Više dokaza jedne algebarske nejednakosti i jedne njene generalizacije

Edin Ajanović[1], Šefket Arslanagić[2] i Faruk Zejnulahi[3]

U ovom članku dat ćemo sedam zanimljivih dokaza jedne algebarske nejednakosti i četiri dokaza jedne njene generalizacije. Za te dokaze koristit ćemo nejednakosti između sredina, aritmetičke i geometrijske, te geometrijske i harmonijske. Tu je i jedan dokaz pomoću trigonometrije, kao i dva dokaza korištenjem tehnike diferencijalnog računa. Kod dokazivanja generalizacije koristit ćemo Sturmovu[1] metodu, pomoćnu nejednakost Minkovskog[2], kao i princip matematičke indukcije.

Ta nejednakost glasi:

Neka su $x, y > 0$ i neka je $xy = 1$. Tada vrijedi nejednakost

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq 4 . \tag{1}$$

Dokaz 1. Primjenjujući nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja, imamo da je

$$\frac{1+\frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{1 \cdot \frac{1}{x}} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{x} \geq \frac{2}{\sqrt{x}} . \tag{2}$$

Analogno dobivamo da je

$$1+\frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{y}} . \tag{3}$$

[1]Edin Ajanović, Sarajevo

[2]Šefket Arslanagić, Sarajevo

[3]Faruk Zejnulahi, Sarajevo

[4]Jacques Charles François Sturm (1803. – 1855.), francuski matematičar

[5]Hermann Minkowski (1864. – 1909.), njemački matematičar

Množeći nejednakosti (2) i (3), dobivamo da je

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq\frac{4}{\sqrt{xy}}=4,$$

što je i trebalo dokazati.

Vrijedi jednakost u (1) ako i samo ako je $x=y=1$.

Dokaz 2. Množeći izraze u zagradama na lijevoj strani nejednakosti (1), dobivamo da je

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}. \qquad (4)$$

Sada, primjenjujući nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja, imamo da je

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}\geq\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}}\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{2}{\sqrt{xy}}=2. \qquad (5)$$

Sada iz nejednakosti (4) i (5) slijedi nejednakost (1).

Dokaz 3. Primjenjujući nejednakost između geometrijske i harmonijske sredine za dva pozitivna broja imamo da je

$$\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)}\geq\frac{2}{\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}}=\frac{2(x+1)(y+1)}{x(y+1)+y(x+1)}=\frac{2(x+y+xy+1)}{xy+x+yx+y}=\frac{2(x+y+2)}{x+y+2}=2$$

odakle nakon kvadriranja slijedi dana nejednakost (1).

Dokaz 4. Kako je $x,y>0$ i $xy=1$, to je $y=\frac{1}{x}$, pa imamo da je

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=\left(1+\frac{1}{x}\right)(1+x)=1+\frac{1}{x}+x+1=2+x+\frac{1}{x}. \qquad (6)$$

Primjenjujući poznatu nejednakost $(\forall t>0)\ t+\frac{1}{t}\geq 2\Leftrightarrow(t-1)^2\geq 0$ na (6), dobivamo danu nejednakost (1).

Dokaz 5. Kako je $x,y>0$ i $xy=1$, to postoji $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, tako da je $x=tg\alpha$ i $y=ctg\alpha$, pa imamo da je

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=\left(1+\frac{1}{tg\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{ctg\alpha}\right)=\left(1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=\frac{\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)^2}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{1+\sin 2\alpha}{\frac{\sin 2\alpha}{2}}=\frac{2}{\sin 2\alpha}+2\geq 4,$$

jer je $0<\sin 2\alpha\leq 1$.

Dokaz 6. Kako je $x, y>0$ i $xy=1$, to je $y=\dfrac{1}{x}$, pa imamo da je

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+x\right)=1+\frac{1}{x}+x+1=2+x+\frac{1}{x}. \tag{6}$$

Promatrajmo funkciju $f\left(x\right)=2+x+\dfrac{1}{x}$ na $\left(0,+\infty\right)$. Njena prva derivacija je

$$f'\left(x\right)=1-\frac{1}{x^2},$$

pa imamo da funkcija

1. monotono pada za $f'\left(x\right)<0\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{x^2}<0\Rightarrow x<1$,
2. monotono raste za $f'\left(x\right)>0\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{x^2}>0\Rightarrow x>1$.

Dakle, funkcija ima minimum za $x=1$ i on iznosi $f\left(1\right)=4$, što je i trebalo dokazati.

