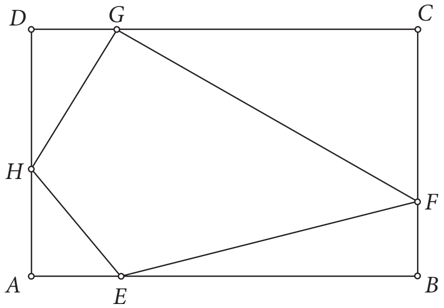
Dva zadatka o najkraćem putu

Ljiljana Arambašić[1] i Rajna Rajić[2]

Sažetak. U ovom članku riješit ćemo dva zadatka koja se bave problemom najkraćeg puta između dviju točaka ravnine.

Svima nam je dobro poznato da će, ukoliko su zadane dvije točke ravnine i tražimo najkraći put koji ih spaja, to biti upravo dužina koja spaja te dvije točke. Riješit ćemo dva malo zanimljivija zadatka koja se u suštini svode na ovu činjenicu. Prvi zadatak može se naći na poveznici [1].

Zadatak 1. Neka je zadan pravokutnik *ABCD* i točka *E* na jednoj od njegovih stranica, npr. $\overline{AB}$. Treba odrediti točke *F*, *G* i *H* na susjednim stranicama toga pravokutnika tako da duljina zatvorenog izlomljenog puta *EFGHE* bude najmanja moguća.

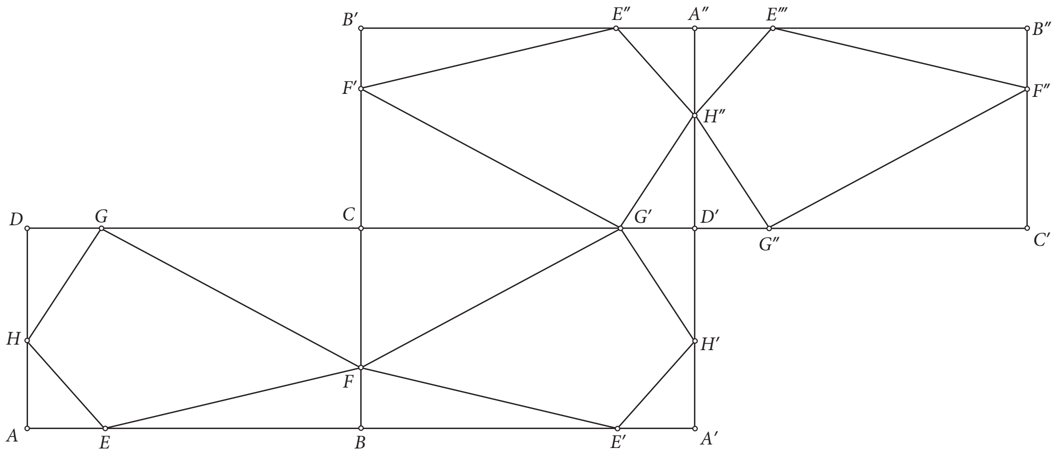


Naš je zadatak opisati kako odabrati točke *F*, *G* i *H* tako da izraz

$$|EF|+|FG|+|GH|+|HE|$$

ima najmanju moguću vrijednost. Da bismo to riješili, nekoliko ćemo puta zadani pravokutnik zrcaliti na pogodan način.

[1]Ljiljana Arambašić, PMF-Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu
[2]Rajna Rajić, RGN fakultet Sveučilišta u Zagrebu



Pojasnimo kako smo dobili prethodnu sliku:

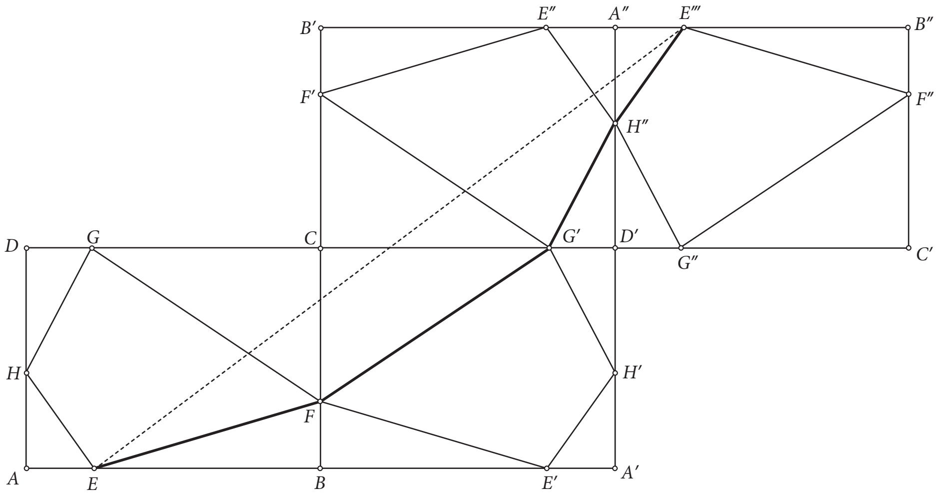
- prvo smo zrcalili pravokutnik $ABCD$ s obzirom na stranicu $\overline{BC}$ i tako dobili pravokutnik $BA'D'C$;
- zatim smo pravokutnik $BA'D'C$ zrcalili s obzirom na stranicu $\overline{CD'}$ i tako dobili pravokutnik $CD'A''B'$;
- pravokutnik $CD'A''B'$ zrcalili smo s obzirom na stranicu $\overline{D'A''}$ te konačno dobili pravokutnik $D'C'B''A''$.

