MALI UVOD U FRAKTALE

Franka Miriam Brückler, Zagreb

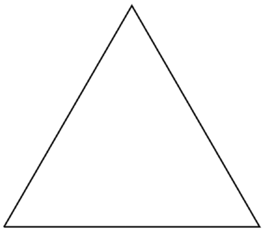
Možda si čuo za izraz *fraktal*? Među matematičkim „stvarima” otkrivenim u zadnjih stotinjak godina to je jedan od najšire poznatih. Većina matematike za koju je prosječni čovjek čuo stara je puno stoljeća, pa i tisućljeća.

Fraktali su geometrijski uzorci koji imaju svojstvo *samosličnosti*. To znači da kad ih gledamo pod raznim uvećanjima podjednako izgledaju. U prirodi se pojavljuju približno, tj. samo određeni broj puta možemo uvećati sliku tako da i dalje sliči na čitavu, dok pravi matematički fraktal možemo beskonačno puta uvećavati.

U prirodi? Da, u prirodi. Ako na dobroj, oštroj fotografiji iz zraka pogledaš obalu, pa sliku uvećaš, rubovi obale na obje će slike biti jako slični. No, fraktale možeš naći i na tržnici. Najpoznatiji primjeri su brokula romanesco i cvjetača, kod kojih pojedina „ružica” jako sliči na čitavu glavicu, a tako će biti i ako nekoliko puta uvećaš detalje:[1]

Želiš li nacrtati svoj prvi fraktal? Evo dvije različite ideje.

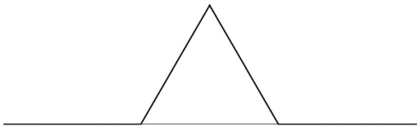
Prva ideja nosi ime Kochova pahuljica. Kreni od jednakostaničnog trokuta.



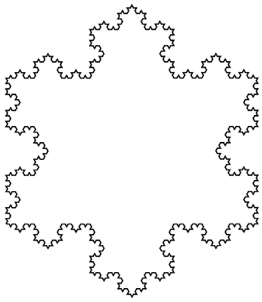
Svaku stranicu podijeli na tri jednaka dijela i nad srednjima nacrtaj jednakostranični trokut.

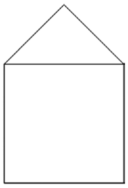
[1]Slika je ©FMB2016

Na sljedećoj slici to je ilustrirano za jednu stranicu:



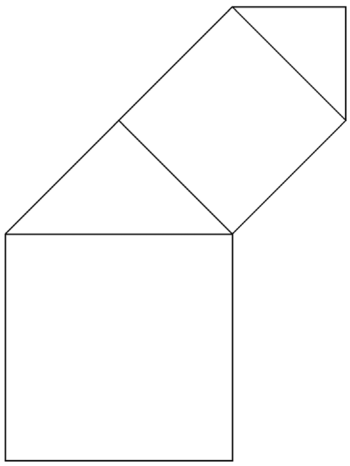
Sad svaki dio ruba (svaka stara stranica sad ima 4 dijela) opet podijeli na 3 jednaka dijela i nad svakim srednjim dijelom opet nacrtaj jednakostranični trokut. Nastavi dok još možeš dijeliti crte na trećine. Rezultat bi trebao izgledati poput ove slikice:





Druga ideja je Pitagorino stablo. Za njega krećeš od kvadrata kojemu je nad jednom stranicom nacrtan pravokutni trokut – to je „deblo" toga stabla. Ako želiš simetrično Pitagorino stablo, neka taj trokut ima dva kuta od po 45° (i naravno, jedan od 90°), no možeš uzeti i pravokutni trokut s drugim kutovima.