Dokaz 7. (metoda Lagrangeovih[6] multiplikatora) Dani izraz na lijevoj strani nejednakosti (1) možemo promatrati kao realnu funkciju $f\left(x,y\right)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)$ dvije realne varijable x i y, uz uvjete $x, y > 0$ i $xy = 1$. Formirajmo sada Lagrangeovu funkciju $L\left(x,y;\lambda\right)$, gdje je λ Lagrangeov multiplikator. Imamo da je

$$L\left(x,y;\lambda\right)=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)+\lambda\left(x\cdot y-1\right),$$

a odavde

$$L_x=\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{-1}{x^2}\left(1+\frac{1}{y}\right)+\lambda y. \tag{7}$$

Analogno dobivamo da je

$$L_y=\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{-1}{y^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)+\lambda x. \tag{8}$$

[6]Joseph-Louis Lagrange (1736. – 1813.), francuski matematičar

Također, imamo da je

$$L_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = xy - 1 . \tag{9}$$

Odredimo stacionarne tačke Lagrangeove funkcije kao rješenja sustava jednadžbi iz (7), (8) i (9):

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-1}{x^2}(1+x) + \lambda \dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{x}{x^2}(1+x) = \dfrac{1+x}{x} = \dfrac{1}{x} + 1, \\ -x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right) + \lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{x^2}{x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = x+1 \qquad \Rightarrow x = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x = \pm 1, \\ xy = 1 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Kako su x, $y > 0$, to je $x = y = 1$ i $\lambda = 2$. Ispitajmo sada karakter stacionarne točke $(x, y) = (1, 1)$. U tu svrhu nađimo najprije parcijalne derivacije Lagrangeove funkcije $L(x, y; \lambda)$ drugoga reda:

$$D_1 = L_{xx} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3}\left(1+\frac{1}{y}\right) , \tag{10}$$

$$L_{yy} = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \frac{2}{y^3}\left(1+\frac{1}{x}\right), \tag{11}$$

$$L_{xy} = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x^2 y^2} + \lambda . \tag{12}$$

Sada na osnovi dobivenih jednakosti (10), (11) i (12) izračunajmo Hessijan.

$$D_2 = \begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = L_{xx}L_{yy} - L_{xy}^2 = \frac{4}{x^3 y^3}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) - \frac{1}{x^4 y^4} - 2\frac{1}{x^2 y^2}\lambda - \lambda^2 \tag{13}$$

Kako je $D_1(1,1) = 4 > 0$ i $D_2(1,1) = 16 - 1 - 4 - 4 = 7 > 0$, to je $(x, y) = (1,1)$ točka minimuma uz dane uvjete, tj. vrijedi da je

$$f(x,y) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq f(1,1) = 4 ,$$

što je i trebalo dokazati.

Generalizacija. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ takvi da je $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = 1$. Tada vrijedi nejednakost

$$\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(1+\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x_n}\right) \geq 2^n . \tag{14}$$

Dokaz 1. (analogon dokazu 1) Koristeći nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja, imamo da je

$$\frac{1+\frac{1}{x_i}}{2} \geq \sqrt{1 \cdot \frac{1}{x_i}} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{x_i} \geq \frac{2}{\sqrt{x_i}}. \tag{15}$$

Sada, primjenjujući nejednakost (15) za $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, imamo da je

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_i}\right) \geq \frac{2^n}{\sqrt{\prod_{i=1}^{n} x_i}} = 2^n,$$

što je i trebalo dokazati.

Vrijedi jednakost u (14) ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.

Dokaz 2. (Sturmova metoda) Neka je $f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_i}\right)$. Dokažimo da je

$$f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) \geq f\left(\sqrt{x_1x_2},\sqrt{x_1x_2},\ldots,x_n\right). \tag{16}$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(1+\frac{1}{x_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{x_n}\right) \geq \left(1+\frac{1}{\sqrt{x_1x_2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x_1x_2}}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{x_n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(1+\frac{1}{x_2}\right) \geq \left(1+\frac{1}{\sqrt{x_1x_2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x_1x_2}}\right) \Leftrightarrow \frac{1+x_1}{x_1}\cdot\frac{1+x_2}{x_2} \geq \left(\frac{\sqrt{x_1x_2}+1}{\sqrt{x_1x_2}}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$1+x_1+x_2+x_1x_2 \geq x_1x_2+2\sqrt{x_1x_2}+1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2 \geq 0.$$

Posljednja nejednakost očito je točna pa funkcija $f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_i}\right)$ dostiže svoj minimum kad su sve varijable međusobno jednake njihovoj geometrijskoj sredini, tj. $f\left(x_1,x_2,\ldots,x\ \right) \geq f\left(1,1,\ldots,1\right) = 2$.

