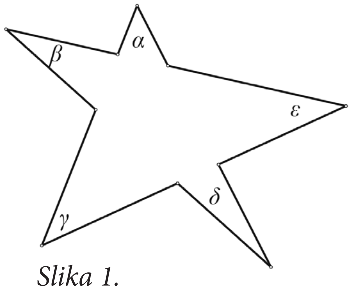
ZVIJEZDA

Alija Muminagić, Frederiksberg i Renata Svedrec, Zagreb



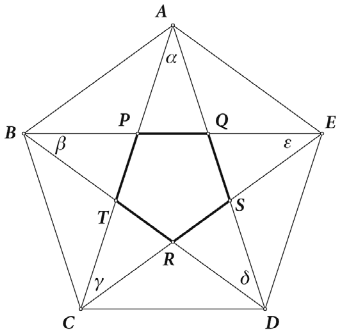
Slika 1.

U Matki broj 103 (ožujak 2018.) objavljena je mozgalica ZVIJEZDA. Trebalo je nacrtati neku zvijezdu, a zatim izmjeriti ili izračunati zbroj kutova krakova zvijezde, tj. $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$. Konačno, trebalo je odgovoriti na pitanje: Što možete zaključiti o **zbroju veličina tih kutova u različitim primjerima ovakve zvijezde?**

Prvi dio zadatka rješiv je mjerenjem i svatko tko se zna služiti kutomjerom uspješno je zaključio da za svaku ovakvu zvijezdu vrijedi $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=180°$. Dokazati da je to uvijek tako moguće je na više različitih načina. U nastavku teksta pokazat ćemo neke od njih.

Za početak, podsjetimo se nekih činjenica:

1. Zatvoreni ravninski lik omeđen dužinama koje su njegove stranice nazivamo mnogokut ili poligon.
2. Pravilni konveksni mnogokut ima sve stranice jednakih duljina i sve unutarnje kutove jednakih veličina.
3. Dijagonale pravilnog peterokuta *ABCDE* (Slika 2.) tvore pentagram, tj. peterokutnu zvijezdu *APBTCRDSEQ* čija je nutrina opet pravilni peterokut *PTRSQ*.
4. Zbroj veličina unutarnjih kutova n-terokuta računamo prema formuli $S_n=(n-2)\cdot 180°$, pa za peterokut (n = 5) dobivamo $S_5=(5-2)\cdot 180°=540°$.



Slika 2.

5. Veličina unutarnjih kutova pravilnog n-terokuta računa se prema formuli $\alpha_n=\dfrac{(n-2)\cdot 180°}{n}$, što znači da za pravilni peterokut dobivamo $\alpha_5=\dfrac{540°}{5}=108°$.

Uz oznake kao na Slici 2. vrijedi: $|\angle PTR|=108°$ pa je $|\angle PTB|=180°-108°=72°$. Budući da je trokut ΔTPB jednakokračan s osnovicom $\overline{TP}$, zaključujemo da je $\beta=180°-2\cdot 72°=36°$. No, zbog $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\varepsilon$ vrijedi da je zbroj veličina unutarnjih kutova u zvijezdi pravilnog peterokuta jednak $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=5\cdot 36°=180°$.

MATKA 105.indd 12 13.9.2018. 18:23:04

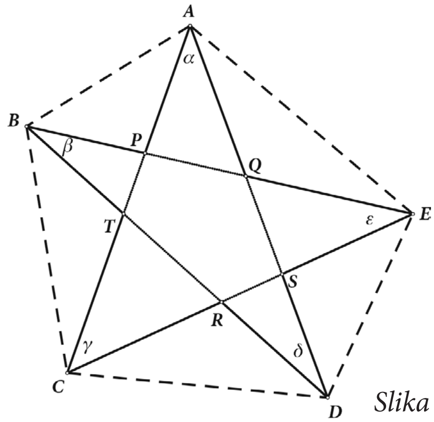
Međutim, zvijezda iz mozgalice nije određena dijagonalama pravilnog peterokuta! Zato dokaz činjenice da je $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=180°$ treba provesti na neki drugi način. Napravit ćemo to na više različitih načina!

Dokaz 1. Uz oznake kao na Slici 3. u trokutu ΔACS vrijedi $\alpha+\gamma+|\angle CSA|=180°$ pa je $|\angle CSA|=180°-(\alpha+\gamma)$. Nadalje, zbog poučka o vanjskom kutu trokuta, vrijedi

$$|\angle RSD|=180°-|\angle CSA|=180°-\left[180°-(\alpha+\gamma)\right]=\alpha+\gamma$$

Analognim zaključivanjem za vanjske kutove trokuta ΔBER zaključujemo da je $|\angle ERD|=|\angle SRD|=\beta+\varepsilon$.

Konačno, u trokutu ΔRDS vrijedi $|\angle RDS|+|\angle SRD|+\delta=180°$, tj. $\beta+\varepsilon+\alpha+\gamma+\delta=180°$, što smo i trebali dokazati.



