VIŠE RJEŠENJA JEDNOG ZADATKA IZ GEOMETRIJE

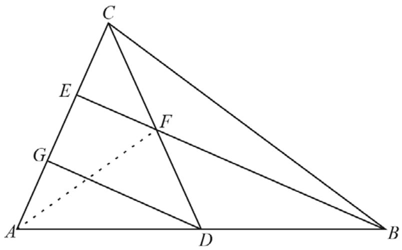
Šefket Arslanagić, Sarajevo

Nastava geometrije u osnovnoj školi od iznimne je važnosti. Naravno, usvajanje toga znanja mora biti sustavno; prvo treba usvojiti osnovne pojmove i važne aksiome, a zatim određeni broj poučaka koji se odnose na trokute, četverokute, krug, itd. U ovome članku dat ćemo više različitih rješenja jednoga zanimljivog zadatka o trokutu. Istaknuo bih ovdje misao jednog velikog matematičara da je *vrednije riješiti jedan zadatak na dva ili više načina nego desetine zadataka na jedan te isti način*.

Dakle, riječ je o sljedećem zadatku:

Neka je točka D polovište stranice $\overline{AB}$ trokuta ΔABC, a točka E nalazi se na stranici $\overline{AC}$ ovoga trokuta tako da vrijedi $|AE| = 2|EC|$. Dokažimo da pravac BE raspolavlja težišnicu $\overline{CD}$ trokuta ΔABC.

Dokaz 1. Neka je točka G polovište dužine $\overline{AE}$. Tada je očito $|AG| = |GE| = |EC|$ i $DG \parallel BE$ (jer je dužina $\overline{DG}$ srednjica trokuta ΔABE), (Slika 1.). Neka je točka F presjek dužina $\overline{BE}$ i $\overline{CD}$. U trokutu ΔGDC sada je $DG \parallel FE$ i $|GE| = |EC|$, odakle slijedi da je $|DF| = |FC|$. Dakle, točka F je polovište dužine $\overline{CD}$, a to je trebalo dokazati.



Slika 1.

Dokaz 2. Neka je $u = p_{\Delta ADF} = p_{\Delta BDF}$, $v = p_{\Delta AFE}$, $w = p_{\Delta CFE}$ i $z = p_{\Delta BFC}$ (Slika 1.). Tada je:

$$2u + v = 2(w + z)$$

odakle zbog $v = 2w$ slijedi da je:

$$2u = 2z \text{, tj.}$$

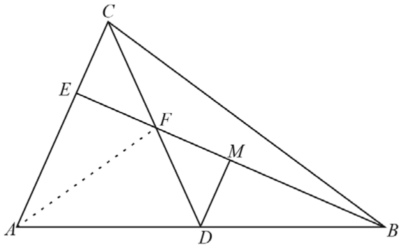
$$u = z$$

ili

$$p_{\Delta BDF} = p_{\Delta BFC} .$$

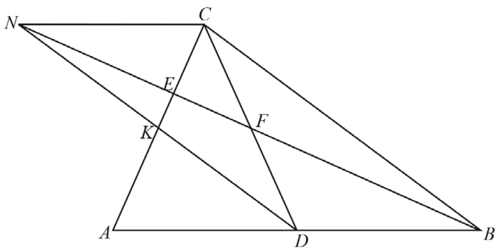
Budući da ova dva trokuta imaju zajedničku visinu iz vrha B na pravac CD, slijedi da su im osnovice $\overline{CF}$ i $\overline{DF}$ jednake, što znači da je točka F polovište težišnice $\overline{CD}$, što je trebalo dokazati.

Dokaz 3. Neka je točka M polovište dužine $\overline{BE}$.
Tada je $|DM| = \frac{1}{2}|AE| = |EC|$ i $DM \parallel AC$ (Slika 2.).



Slika 2.

Neka je točka F presjek dužina $\overline{BE}$ i $\overline{CD}$. Budući da je sada $|\angle CEF| = |\angle DMF|$ i $|\angle ECF| = |\angle FDM|$ kao i $|DM| = |EC|$, slijedi da su trokuti ΔCEF i ΔDMF sukladni. Odavde slijedi da je $|CF| = |FD|$, što je trebalo dokazati.

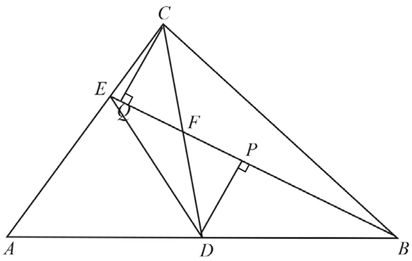


Slika 3.

