Matka 27 (2018./2019.) br. 106

WENDELOV TEOREM

David Mikulčić, XV. gimnazija, Zagreb

Dan je sljedeći jednostavan zadatak:

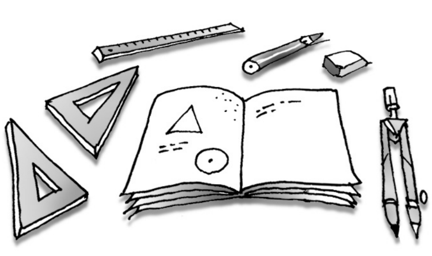
Na kružnici je nasumično odabrano N točaka. Koliko iznosi vjerojatnos p_N da postoji polukružnica sa svim odabranim točkama?

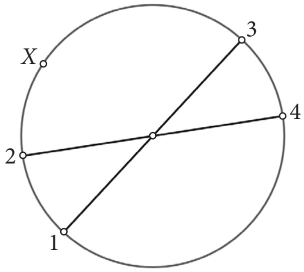
Zadatak 1. Nacrtajte kružnicu te nasumično odaberite jednu točku. Koliko postoji polukružnica takvih da sadrže odabranu točku?

Zadatak 2. Na kružnici odaberite dvije točke. Postoji li polukružnica koja sadrži te dvije točke?

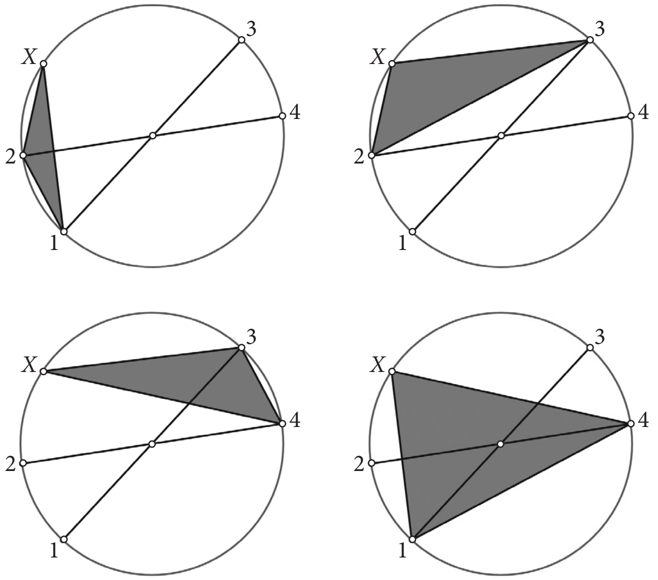
Zadatak 3. Postoji li uvijek polukružnica koja sadrži tri nasumično odabrane točke?

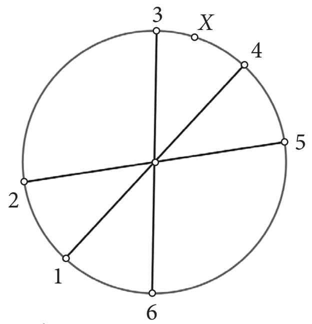
Rješenje zadatka 3: Za neke će odabrane točke postojati polukružnica, a za neke ne. Odredimo vjerojatnost da za odabrane točke postoji polukružnica koja ih sve sadrži. Umjesto da odaberemo tri nasumične točke, odabrat ćemo dva nasumična promjera i jednu nasumičnu točku, nazovimo je točkom X. Kada odaberemo promjer, postoje dvije mogućnosti gdje će se točka nalaziti. Promatrat ćemo oba slučaja kao jednako vjerojatna. Numeriramo krajeve promjera u negativnom smjeru (u smjeru kazaljke na satu) od 1 do 4 tako da se točka X nalazi na luku između točaka označenih brojem 2 i 3. Točke 1 i 3 nasuprotne su na jednom promjeru, kao i 2 i 4 na drugom promjeru.





Primijetimo kako za odabir svake od dviju točaka postoje dvije mogućnosti, stoga je ukupan broj slučaja 4. Prva je točka na poziciji numeriranoj brojem 1 ili 3, dok je druga na poziciji numeriranoj brojevima 2 ili 4. Nije teško vidjeti kako će u jednom od ta četiri slučaja trokut koji tvore odabrane tri točke biti šiljastokutan, a u tom je trokutu svaki kut manji od 90°, stoga ne postoji polukružnica koja sadrži sve tri. U preostala tri slučaja dobije se tupokutan trokut i tada postoji polukružnica sa željenim svojstvom. Vjerojatnost je stoga $p_3 = \frac{3}{4}$.