S obzirom da zrcaljenje čuva duljine dužina, imamo

$$|EF|+|FG|+|GH|+|HE|=|EF|+|FG'|+|G'H''|+|H''E'''|.$$

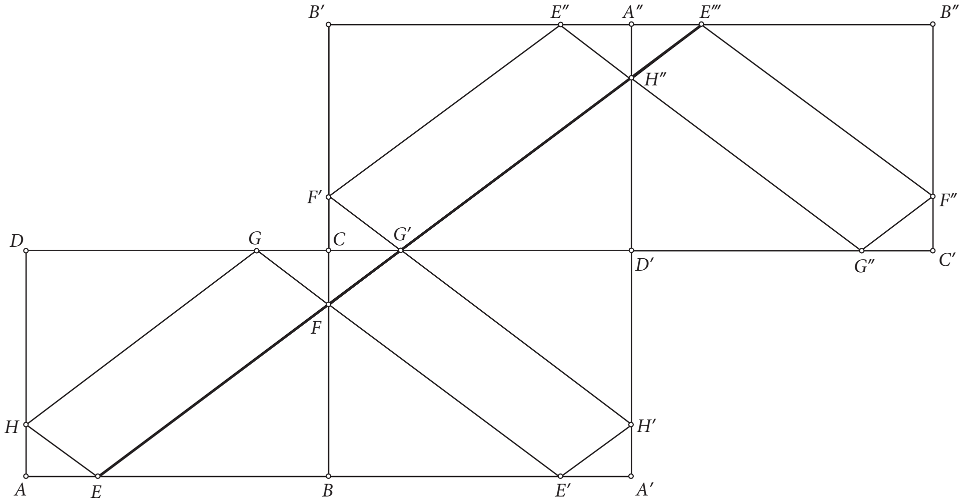
Prema tome, trebamo odrediti kada će vrijednost izraza na desnoj strani prethodne jednakosti biti najmanja moguća.

Srećom, to je lako jer je $|EF|+|FG'|+|G'H''|+|H''E'''|$ upravo duljina jednog puta od točke E do točke E'''. Stoga će njegova duljina biti najmanja ako je taj put



pravocrtni, to jest ako su točke E, F, G', H'' i E''' kolinearne (leže na istom pravcu). Naravno, nakon što nađemo točke G' i H'', lako ćemo naći njihove „originale" G i H.

Drugim riječima, najkraći put dobit ćemo ako su F, G' i H'' sjecišta dužine $\overline{EE'''}$ i odgovarajućih stranica, kako prikazuje sljedeća slika.



Kolika je duljina toga puta?

Neka je $a=|AB|$ i $b=|BC|$. Spustimo li iz E''' okomicu na pravac AB i njeno nožište označimo s N, iz pravokutnog trokuta ENE''', kojemu su katete $2a$ i $2b$, dobit ćemo da je

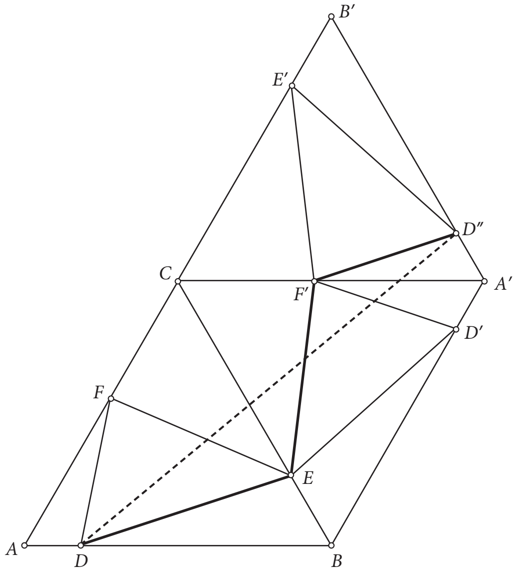
$$|EE'''|=\sqrt{(2a)^2+(2b)^2}=2|AC|,$$

dakle ta udaljenost iznosi upravo dvostruku duljinu dijagonale pravokutnika $ABCD$. Uočimo da duljina $|EE'''|$ ne ovisi o početnom položaju točke E na stranici $\overline{AB}$.

