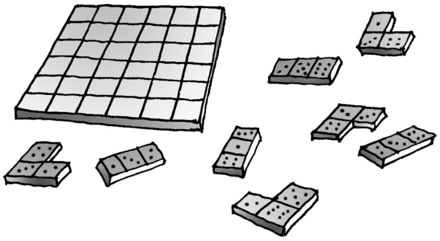
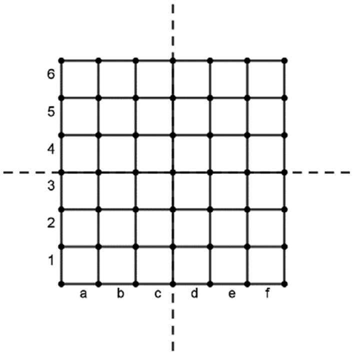
TROMINO PLOČICE I 6 × 6 PLOČA – PRVA IGRA

Maja Starčević, Zagreb

Petar i Eva u *Geogebri* su izradili tromino pločice dviju vrsta (Slika 1.) i ploču 6 × 6 (Slika 2.).

Slika 1.





Slika 2.

– Sada predlažem da riješimo tri zadatka s jednom vrstom pločica i nakon toga iste zadatke s drugom vrstom pločica – kaže Petar. – Podsjećam te na pravila igre. Svaka pločica pokriva točno tri polja ploče i pločice se ne preklapaju. Ploču gledamo samo iz jednog smjera. U zadatcima ćemo koristiti i dvije osi simetrije koje prolaze kroz polovišta nasuprotnih stranica ploče. Dakle, imamo vodoravnu i okomitu os (Slika 2.). Nađimo odgovore na sljedeća pitanja:

1. Na koliko načina možemo postaviti jednu pločicu na ploču?
2. Na koliko načina možemo popločiti čitavu ploču tako da popločivanje bude simetrično s obzirom na vodoravnu i okomitu os simetrije?
3. Na koliko načina možemo popločiti čitavu ploču tako da popločivanje bude simetrično s obzirom na okomitu os simetrije?

Eva predloži:

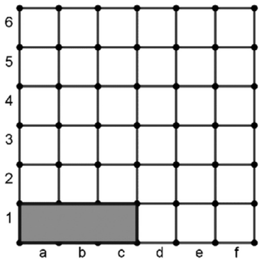
– Prvo ćemo riješiti zadatke s tromino pločicama koje su oblika pravokutnika.

Petar objasni rješenje prvog zadatka:

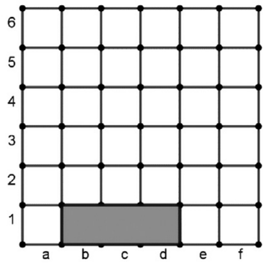
– Prvi smo zadatak rješavali i s domino pločicama i 4 × 4 pločom. Možemo ga riješiti na sličan način. Pločicu u jedan odabrani redak možemo staviti na

MATKA 106.indd 80 27.11.2018. 6:37:52

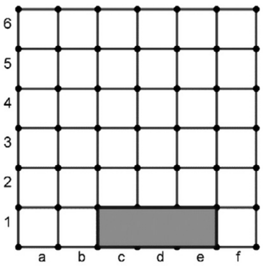
4 načina Slike 3. – 6. Redaka je 6 pa vodoravno možemo postaviti pločicu na $6 \cdot 4 = 24$ načina. Na isto toliko načina možemo ju postaviti i okomito. Dakle, ukupno je 48 načina da postavimo jednu pločicu na ploču.



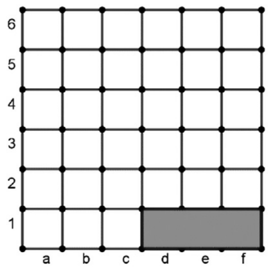
Slika 3.



Slika 4.



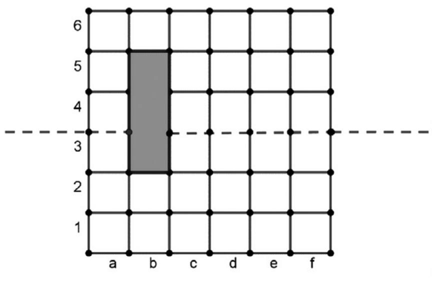
Slika 5.



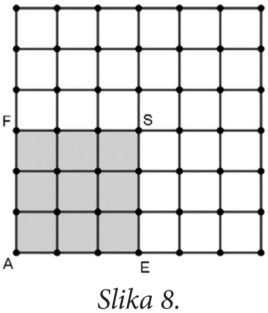
Slika 6.

Eva je imala ideju za rješenje drugog zadatka:

– Već smo rješavali slične zadatke. Bitno je vidjeti može li se uz zadani uvjet postavljena pločica nalaziti s obje strane neke od osi simetrija. U tom slučaju pločica treba biti simetrična s obzirom na tu os. Međutim, to nije moguće jer tada s jedne strane osi imamo kvadrat 1×1, a s druge pravokutnik 1×2 (Slika 7.).



Slika 7.

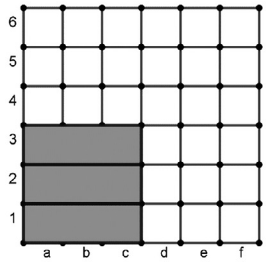


Slika 8.

