

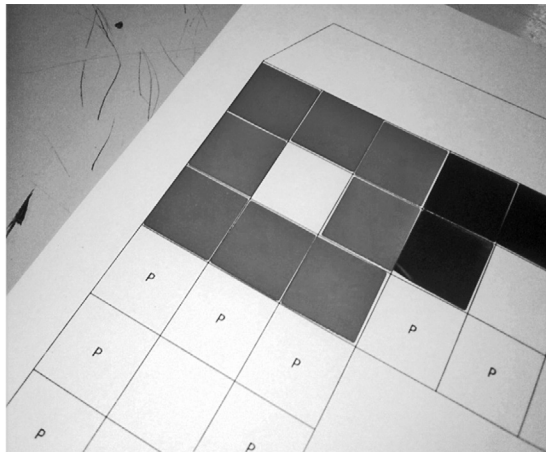
IZ NASTAVNE PRAKSE

Sierpinski Carpet projekt¹

MARIJANA CURIĆ²

Ključne riječi: fraktali, Sierpinski, iteracije, naljepnice, integracije, kvadrat, beskonačnost

U šk. god 2015./2016. 64 su učenika OŠ Stjepana Radića iz Metkovića (4. c, 8. d i 8. e) sudjelovala u međunarodnom e-Twinning projektu *Sierpinski Carpet* čiji je autor José Luis Rodríguez Blancas, prof. matematike na katedri Univerziteta u Almeriji. Poljski matematičar Waclav Sierpinski prvi je opisao taj fraktal 1916. god., a temelji se na kvadratu (nulta iteracija) koji se dijeli na 9 manjih kvadrata čije su duljine stranica $1/3$ početne stranice. Središnji kvadrat se oduzme, a postupak se ponavlja na preostalim osam (druga iteracija). Svaka nova iteracija osam je puta veća od prethodne. Sierpinski Carpet nastaje nakon beskonačnog broja iteracija.



Slika 1. Prva iteracija – 8 kvadrata

U prvoj iteraciji ima 8 malih kvadrata; središnji kvadrat izostavljamo. Učenici su lijepili zelene i ljubičaste naljepnice kvadratnog oblika prema zadanom predlošku. Boje se nisu smjele podudarati.

¹Predavanje održano na 7. kongresu nastavnika matematike RH, 2016. godine u Zagrebu

²Marijana Curić, OŠ Stjepana Radića, Metković



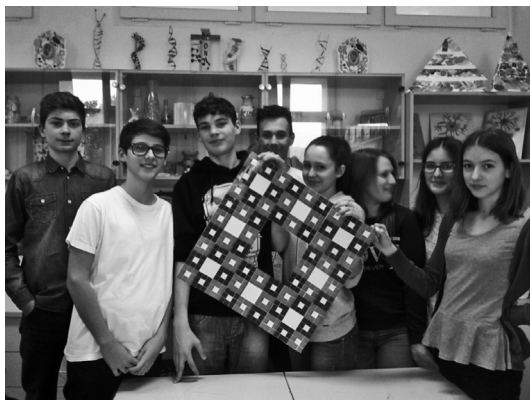
Slika 2. Učenici 4. c razreda i učiteljica Marijana Curić s izrađenom 2. iteracijom

U drugoj iteraciji spajamo 8 velikih kvadrata prve iteracije. Ukupno su u njoj 64 mala kvadrata (32 zelene i 32 ljubičaste naljepnice).



Slika 3. Izrada 3. iteracije

Treća iteracija sastoji se od 512 naljepnica kvadrata, odnosno, 8 kvadrata 2. iteracije spaja se i lijepi u jedan veći kvadrat. Učenici su 3. iteraciju izrađivali u skupinama. Ako je početna boja zelena, sljedećem kvadratu treba biti ljubičasta i obratno.



Slika 4. Treća iteracija



Slika 5. Učenci 8. d razreda u izradi prve, druge i treće iteracije



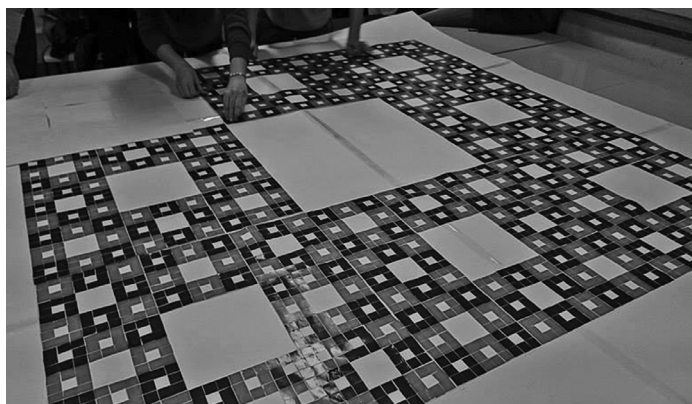
Slika 6. Učenci 8. e razreda u radionici izrade „matematičkog tepiha“