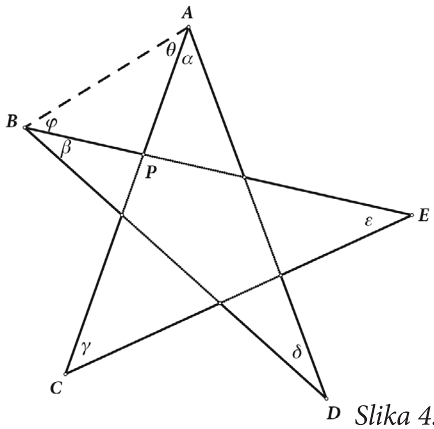
Slika 3.

Dokaz 2. Spojimo točke *A* i *B*, kao na Slici 4. Označimo veličine dobivenih kutova $|\angle ABP|=\varphi$ i $|\angle BAP|=\theta$.

U trokutu ΔCEP vrijedi $|\angle EPC|=180°-(\varepsilon+\gamma)$, a u trokutu ΔABP vrijedi $|\angle APB|=180°-(\varphi+\theta)$. Budući da vrijedi $|\angle EPC|=|\angle APB|$ (to su vršni kutovi), zaključujemo da je $\varepsilon+\gamma=\varphi+\theta$.

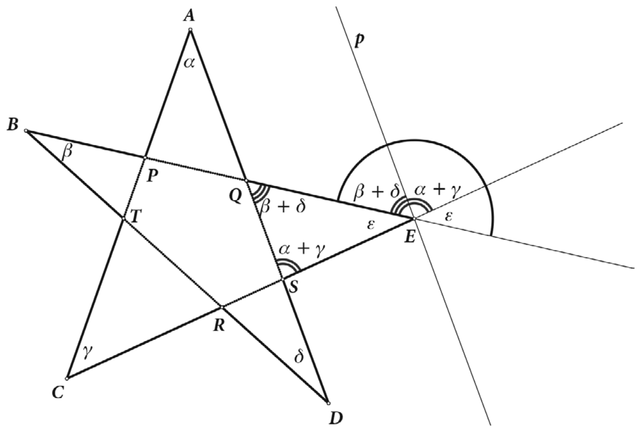
Konačno, zbroj veličina unutarnjih kutova u trokutu ΔABD jednak je

$$|\angle ABD|+|\angle BDA|+|\angle DAB|=$$
$$=\varphi+\beta+\delta+\alpha+\theta=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=180°.$$



Slika 4.

Dokaz 3. Na Slici 5. točkom *E* nacrtan je pravac *p*, *p* || *AD*. Uz oznake kao na slici (i argumente slične onima u prethodnim dokazima – promatraju se vanjski



Slika 5.

MATKA 105.indd 13 13.9.2018. 18:23:05

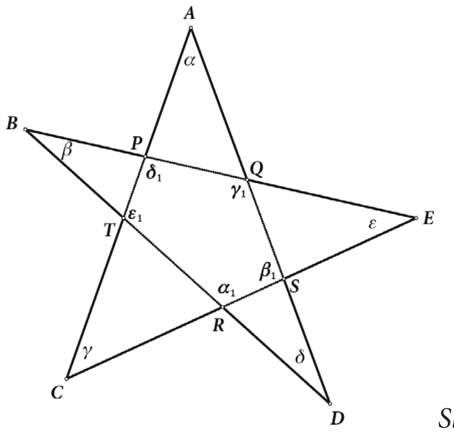
kutovi trokuta ΔACS i ΔBDQ te kutovi uz presječnicu) dobivamo da je $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=180°$.

Dokaz 4. Zbroj veličina unutarnjih kutova peterokuta *PTRSQ* iznosi 540°. Uočimo li na Slici 6. trokut ΔEBR, zaključujemo da za veličine njegovih unutarnjih kutova (ε, β i α_1) vrijedi $\varepsilon+\beta=180°-\alpha_1$. Slično, za trokut ΔDAT vrijedi $\alpha+\delta=180°-\varepsilon_1$, za trokut ΔCEP vrijedi $\gamma+\varepsilon=180°-\delta_1$, za trokut ΔBDQ vrijedi $\beta+\delta=180°-\gamma_1$ i za trokut ΔACS vrijedi $\alpha+\gamma=180°-\beta_1$.

Zbrajanjem ovih pet izraza dobivamo

$$2(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)=5\cdot 180°-(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\delta_1+\varepsilon_1)=900°-540°=360°$$

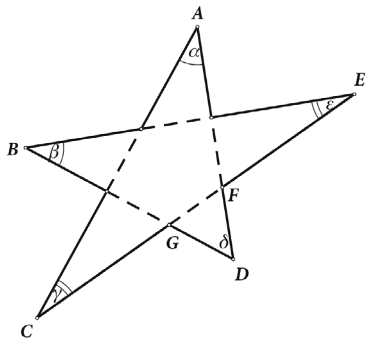
pa je konačno $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=360°:2=180°$.