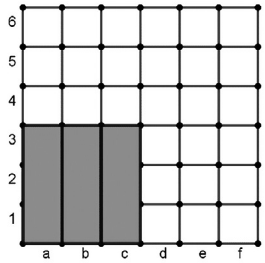
Dakle, sve se pločice u potpunosti nalaze samo s jedne strane svake osi simetrije – nastavi Eva. – Dovoljno je onda popločiti donji lijevi kvadrat *AESF* dimenzija 3×3 (Slika 8.) i zrcaliti pločice s obzirom na osi simetrije. Kao što

MATKA 106.indd 81 27.11.2018. 6:42:31

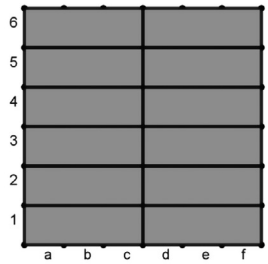
smo zaključili, sve pločice kojima prekrivamo kvadrat *AESF* moraju u potpunosti pripadati tome kvadratu. Znači, za prekrivanje toga kvadrata potrebne su nam točno 3 pločice. Ako polje *a*1 popločimo vodoravnom pločicom, onda očito moramo i ostale dvije pločice postaviti vodoravno (Slika 9.). Slično zaključujemo i ako *a*1 popločimo okomitom pločicom (Slika 10.). I ostale dvije pločice postavljamo okomito. Dakle, samo su dva takva popločivanja (Slika 11. i 12.).



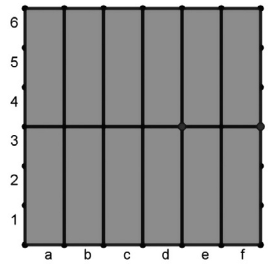
Slika 9.



Slika 10.



Slika 11.

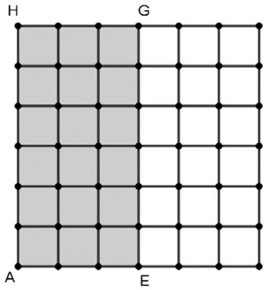


Slika 12.

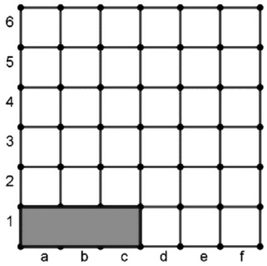
Petar je započeo rješavati treći zadatak:

– Iz istog razloga kao i u prošlom zadatku nijedna se pločica ne smije nalaziti s obje strane okomite osi simetrije. Dakle, moramo naći broj načina na koje možemo popločiti pravokutnik *AEGH* dimenzija 3 × 6 (Slika 13.) tako da mu pločice u potpunosti pripadaju. Imam ideju da riješimo zadatak pomoću rekurzivne relacije. Označit ćemo s B_n broj načina na koji možemo popločiti pravokutnik 3 × *n*. Pritom je *n* proizvoljan prirodni broj. Dakle, broj načina na koje možemo popločiti pravokutnik *AEGH* jednak je B_6. Polje *a*1 možemo popločiti vodoravnom ili okomitom pločicom. U prvom nam slučaju ostaje pravokutnik 3 × 5 za popločiti (Slika 14.), a u drugom slučaju moramo nužno staviti još dvije okomite pločice pa nam za popločiti ostaje kvadrat 3 × 3 (Slika 15.). Dakle, vrijedi $B_6 = B_5 + B_3$.

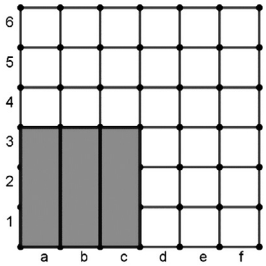
MATKA 106.indd 82 27.11.2018. 6:37:52



Slika 13.



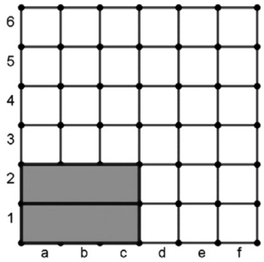
Slika 14.



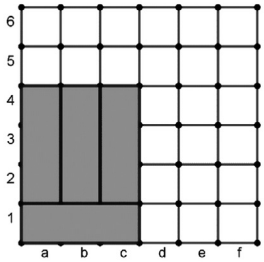
Slika 15.

Eva nastavi:

– U prošlome zadatku vidjeli smo da je $B_3 = 2$. Treba naći još B_5. Zaključujem na potpuno analogan način da polje *a*2 možemo popločiti vodoravnom pločicom (Slika 16.), pri čemu nam preostaje za popločiti pravokutnik 3×4, ili polje *a*2 možemo popločiti okomitom pločicom (Slika 17.), nakon čega moraju opet ići još dvije okomite pločice i ostaje nam za popločiti pravokutnik 3×2. Analogno zaključujemo da je $B_5 = B_4 + B_2$, a iz istih razloga je i $B_4 = B_3 + B_1$.



Slika 16.



Slika 17.

Sasvim je lako vidjeti da je $B_2 = B_1 = 1$. Sad imamo

$$B_6 = B_5 + B_3 = B_4 + B_2 + B_3 = B_3 + B_1 + B_2 + B_3 = 2 + 1 + 1 + 2 = 6.$$

Dakle, traženih popločivanja ukupno je 6.

MATKA 106.indd 83 27.11.2018. 6:37:53