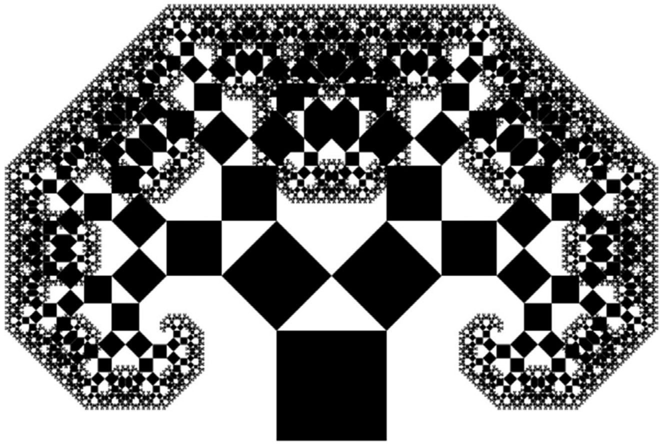
Ovdje se pojedini koraci crtanja fraktala sastoje u tome da nad katetama[2] uvijek crtaš kvadrate, a onda po jedan pravokutni trokut nad svakom u odnosu na prethodni trokut nasuprotnom stranicom. Evo kako bi gornja slikica izgledala nakon sljedećeg koraka udesno, a ti nastavi – i ulijevo i udesno!



Za pravo Pitagorino stablo svi pravokutni trokuti moraju biti slični, tj. imati iste kutove, no možeš eksperimentirati i crtati i pravokutne trokute s

[2]U pravokutnom trokutu stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete.

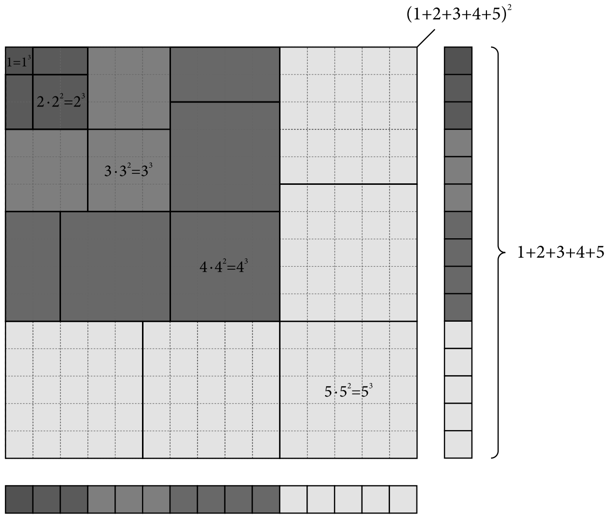
različitim kutovima. U našem simetričnom slučaju, nakon jako puno koraka dobije se fraktal kao na slici:[3]



Neki drugi poznati fraktali koje možeš potražiti na internetu su Hilbertova krivulja (engl. *Hilbert curve*), Apolonijeva mreža (engl. *Apollonian gasket*), Mengerova spužva (engl. *Menger sponge*) i trokut Sierpinskog (engl. *Sierpinski triangle*).

Kao zadatak za sljedeći broj, uzmi traku papira. Prvi korak tvog fraktala je da presaviješ tu traku napola. Drugi korak je da sad dvoslojnu traku opet presaviješ popola. Tako nastavljaš dok možeš. No, ima „kvaka": uvijek savijaj u istom smjeru, recimo lijevi kraj na desni. Kad više ne možeš savijati (vjerojatno ćeš moći izvesti 4 ili možda 5 koraka – što je dulja traka i tanji papir, to više), razmotaj traku i polegni na stol tako da na svim prebima imaš pravi kut. Rub trake bit će tzv. zmajolika krivulja (prava zmajolika krivulja je, kao i svaki pravi fraktal, zapravo ono što bi dobio ako savijanje nastaviš unedogled). U sljedećem broju dat ćemo ilustracije za sve one kojima ova uputa nije dovoljna!

Na kraju, evo rješenja zadatka iz prošlog nastavka. Trebalo je smisliti ilustraciju iz koje se vidi da je kvadrat zbroja uzastopnih brojeva, npr. $(1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2$, isto što ih zbroj kubova $(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3)$ tih brojeva, gdje *broj*^{2} znači isto što i *broj* puta *broj*, a *broj*^{3} znači isto što i *broj* puta *broj* puta *broj* (6^2 je 6 puta 6, 6^3 je 6 puta 6 puta 6). Evo takve ilustracije (slika desno).



[3]Slika je preuzeta sa stranice https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pythagoras_tree_1_1_13.svg, licenca CC BY-SA 3.0. Autor slike je Guillaume Jacquenot Gjacquenot.