



Petar Mladinić, Zagreb

BILIJAR I RJEŠAVANJE PROBLEMA

Današnji razvoj računala i računalnog softvera omogućuje nam jednostavnu uporabu ideja i metoda starih matemagičara. U ovom ćemo tekstu razmotriti i ilustrirati kako danas lako i uspješno možemo uporabiti ideju bilijara pri rješavanju problema pretakanja.

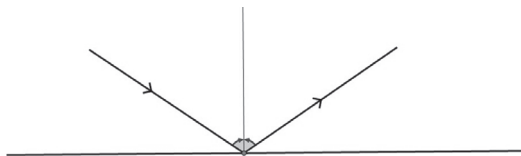
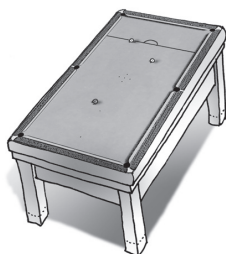
Računalni softver omogućuje nam brzo i lako crtanje ukošenog bilijara (kosog koordinatnog sustava).

1. Ideja bilijara

Bilijar se, tako kažu povjesničari, pojavio u Indiji i Kini. Pisani dokumenti iz 6. stoljeća njegovo pojavljivanje u Europi prvi put spominju u Engleskoj.

Bilijar se igra na pravokutnom stolu omeđenom ogradom (mantinelom), s određenim brojem kugli i sa 6 rupa ili bez njih.

Glavno svojstvo bilijara je da se kugla odbija od ruba polja (mantinele) pod istim kutom pod kojim se gibala prije toga, tj. kut odbijanja kugle od mantinele jednak je upadnom/dolaznom kutu na mantinelu. Matematičari bi rekli da se radi o refleksiji/zrcaljenju na pravcu.



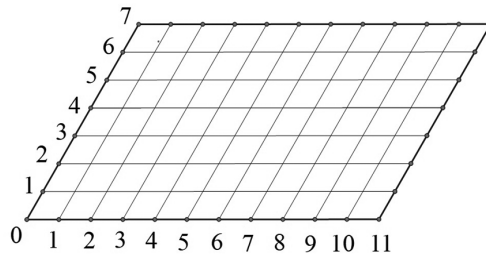
2. Primjena metode

Riješimo nekoliko primjera kao ilustraciju mladim matemagičarima kako mogu uporabiti ovu ideju pri rješavanju problema s pretakanjem tekućine.

Primjer. *Imamo dvije manje i prazne posude od 7 i 11 litara, te jednu veliku napunjenu vodom. Možemo li pomoću praznih posuda izmjeriti točno 2 litre vode? Ako možemo, kako to učiniti?*

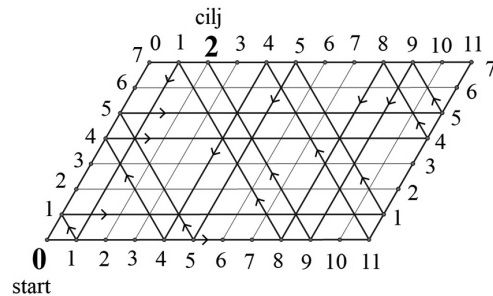
Rješenje. Ovaj ćemo problem riješiti pomoću bilijara čija je ploča paralelogram s kutom od 60° između stranica. Neka su duljine stranica jednake 11 cm i 7 cm. Nacrtajmo mrežu.





Kako sad uporabiti ovakav bilijar?

Zamislimo da imamo kuglu u lijevom donjem kutu bilijara, tj. u točki 0 (start). Kugla se „udara” tako da se giba uz donji rub bilijara. U točki 11 kugla udara u desnu mantinelu i odbija se prema točki 4 na gornjoj mantineli, i tako sve dok kugla ne dođe u točku 2 (cilj) na gornjoj mantineli (Slika desno).



Ako označimo točke odbijanja kugle s dva broja, od kojih prvi broj označava količinu vode u 11-litarskoj posudi, a drugi broj u 7-litarskoj, dobit ćemo:
 $(0,0) \rightarrow (11,0) \rightarrow (4,7) \rightarrow (4,0) \rightarrow (0,4) \rightarrow (11,4) \rightarrow (8,7) \rightarrow (8,0) \rightarrow (1,7) \rightarrow (1,0) \rightarrow (0,1) \rightarrow (11,1) \rightarrow (5,7) \rightarrow (5,0) \rightarrow (0,5) \rightarrow (11,5) \rightarrow (9,7) \rightarrow (9,0) \rightarrow (2,7)$.

Lako se vidi kad se voda pretjače između manjih posuda, a kad u veliku ili iz velike!

Na ovaj smo način riješili postavljeni problem. No, je li ovo rješenje najkraće, tj. je li ovo rješenje s najmanjim brojem pretakanja? Jesmo li pretakanje mogli početi tako da smo najprije napunili 7-litarsku posudu, tj. da smo kuglu kotrljali duž lijeve mantinele? Proverite da bismo ovim načinom došli do rješenja s 14 pretakanja, što znači da naše prvo rješenje nije najkraće!

Uporabom ove metode možemo lako riješiti svaki problem pretakanja s tri posude.

Riješite za vježbu zadatak koji je u 16. stoljeću razmatrao matematičar **Nicola Fontana Tartaglia** (1499. – 1557.).

Zadatak 1. Pomoću posuda od 3 i 5 litara podijelite vodu iz pune 8-litarske posude na dva jednaka dijela.

Evo još tri zadatka za rješavanje.

Zadatak 2. Imate tri posude od 15, 16 i 31 litre. Mogu li se pomoću njih izmjeriti sve cjelobrojne količine vode od 1 do 16 litara?

Zadatak 3. Mogu li se pomoću posuda od: a) 3, 6 i 9 litara, b) 4, 12 i 16 litara izmjeriti količine od 5 ili 7 litara tekućine?

Zadatak 4. Kako pomoću posuda od 7, 9 i 12 litara izmjeriti sve cjelobrojne količine od 1 litre do 9 litara?