Napomena 1. Da bi dokaz 2 bio potpuno korektan, treba zaključiti da funkcija $f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ ima minimum na zadanoj domeni $M = \left\{\left(x_1,\ldots,x_n\right) : x_i > 0, i \in \{1,2,\ldots,n\}\right\}$. U ovakvim slučajevima najjednostavnije se pozvati na Cantorov teorem: Neprekidna funkcija definirana na kompaktu (zatvorenom i ograničenom skupu) u $\mathbb{R}^n$ dostiže minimum (i maksimum). Mali problem u našem slučaju predstavlja činjenica da skup M nije zatvoren. Međutim, to možemo nadići na sljedeći način. Stavimo da je $M = M_1 \cup M_2$, gdje je

$$M_1 = \left\{ \left(x_1, x_2, ..., x_n \right) \in \mathbb{R}^n : x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1 \wedge \left(\forall i \in \{1,2,...,n\} \right) \left(x_i \ge \frac{1}{2^n} \right) \right\},$$

$$M_2 = \left\{ \left(x_1, x_2, ..., x_n \right) \in \mathbb{R}^n : x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1 \wedge \left(\exists i \in \{1,2,...,n\} \right) \left(0 < x_i < \frac{1}{2^n} \right) \right\}.$$

Skup M_1 je zatvoren (sve nejednakosti $x_i \ge \dfrac{1}{2^n}$ su nestroge) i ograničen jer je npr.

$$x_i = \frac{1}{x_1 ... x_{i-1} x_{i+1} ... x_n} \le \underbrace{2^n ... 2^n}_{n-1} = 2^{n^2 - n}.$$

Jasno, ako $\left(x_1, x_2, ..., x_n \right) \in M_1$, onda $\left(\sqrt{x_1 x_2}, \sqrt{x_1 x_2}, ..., x_n \right) \in M_1$, jer je
$\dfrac{1}{2^n} \le \min\{x_1, x_2\} \le \sqrt{x_1 x_2} \le \max\{x_1, x_2\} \le 2^{n^2-n} \wedge \sqrt{x_1 x_2} \cdot \sqrt{x_1 x_2} \cdots x_n = x_1 x_2 \cdots x_n = 1$.

Sada na skupu M_1 možemo primijeniti Sturmovu metodu, dok na skupu M_2 nejednakost (14) očigledno vrijedi.

Metoda koju smo ovdje koristili može biti primijenjena i u raznim drugim situacijama.

Dokaz 3. Dokažimo najprije pomoćnu nejednakost Minkowskog:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \left(a_i + b_i \right)} \ge \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} b_i}, \text{ gdje su } a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n > 0. \tag{17}$$

$$\Leftrightarrow 1 \ge \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i + b_i}} + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i + b_i}}. \tag{18}$$

Primjenjujući nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za *n* pozitivnih brojeva, imamo da je

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i + b_i}} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i + b_i}}{n}, \tag{19}$$

$$\sqrt{\prod \frac{b_i}{a_i \quad b_i}} \le \frac{\sum \overline{a_i \quad b_i}}{n}. \tag{20}$$

Zbrajanjem nejednakosti (19) i (20) imamo da je

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i + b_i}} + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i + b_i}} \le \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i + b_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i + b_i} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i + b_i}{a_i + b_i} = 1.$$

Dakle, vrijedi nejednakost (18), a samim time i nejednakost (17). Sada, stavljajući u nejednakost (17) da je $a_i = 1$ te $b_i = \dfrac{1}{x_i}$, dobivamo da je

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_i}\right)} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}1}+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}=1+1=2,$$

odakle nakon potenciranja s n dobivamo traženu nejednakost (14).