Slika 7. Učenci 8. d razreda s razrednicom učiteljicom Vesnom Pavlović



Zadatak svih sudionika bila je izrada četvrte iteracije tj. „matematičkog tepiha” pomoću dvobojnih naljepnica kvadrata duljine stranice 2 cm i predložaka. Učenici su kroz radionice, individualni i timski rad pokazali urednost, preciznost, kreativnost i suradnju.



Slika 8. Izrada 4. iteracije

Četvrta iteracija sastoji se od 8 kvadrata 3. iteracije (4 s početnom zelenom bojom i 4 s početnom ljubičastom bojom). Spajanjem radova nastaje Sierpinski Carpet (Sierpinski tepih) koji se sastoji od 4 096 naljepnica kvadrata. U izradi 4. iteracije sudjelovali su predstavnici razreda (4. c, 8. d, 8. e)

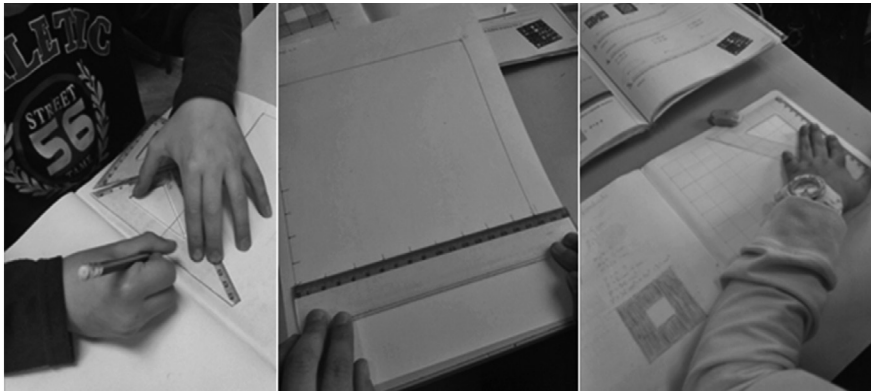
Sierpinski Carpet 4. iteracije bio je izložen u prizemlju Osnovne škole Stjepana Radića u Metkoviću, veljače 2016. g., a zatim je poslan na Sveučilište u Almeriju.



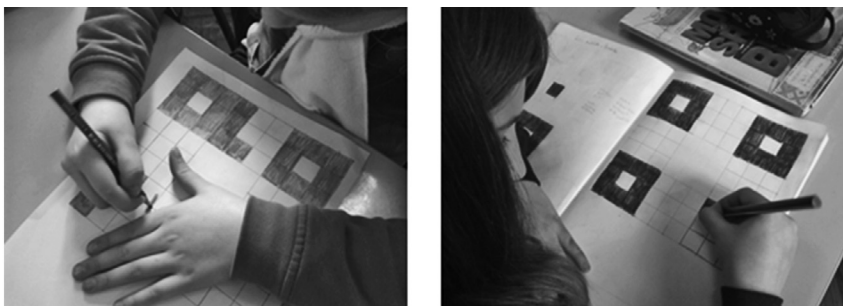
Slika 9. Sierpinski Carpet 4. iteracije

Učenici su osvijestili pojam fraktala koji se temelje na samosličnosti, tj. svaki najmanji dio isti je ili sličan kao i veći dio te se kroz takva ponavljanja daje slika beskonačnosti. Integracijom sadržaja u nastavi uočavali su, promatrali, prepoznavali, opisivali i izrađivali fraktale koji se nalaze u raznim oblicima u svijetu koji nas okružuje, kao i u nama samima.