Dokaz 4. Neka je točka K polovište stranice $\overline{AC}$ trokuta ΔABC; tada je $|BC| = 2|DK|$ i $BC \parallel DK$ (Slika 3.).

Neka se pravci BE i DK sijeku u točki N. Trokuti ΔEBC i ΔENK su slični te vrijedi da je $|EC| = 2|EK|$, odakle slijedi da je $|BC| = 2|KN|$ te $|DN| = |BC|$. To znači da je četverokut $DBCN$ paralelogram čije se dijagonale $\overline{BN}$ i $\overline{CD}$ sijeku u točki F (koja je zajedničko polovište obiju dijagonala), što je trebalo dokazati.

Dokaz 5. Očigledno vrijede sljedeće jednakosti: $p_{\Delta BDE} = p_{\Delta ADE} = \frac{1}{2} p_{\Delta ABE} = p_{\Delta BEC}$.



Slika 4.

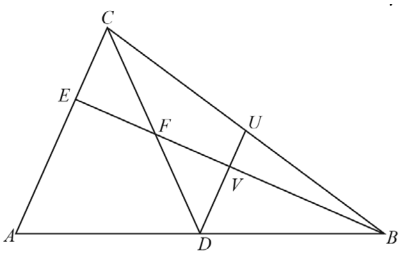
Neka je točka F presjek dužina $\overline{BE}$ i $\overline{CD}$. Neka su točke P i Q redom nožišta okomica iz točaka D i C na pravac BE (Slika 4.). Budući da je $p_{\Delta BDE} = p_{\Delta BEC}$, s tim što ova dva trokuta imaju zajedničku osnovicu $\overline{BE}$, to slijedi da su i visine tih trokuta $\overline{DP}$ i $\overline{CQ}$ sukladne, tj. vrijedi $|DP| = |CQ|$. Budući da su trokuti ΔDPF i ΔCQF slični pravokutni trokuti za koje vrijedi $|DP| = |CQ|$, to su ti trokuti također i sukladni pa je $|DF| = |CF|$, što je trebalo dokazati.

Dokaz 6. U prethodnom smo dokazu koristili činjenicu da je $p_{\Delta BDE} = p_{\Delta BEC}$. Sada imamo (Slika 4.): $|DF|:|CF| = p_{\Delta DEF} : p_{\Delta CEF} = p_{\Delta BDF} : p_{\Delta CBF} =$

$$= \left(p_{\Delta DEF} + p_{\Delta DBF} \right) : \left(p_{CEF} + p_{\Delta CBF} \right) = p_{\Delta BDE} : p_{\Delta BEC} = 1:1,$$

a odavde slijedi da je $|DF| = |CF|$, što je trebalo dokazati.

Rješenje 7. Neka točka U pripada stranici $\overline{BC}$ trokuta ΔABC tako da je $DU \parallel AC$ (Slika 5.).



Slika 5.

Neka se pravci DU i BE sijeku u točki V. Tada je $2|EC| = |AE| = 2|DV|$ (jer je dužina $\overline{DV}$ srednjica trokuta ΔABE) pa je odavde $|DV| = |EC|$. Sada je $|\angle VDF| = |\angle ECF|$ i $|\angle DFV| = |\angle CFE|$ pa su trokuti ΔDVF i ΔCEF sukladni. Odavde slijedi da je $|DF| = |CF|$, što je trebalo dokazati.

Kako vidimo, u ovih sedam raznih rješenja koristili smo se mnogim značajnim činjenicama u vezi trokuta, kao što su teorem o srednjici trokuta, podudarnost i sličnost trokuta te činjenica da dva trokuta jednakih površina i osnovica imaju i jednake visine. U jednom smo dokazu koristili činjenicu da se dijagonale paralelograma polove. Izloženo je obilje raznih ideja koje mogu biti od velike koristi učenicima osnovne škole koji pokazuju veći interes za matematiku.

Literatura:

1. Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
2. Arslanagić, Š., *Zbirka riješenih zadataka sa takmičenja iz matematike učenika osnovnih škola u Federaciji Bosne i Hercegovine (1996. – 2008.)*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.
3. Marić, A., *Planimetrija – Zbirka riješenih zadataka*, Element, Zagreb, 1996.
4. Pavković, B., Veljan, D., *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.