Dokaz 4. (Princip matematičke indukcije) Dokažimo najprije pomoćnu nejednakost

$$\left(1+a_1\right)\left(1+a_2\right)\ldots\left(1+a_n\right) \geq \left(1+\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\right)^n,\ n\in\mathbb{N},\ a_1,a_2,\ldots,a_n>0. \tag{21}$$

Za $n=1$ nejednakost (21) očigledno vrijedi. Dokažimo da vrijedi i za $n=2$.

$$\left(1+a_1\right)\left(1+a_2\right) \geq \left(1+\sqrt{a_1a_2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)^2 \geq 0. \tag{22}$$

Neka je

$$\left(1+a_1\right)\left(1+a_2\right)\ldots\left(1+a_{2^k}\right) \geq \left(1+\sqrt[2^k]{a_1a_2\ldots a_n}\right)^{2^k} \tag{23}$$

za svaki izbor pozitivnih brojeva. Tada je

$$\left(1+a_1\right)\left(1+a_2\right)\ldots\left(1+a_{2^{k+1}}\right)=\left(1+a_1\right)\left(1+a_2\right)\ldots\left(1+a_{2^k}\right)\left(1+a_{2^k+1}\right)\left(1+a_{2^k+2}\right)\ldots\left(1+a_{2^k+2^k}\right).$$

Primjenjujući induktivnu pretpostavku (23) dva puta na gornji izraz, a potom i nejednakost (22), dobivamo da je

$$\begin{aligned}\left(1+a_1\right)\left(1+a_2\right)\ldots\left(1+a_{2^{k+1}}\right) &\geq \left(1+\sqrt[2^k]{a_1a_2\ldots a_{2^k}}\right)^{2^k}\left(1+\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}a_{2^k+2}\ldots a_{2^k+2^k}}\right)^{2^k}\\ =\left[\left(1+\sqrt[2^k]{a_1a_2\ldots a_{2^k}}\right)\left(1+\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}a_{2^k+2}\ldots a_{2^k+2^k}}\right)\right]^{2^k} &\geq \left[\left(1+\sqrt{\sqrt[2^k]{a_1a_2\ldots a_{2^k}}\,\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}a_{2^k+2}\ldots a_{2^k+2^k}}}\right)^2\right]^{2^k}\\ &=\left(1+\sqrt[2^{k+1}]{a_1a_2\ldots a_{2^k}a_{2^k+1}a_{2^k+2}\ldots a_{2^k+2^k}}\right)^{2^{k+1}}.\end{aligned}$$

Ovime je indukcija završena za prirodne brojeve oblika $n=2^k\left(k\in\mathbb{N}\right)$. Sada krenimo unazad. Pretpostavimo da nejednakost (21) vrijedi za $n+1$ prirodan broj i dokažimo da vrijedi i za n. Birajući $a_{n+1}=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$, imamo da je

$$\begin{aligned}\left(1+a_1\right)\left(1+a_2\right)\ldots\left(1+a_n\right)\left(1+\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\right) &\geq \left(1+\sqrt[n+1]{a_1a_2\ldots a_n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}\right)^{n+1}\\ &=\left(1+\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\right)^{n+1},\end{aligned}$$

odakle dijeljenjem sa zajedničkim faktorom na lijevoj i desnoj strani posljednje nejednakosti dobivamo da nejednakost (21) vrijedi i za n. Prema tome, nejednakost (21) vrijedi za svaki prirodan broj $n\in\mathbb{N}$.

Stavljajući u nejednakost (21) da je $a_i = \dfrac{1}{x_i}$ za $i \in \{1,2,\dots,n\}$ i znajući da je $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$, dobivamo traženu nejednakost (14).

Napomena 2. Funkcija $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{x_i}\right)$, uz uvjete $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ i $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$, nije ograničena. Naime, ako promatramo točku $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(t, \dfrac{1}{\sqrt[n-1]{t}}, \dfrac{1}{\sqrt[n-1]{t}}, \dots, \dfrac{1}{\sqrt[n-1]{t}}\right)$, tada je

$$\lim_{t \to 0} f\left(t, \frac{1}{\sqrt[n-1]{t}}, \dots, \frac{1}{\sqrt[n-1]{t}}\right) = \lim_{t \to 0} \left(1 + \frac{1}{t}\right)\left(1 + \sqrt[n-1]{t}\right)^{n-1} = +\infty .$$

Literatura

1. Andreescu, T., Gelca, R., Putnam and Beyond, Springer, 2007.
2. Arslanagić, Š., Glogić, I., Zbirka riješenih zadataka za takmičenja iz matematike učenika srednjih škola u Federaciji Bosne i Hercegovine (1995. – 2008.), Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2009.
3. Arslanagić, Š., Matematika za nadarene, drugo izdanje, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
4. Malenica, M., Vajzović, F., Diferencijalni račun funkcija više promjenljivih, Studentska štamparija Univerziteta u Sarajevu, Sarajevo, 2002.
5. Stojanović, V., Mathematiskop 3 – Zbirka rešenih zadataka za prvi razred srednjih škola, IP MATEMATISKOP, Beograd, 2003.