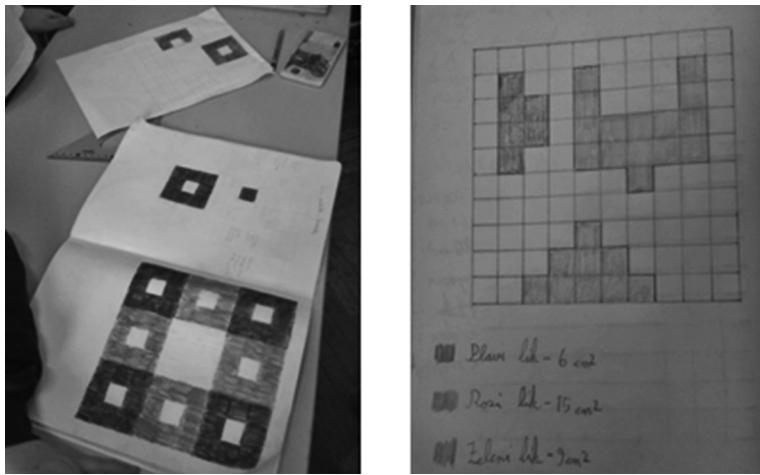
Učenici 4. c razreda s učiteljicom Marijanom Curić u nastavu matematike integrirali su sadržaje na temu *Kvadrat i pravokutnik* te su pomoću geometrijskog pribora crtali kvadratnu mrežu 1. i 2. iteracije, prikazivali je u dvije boje, izračunavali opseg i površinu prvih četiriju iteracija, uočavali odnose duljina stranica u svakoj iteraciji, zaključili koliko je naljepnica potrebno za svaku iteraciju, a za samostalan zadatak imali su na osnovi prethodnih aktivnosti istražiti kako bi izgledala peta iteracija, koje bi bile njezine dimenzije, koliko bi kvadrata-tepiha 4. iteracije bilo potrebno za 5. iteraciju, od koliko se naljepnica sastoji ta iteracija. Drugo istraživanje bilo je vezano uz grad u kojem živimo; prema površini grada Metkovića trebalo je odrediti koje bi dimenzije trebao biti matematički tepih da bi prekrrio naš grad i koliko bi tepiha 4. iteracije bilo potrebno za prekrivanje našega grada.



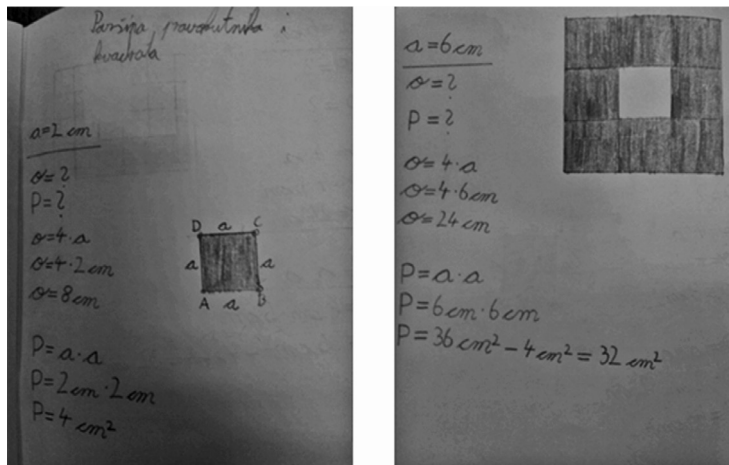
Slika 10. Crtanje 2. iteracije na satu Matematike, 4. c razred – mjerenje duljina, crtanje usporednica i okomica, crtanje kvadratne mreže, uočavanje pravih kutova



Slika 11. Primjeri radova s početnom zelenom i početnom ljubičastom bojom



Slika 12. Uvod u površinu



Slika 13. Opseg i površina jednog kvadrata i prve iteracije

Površina i opseg druge iteracije

$$P = 32 \text{ cm}^2 \cdot 8$$

$$= 256 \text{ cm}^2$$

$a = 18 \text{ cm}$	$\sigma = 4 \cdot a$	$P = a \cdot a$
$\sigma = ?$	$\sigma = 4 \cdot 18 \text{ cm}$	$P = 18 \text{ cm} \cdot 18 \text{ cm}$
$P = ?$	$\sigma = 72 \text{ cm}$	$P = 324 \text{ cm}^2$

$$P = 324 \text{ cm}^2 - 68 \text{ cm}^2$$

$$P = 256 \text{ cm}^2$$

Treća iteracija

$a = 54 \text{ cm}$	$\sigma = 4 \cdot a$	$P = 256 \text{ cm}^2 \cdot 8$
$\sigma = ?$	$\sigma = 4 \cdot 54 \text{ cm}$	$P = 2048 \text{ cm}^2$
$P = ?$	$\sigma = 216 \text{ cm}$	