Slika 6.

Za kraj, riješimo još dva „zvjezdana" primjera.

Primjer 1. U zvijezdi *ABCDE* (Slika 7.) vrijedi $\alpha=\beta$, $\gamma=\varepsilon$ i $|AC|=|BE|$. Dokažimo da je $|AD|=|BD|$.



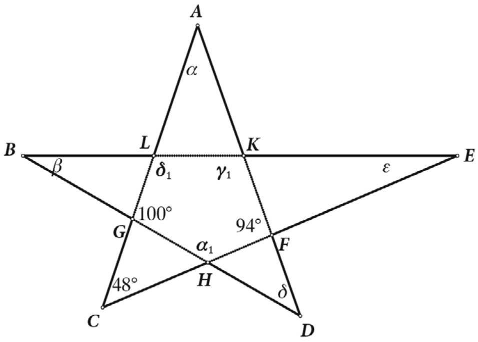
Slika 7.

Dokaz. Na slici uočimo trokute ΔBEG i ΔACF. Prema uvjetima zadatka je $\alpha=\beta$, $\gamma=\varepsilon$ i $|AC|=|BE|$, što znači da su trokuti ΔBEG i ΔACF sukladni.

MATKA 105.indd 14 13.9.2018. 18:23:05

Zbog toga vrijedi $|\angle BGE| = |\angle AFC|$ i $|BG| = |AF|$. Nadalje zaključujemo da je $|\angle DGF| = |\angle DFG|$, što znači da je ΔGDF jednakokračan s osnovicom $\overline{GF}$. Dakle, vrijedi $|GD| = |FD|$. Zbrajanjem izraza $|BG| = |AF|$ i $|GD| = |FD|$ dobivamo $|BG| + |GD| = |AF| + |FD|$, odnosno $|BD| = |AD|$, što je i trebalo dokazati.

Primjer 2. U zvijezdi *ABCDE* (Slika 8.) vrijedi $|\angle ACE| = 48°$, $|\angle CFA| = 94°$ i $|\angle AGD| = 100°$. Kolika je veličina kuta $\angle ADB$?



Slika 8.

Rješenje 1. Uz oznake kao na Slici 8., u trokutu ΔACF je $\alpha + 48° + 94° = 180°$, tj. $\alpha = 38°$. Tada iz ΔADG nalazimo da je $\delta + 38° + 100° = 180°$, odnosno $\delta = 42°$.

Rješenje 2. Uz oznake kao na Slici 8. je $|\angle CGH| = 180° - 100° = 80°$, pa u trokutu ΔCGH vrijedi $48° + 80° + |\angle CHG| = 180°$, tj. $|\angle CHG| = 52°$. Dalje vrijedi $|\angle DHF| = 52°$ i $|\angle HFD| = 180° - 94° = 86°$, pa iz ΔDHF nalazimo da je $\delta + 52° + 86° = 180°$, odnosno $\delta = 42°$.

Rješenje 3. (može i komplicirano!) Uz oznake kao na Slici 8., u trokutu ΔBLG vrijedi $\beta + |\angle BGL| + |\angle BGL| = 180°$, tj. $\beta + (180° - 100°) + (180° - \delta_1) = 180°$. Odavde se dobiva da je $\delta_1 = \beta + 80°$.

Nadalje, u trokutu *FEK* vrijedi $\varepsilon + |\angle EKF| + |\angle EFK| = 180°$, tj. $\beta + \varepsilon + 128° = 180°$. Odavde se dobiva da je $\gamma_1 = \varepsilon + 86°$. Tada je $\delta_1 + \gamma_1 = \beta + \varepsilon + 80° + 86°$, tj. $\delta_1 + \gamma_1 = \beta + \varepsilon + 166°$. U trokutu ΔCHG vrijedi $|\angle CHG| = 180° - (80° + 48°) = 52°$, pa je $\alpha_1 = 180° - 52° = 128°$.

U trokutu ΔEBH vrijedi $\beta + \varepsilon + 128° = 180°$, tj. $\beta + \varepsilon = 180° - 128° = 52°$, što znači da je $\delta_1 + \gamma_1 = \beta + \varepsilon + 166° = 52° + 166° = 218°$.
(Do istog zaključka moguće je doći korištenjem činjenice da je zbroj veličina unutarnjih kutova peterokuta *KLGHF* jednak 540°, pa je $\delta_1 + \gamma_1 = 540° - (100° + 128° + 94°) = 540° - 322° = 218°$).
Budući da zbroj veličina unutarnjih kutova četverokuta *DKLG* iznosi 360°, tj. da vrijedi $\delta + \gamma_1 + \delta_1 + 100° = 360°$, zaključujemo da je $\delta = 360° - (\gamma_1 + \delta_1 + 100°) = 360° - (218° + 100°) = 42°$.

MATKA 105.indd 15 13.9.2018. 18:23:06