Zadatak 4. Na kružnici nasumično odaberemo 3 promjera te jednu nasumičnu točku X. Numerirajmo krajeve promjera tako da je X na kružnici između točaka numeriranih s 3 i 4, te da su 1 i 4, 2 i 5, 3 i 6 dijametralno suprotne na odabranim promjerima.

a) Ako prva točka može biti na poziciji označenoj brojem 1 ili 4, druga 2 ili 5 te treća 3 ili 6, a četvrta je X, koliko ima mogućih konfiguracija?

b) Je li konfiguracija 2, 3, X, 4 „dobra" konfiguracija? „Dobra" konfiguracija je konfiguracija u kojoj postoji polukružnica koja sadrži sve odabrane točke.

c) Je li konfiguracija 1, 3, X, 5 „dobra"?

d) Ispišite sve „dobre" konfiguracije.

e) Kolika je vjerojatnost p_4 ?

Rješenje zadatka 4:

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, prva točka ima dvije mogućnosti na svom promjeru, druga također dvije na svojem promjeru te isto tako i treća.

b) Jest, ako uzmemo za krajeve polukružnice točke numerirane s 2 i 5.

c) Nije.

d) $(1, 2, 3, X)$, $(2, 3, X, 4)$, $(3, X, 4, 5)$, $(X, 4, 5, 6)$.

e) $p_4 = \dfrac{4}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$.

Zadatak 5. Nacrtajte kružnicu. Dokažite da je $p_5 = \frac{5}{16}$.

Zapišimo dobivene vjerojatnosti u tablicu. Primjećujete li ikakvu pravilnost u tablici? Možete li pogoditi vjerojatnost kada je $N = 6$ ili opću formulu za vjerojatnost?

N	1	2	3	4	5	6	N
p_N	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{16}$	?	?

Pokušajmo dobiti opću formulu za p_N.

Slučajno odaberemo $N-1$ promjera kružnice te zadnju točku X također slučajno negdje na kružnici. Ukupan broj N-torki je 2^{N-1}, budući da svaka od prvih $N-1$ točaka može biti na jednom kraju promjera ili na drugome. Sada prebrojavanjem odredimo broj povoljnih slučajeva („dobrih" konfiguracija), slučajeva u kojima odabrana N-torka, tj. $(N-1)$-torka (jer je zadnja točka X već odabrana) točaka zadovoljava svojstvo da se nalaze na istoj polukružnici. Gledajući samo točke koje su zadane promjerima kružnice, numeriramo ih brojevima od 1 do $2(N-1)$ u negativnom smjeru tako da se točka X nalazi između točaka numeriranih s $N-1$ i N. Svaku traženu, zadovoljavajuću N-torku predstavljat će točka numerirana s najmanjom vrijednosti. Počnimo od točke 1. Očito postoji jedna N-torka koja je predstavljena točkom 1, to je 1, 2..., $N-1$, X. Slijedi točka 2 koja predstavlja 2, 3..., $N-1$, X, N. I tako sve do točke $N-1$ koja predstavlja $N-1$, X, N..., $2N-2$. Za sljedeću točku valja nešto prokomentirati. Budući da se točka X, koja mora biti u svakoj N-torci, nalazi između točaka $N-1$ i N, N-torka X, N..., $2N-2$ je valjana, zadovoljavajuća. Točka $2N-2$ dijagonalno je nasuprotna točki $N-1$ i uz danu numeraciju je na polukružnici s točkama od N do $2N-2$ uključeno s obzirom na promjer određenim točkama $N-1$ i $2N-2$. Sve ostale N-torke neće sadržavati točku X, stoga povoljnih slučajeva ima ukupno N.

Zaključujemo, rješenje problema dano je formulom $p_N = \frac{N}{2^{N-1}}$.

Ovo je samo jedan mali slučaj Wendelovog teorema koji kaže:

Uzmimo jediničnu n-dimenzijsku hipersferu te nasumično odaberemo N točaka na njoj. Vjerojatnost da postoji hemisfera koja sadrži sve odabrane točke dana je formulom:

$$p_{n,N} = 2^{-N+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{N-1}{k}.$$

U početnom zadatku traženo je $p_{2,N}$.