Četvrta iteracija

$a = 162 \text{ cm}$	$\sigma = 4 \cdot a$	$P = 2048 \text{ cm}^2 \cdot 8$
$\sigma = ?$	$\sigma = 4 \cdot 162 \text{ cm}$	$P = 16384 \text{ cm}^2$
$P = ?$	$\sigma = 648 \text{ cm}$	

Broj potrebnih maljpnica

1. iteracija - 8 maljpnica
2. iteracija - 64 - 11-
3. iteracija - 512 - 11-
4. iteracija - 4096 - 11-

Slika 14. Svaka iteracija osam je puta veća od prethodne

SIERPINSK CARPET-ISTRAŽIVANJE

UČENICA: LUCIJA MUSULIN, 4.c

ISTRAŽIVANJE O:
Sierpinski Carpet

Od razgledanja do stranice u O.Š. Stjepana Rodića razredci 4.c, 8.d, 8.e su sudjelovali u Sierpinski Carpet projektu. To je tepih podijeljen na 7 dijelova (iteracija). Prvo iteracija se sastojala od 9 kvadratica ali je središnji kvadratic odstranjen. Duljina stranice svake iteracije neka je 3 puta od prethodne. Svaka iteracija 8 je puta neka od, također prethodne. Evo nekih pitanja i odgovora.

KOLIKO JE VELIKA PETA ITERACIJA - KOJE SU NJEZINE DIME-
NZIJE?

DIMENZIJA $a = 3 \cdot 162 \text{ cm}$ } 162 je duljina stranice prethodne iteracije
 $a = ?$

$\frac{162 \cdot 3}{486}$ O: Dimenzija pete iteracije je 486 cm, to je duljina stranice kvadrata.

VELIČINA

$$\begin{aligned} a &= 486 \text{ cm} \\ a &= ? \\ P &= ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 4 \cdot a \\ a &= 4 \cdot 486 \text{ cm} \\ a &= 1944 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= 16 \cdot 384 \text{ cm}^2 \cdot 8 \} \text{ možda smo lošiji} \\ P &= 131 \, 072 \text{ cm}^2 \} \text{ 16 \cdot 384 je peto puta od} \\ & \text{ prethodne, 16 \cdot 384 je} \\ & \text{ prethodno petina.} \\ & \text{ Može se misliti:} \\ & \text{ 2 \cdot 3 ali to} \\ & \text{ je drugi način.} \end{aligned}$$

$$\frac{486 \cdot 4}{1944} \quad \frac{16 \cdot 384 \cdot 8}{131 \, 072}$$

O: Obim pete iteracije je 1944 cm, površina je 131 072 cm².

Slika 15. Samostalno istraživanje – 4. c razred

KOLIKO JE NALJEPNICA POTREBNO ZA TU ITERACIJU?

Kako li izračunati broj naljepnica ove iteracije moramo se služiti predhodnom. Broj naljepnica raste 8 puta više od predhodnog broja. Stoga računamo $4096 \cdot 8$. 4096 je broj naljepnica predhodne iteracije.

$$\frac{4096 \cdot 8}{52768}$$

O: Za tu iteraciju potrebno je 32 768 naljepnica

KOLIKO JE TEPIHA ČETVORTE ITERACIJE POTREBNO ZA SKLAPANJE PETE ITERACIJE?

O: Da li se sklopila peto iteracija potrebno je 8 tepiha pete iteracije.

KOLKA JE POVRŠINA GRADA METKOVIĆA?

O: Grad Metković ima površinu od 50,82 km², odnosno 2,58% od ukupne površine županije.

Slika 16. Samostalno istraživanje – 4. c razred

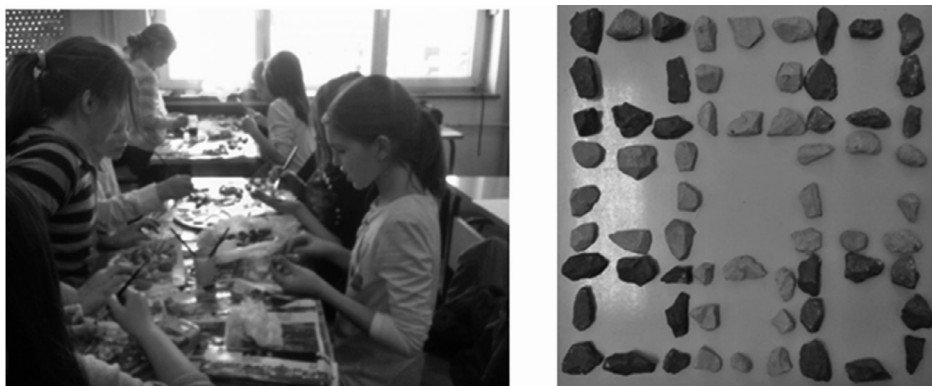
Iteracija	Broj Naljepnica	Broj Djece	Duljina stranice kvadrata
1.	8		
2.	64	1	18 cm
3.	512	8	54 cm
4.	4096	64	162 cm
5.	32 768	512	486 cm
6.	262 144	4 096	1 458 cm
7.	2 097 152	32 768	4 374 cm

