najveću površinu.



Dakle, ako želimo uštedjeti materijal (a to je vosak), najisplativije je načiniti saće u obliku pravilnog šesterokuta. Naravno, pravilni osmerokut istoga opsega ima još veću površinu, baš kao i kružnica, samo što u tim slučajevima ne možemo prekriti ravninu tako da ne ostane praznog prostora između tog „popločivanja”. Pokušajte se u to sami uvjeriti tako da nacrtate kružnice koje se dodiruju i popunjavaju ravninu šestarom.

Dokažimo, dakle, da postoje samo ove tri mogućnosti:



Slika 4.

***Tvrdnja:* Postoje samo tri načina na koje možemo prekriti ravninu pravilnim mnogokutima tako da ne ostane praznog prostora između njih** (i bez da kombiniramo više različitih mnogokuta te radimo različite ornamenta poput Eshera!)

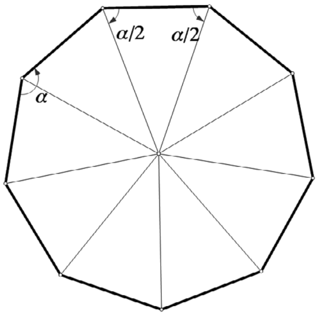
MATKA 105.indd 8 13.9.2018. 18:23:04

Dokaz: Promotrimo mnogokut koji ima n stranica:

Zbroj veličina kutova u mnogokutu možemo izraziti na dva načina koja izjednačimo:

$$n \cdot 180° = 360° + n \cdot \alpha$$

$$\alpha = 180° - \frac{360°}{n} \qquad (1)$$



Slika 5.

Neka je k broj mnogokuta koji se susreću u jednom vrhu (slika 4). Očito je $k \geq 3$. Iz gornjeg izraza (1) možemo zaključiti sljedeće:

Za $n = 3$ je $\alpha = 60°$.
Za $n = 4$ je $\alpha = 90°$.
Za $n = 5$ je $\alpha = 108°$.
Za $n = 6$ je $\alpha = 120°$.

Znači, u jednom vrhu možemo imati 6 trokuta, 4 kvadrata ili 3 šesterokuta, kao na slici 4. Za $n = 5$ vidimo da dobiveni α ne ide cijeli broj puta u 360°, što znači da pravilni peterokuti ne mogu ispuniti ravninu bez praznih dijelova.

Pokažimo još da n mora biti manji od 6 ili jednak 6. Za broj kutova n koji se susreću u jednom vrhu vrijedi:

$$360° = k \cdot \left(180° - \frac{360°}{n}\right)$$

$$1 = k \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right),\ k \geq 3$$

$$1 = k \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) \geq 3 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{n} \Rightarrow n \leq 6$$

U tom intervalu su, dakle, slučajevi koje smo upravo prodiskutirali.

Dakle, maksimalni prostor za pohranu meda osigurava saće čija je baza u ravnini načinjena od pravilnih šesterokuta.

Iz razreda je doletjelo još jedno pitanje:

Da, ok..., ali kako pčele znaju što je maksimalna iskoristivost prostora i minimalna potrošnja materijala? Evolucija? Neka vrsta iskustva?

Međutim, za to pitanje više nije bilo vremena – upravo je zvonilo za kraj sata.

Literatura:

1. „The Mathematical Universe", William Dunham, John Wiley & Sons, 1994.