

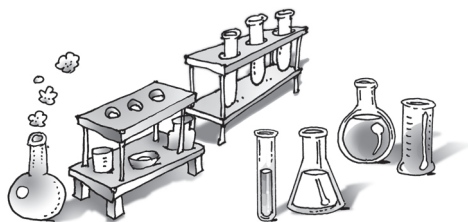
Matea Gusić, Zagreb

## DOKAZ – NAJZANIMLJIVIJA MATEMATIČKA IGRA

Često možemo čuti kako je matematika znanost drugačija od ostalih. Osim što ima dugu i slavnu povijest, u društvu se niz godina naziva čistom *znanosti* u kojoj je sve jasno i strogo. Ono što matematiku čini drugačijom od ostalih znanosti vrlo je strog matematički dokaz. Naime, da bi se neka tvrdnja u matematici smatrala istinitom, mora se dokazati. Odnosno, koristeći logičke argumente, s obzirom na zadane i općeprihvaćene standarde, pokazuje se da je navedena tvrdnja točna. Ali nije uvijek bilo tako. U davna vremena dovoljno je bilo da netko nacрта smislenu sliku, ili da ponudi jasan opis matematičke ideje, i to je bilo sve potrebno opravdanje da bi se tvrdnja smatrala matematičkom činjenicom. Ponekad bi se istinitost tvrdnje argumentirala prizivanjem bogova.



Ideja o potrebi dokazivanja da je matematička tvrdnja točna pojavila se u Grčkoj u 5. stoljeću pr. Kr. Smatra se da je do takve potrebe došlo među filozofima koji su se u to doba ujedno bavili matematikom. Filozofi su pokušavali objasniti pojave koje su se zbivale oko njih, a u istinitost svojih objašnjenja morali su uvjeriti i ostale. Za to im je trebao jasan i nepobitan sustav argumentiranja, a principe logičkog zaključivanja, kakve su razvili za dokazivanje tvrdnji unutar matematike, lako su mogli primijeniti i na druga područja.



Zamislite sada da imate neku ideju za koju želite dokazati da je točna. Ako se radi o ideji iz neke od eksperimentalnih znanosti, kao što su primjerice biologija ili kemija, poslužit ćete se laboratorijskim eksperimentom. Ali što ako je ideja matematička? Kako bi se omogućilo dokazivanje matematičkih tvrdnji, prvo su se morali postaviti standardi za

koncept dokaza, odnosno „pravila igre”. Priznanje za prvi dokaz u povijesti matematike dodijeljen je matematičaru Talesu iz Mileta (634. – 548. pr. Kr.), i to za dokaz tvrdnje da promjer kruga dijeli krug na dva jednaka dijela. Premda je to bio početak matematičkog dokaza, pravila dokazivanja, koja su omogućila širu uporabu i razvoj matematičkog dokaza, usustavljena su tek tri stoljeća kasnije.

Za to je zaslužan matematičar Euklid (325. – 265. pr. Kr.), odnosno njegove tri knjige o elementarnoj geometriji nazvane „Elementi”. Euklid je organi-



zirao definicije, teoreme i aksiome kako bi poslužili kao pravila, odnosno kao stroga baza za dokazivanje. Euklidovi Elementi započinju navođenjem osnovnih pojmova i ideja iz geometrije. Zatim se navodi pet aksioma, matematičkih činjenica koje su jasne same po sebi, dakle vrijede bez dokazivanja. Naravno, ovo vrijedi za dokaze u geometriji, ali svaka grana matematike ima svoje osnovne postavke (pravila, definicije, aksiome) kojima se, zajedno s logičkim pravilima, koristimo kako bismo dokazali istinitost tvrdnje iz tog područja.

U matematici su pravila puno stroža nego što bi netko to na prvu pomislio. Rekli smo da su definicije i aksiomi baza za dokazivanje matematičkih tvrdnji. Ali već i matematičke definicije mogu stvarati probleme. Osim što postoje jasna pravila o tome kako definiramo matematičke pojmove, pojavljuje se problem riječi koje možemo koristiti. Primjerice, ako želimo definirati kružnicu kao skup točaka u ravnini, jednako udaljenih od jedne fiksne točke, postavlja se pitanje: što je točka, a što je ravnina? Definicijama stvaramo rječnik za formuliranje matematičkih tvrdnji, teorema.

Čak i kada dobro znamo pravila igre, zna biti problematično kako ih iskoristiti za uspješno dokazivanje. Neki matematički dokazi znali su biti i po 400 stranica dugački, zbog čega je gotovo nemoguće pratiti njihov tijek, odnosno utvrditi da je svaki korak zaista nepobitno točan. Zato su se, s vremenom, razvili razni „recepti” koji su olakšali pristupanje matematičkom dokazu. Neki od tih recepta su: dokaz pomoću dedukcije, dokaz matematičkom indukcijom ili, primjerice, dokaz kontradikcijom. Svaki od ovih vrsta dokaza ima svoju povijest i njihova bi priča također mogla pronaći svoje mjesto na Matkinim stranicama. Kako se razvijala matematika, razvijao se i matematički dokaz. Matematičari su otkrivali nove pristupe matematičkom dokazu i nove trikove koji im mogu pomoći da što lakše i brže dođu do finalnog zaključka.

Usprkos tome, brojne su matematičke tvrdnje koje niti danas nisu dokazane. Sedam takvih tvrdnji 2000. se godine našlo na popisu takozvanih „milenijskih problema”. Autor točnog rješenja bilo koje tvrdnje s popisa milenijskih problema bit će nagrađen s čak milijun dolara!



Za matematičara se kaže da je gospodar kritičkog razmišljanja, analize i deduktivnog zaključivanja. Ovakve pridjeve matematičar je zaslužio upravo radi matematičkog dokaza. Naime, prakticirajući logička pravila upotrebe samo zadanih pravila i tvrdnji kako bi se dokazala neka druga tvrdnja, iziskuje od osobe da analizira, kombinira i provodi deduktivne zaključke te da se kritički osvrće na svaki korak dokaza. Upravo zato bi se svaki mali matematičar trebao, barem jednom u životu, uhvatiti u koštac s najzanimljivijom matematičkom igrom, dokazom.