Slika 17. Zaključak samostalnog istraživanja

Na satu Likovne kulture slagali su „Sierpinski stones“, tj. fraktale od obojenih kamenčića, a od kartona su izrađivali Sierpinski trokut.



Slika 18. Učenici 4.c razreda temperom su bojili kamenčiće i slagali ih u fraktale



Slika 19. Sierpinski stones

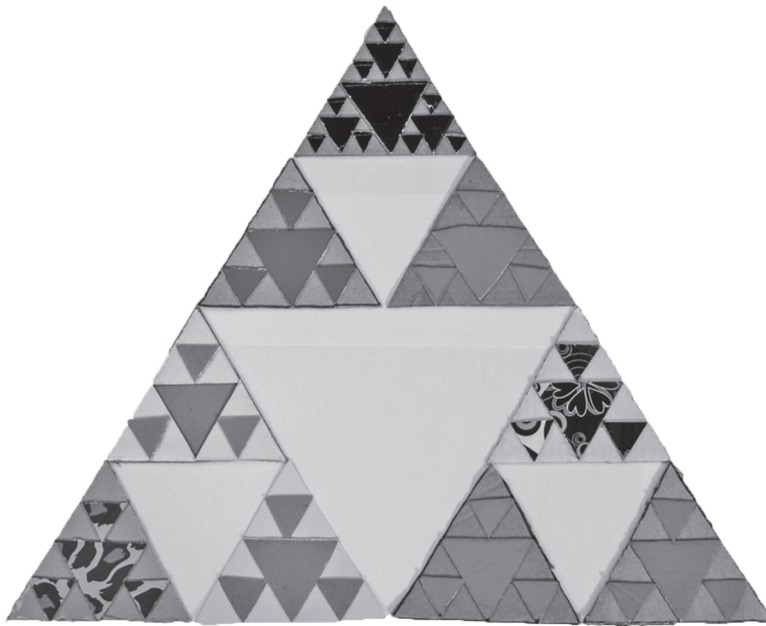
Osim Sierpinski stonesa, na satu Likovne kulture izrađivali su Sierpinski trokut pomoću geometrijskog pribora, kartona, škarica i ljepila.

Počinjemo s jednakostraničnim trokutom. Odredimo polovišta stranica te od početnog trokuta oduzmemo trokut koji nastaje spajanjem polovišta. Ostaju tri jednakostranična trokuta dvostruko manjih duljina stranica od početnog; sa svakim ponovimo postupak. Trokutom Sierpinskog nazivamo skup točaka koji ostane kad broj oduzimanja (iteracija) teži nuli.



Slika 20. Sierpinski trokut

Ovako su to napravili učenici 4. c razreda na satu Likovne kulture:



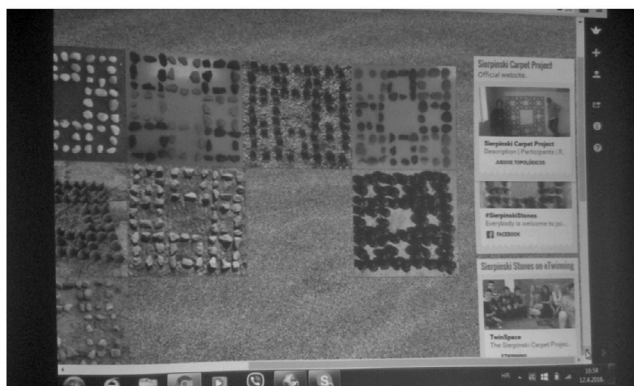
Slika 21. Sierpinski trokut – likovna kultura

Na Satu razrednika, osim što su pregledavali internetske stranice projekta i promatrali što rade druge škole u projektu, učenici su se učili koristiti web 2.0 alatom padlet.com koji je objavljen na fb stranici projekta Sierpinski Carpet Project.