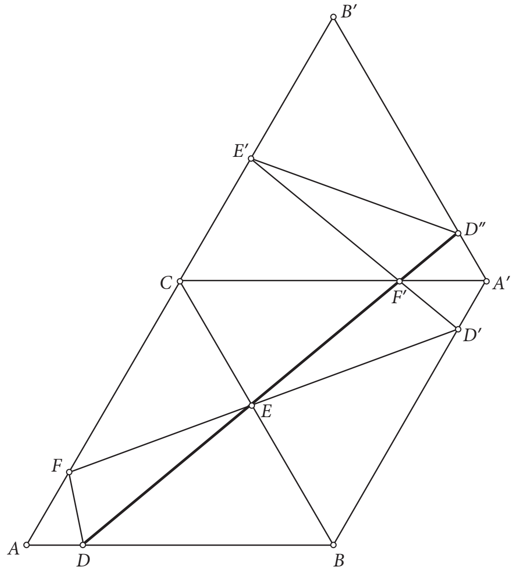
Iz prethodne slike naslućujemo da su dužine $\overline{EF}$ i $\overline{GH}$ paralelne dijagonali $\overline{AC}$. To zaista jest tako jer su trokuti ABC i ENE''' slični (omjeri odgovarajućih stranica iznose 2). Slično se zaključi da su dužine $\overline{FG}$ i $\overline{HE}$ paralelne dijagonali $\overline{BD}$.

Zadatak 2. Neka je zadan jednakostranični trokut ABC i točka D na jednoj od njegovih stranica, npr. $\overline{AB}$. Treba odrediti točke E i F na susjednim stranicama toga trokuta tako da duljina zatvorenog izlomljenog puta $DEFD$ bude najmanja moguća.

Postupit ćemo kao u prethodnom slučaju. Odmah ćemo nacrtati konačnu sliku, to jest nakon učinjenih zrcaljenja s obzirom na stranice $\overline{BC}$ i $\overline{A'C}$ redom.



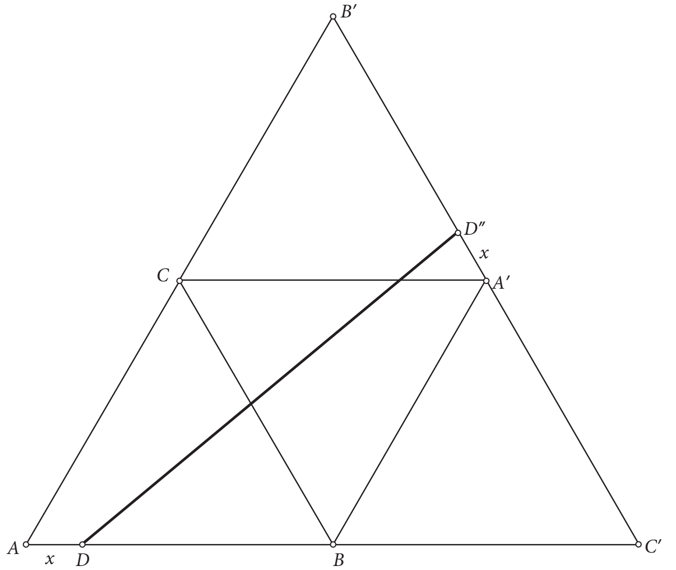
Najkraći put imat ćemo u sljedećoj situaciji.



Kolika je duljina ovoga puta? Da bismo to lakše odredili, prethodnu ćemo sliku malo nadopuniti tako da stranice $\overline{AB}$ i $\overline{B'A'}$ produljimo do točke C'.

Označimo $a = |AB|$ i $x = |AD|$. Promatramo trokut $DC'D''$: očito je $|DC'| = 2a - x$, $|D''C| = a + x$, a kut kod vrha C' iznosi 60°. Sada se lako izračuna da je

$$|DD''| = \sqrt{3\left(a^2 - ax + x^2\right)}\,.$$



Uočimo da ovdje duljina najkraćeg puta ovisi o x, to jest o početnom položaju točke D na stranici $\overline{AB}$. Time smo riješili i drugi zadatak.

Napomena. Slike su crtane u dinamičkom programu *Geogebra*. Zainteresiranom čitatelju preporučujemo da sam nacrta slične situacije te da „eksperimentiranjem” s različitim likovima, odnosno početnom točkom dođe do rješenja u sličnim situacijama.

Literatura:

1. *Finding the Shortest Route: A Schoolyard Problem*, http://map.mathshell.org/lessons.php?unit=8305&collection=8