<https://web.facebook.com/sierpinsicarpetproject/?fref=ts>

<http://padlet.com/jlrodriblancas/SierpinskiStones>.

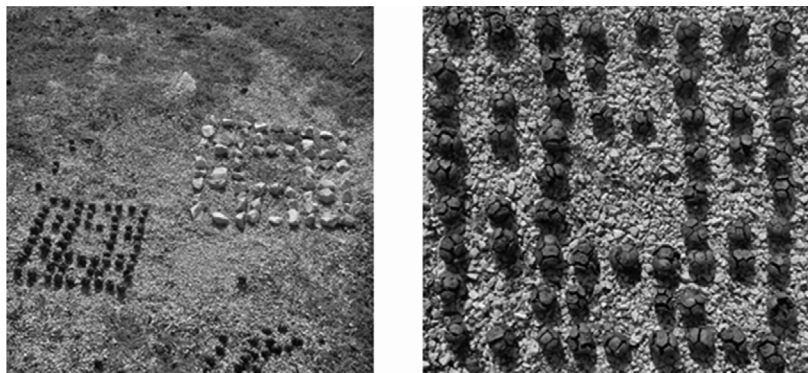
Uz pomoć učiteljice Marijane Curić sudjelovali su u kreiranju virtualnog matematičkog tepiha, što im se jako svidjelo, a u to su uvrstili Sierpinski stones koje su napravili na satu Likovne kulture, te fraktale koje su kreirali u prirodi, na izvanučioničkoj nastavi na Smrden Gradu u blizini Metkovića, 7. 4. 2016.



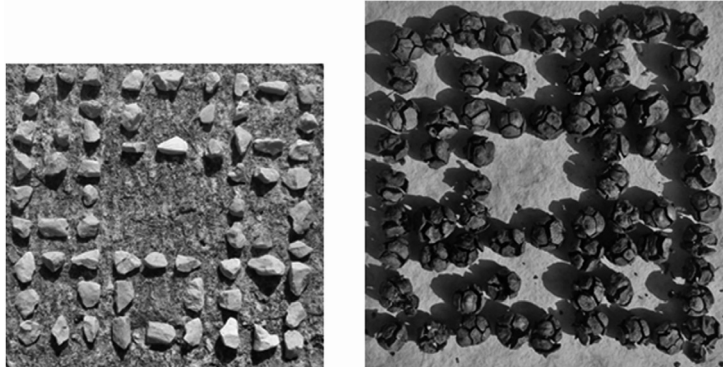
Slika 22. Kreiranje virtualnog matematičkog tepiha



Slika 23. Kreiranje virtualnog matematičkog tepiha



Slika 24. Na izvanučioničkoj nastavi učenici 4. c kreirali su fraktale od prirodnih materijala.



Slika 25. Fraktali od prirodnih materijala

Na satu Hrvatskog jezika razgovarali su o obavljenom zadatku te o tome napisali izvješće, što je jedna od tema u programu 4. r.

Izvjeric o obavljenom zadatku

Učenicima 4. c, 8. d i 8. e Osnovne škole Stjepana Radića sudjelovali su u međunarodnom projektu pod nazivom Sierpinski Carpet.

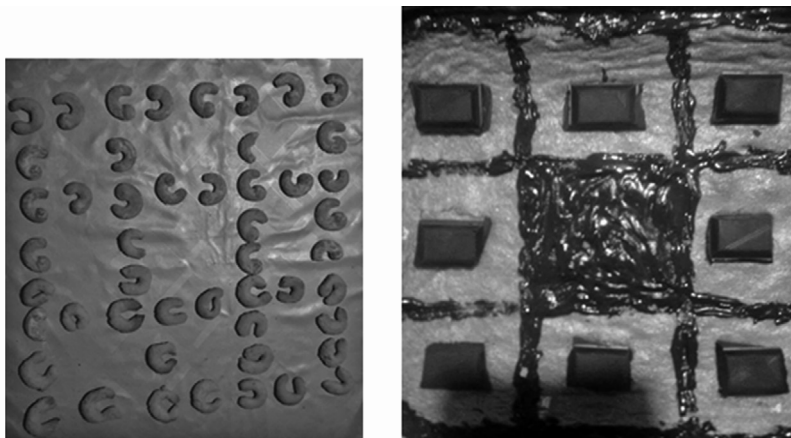
Projekt se odvijavao kroz razdoblje od rujanja do travnja u obliku radionica u Osnovnoj školi. Tema projekta radionica je krinova fraktala od četiri iteracije. Prva iteracija radionica je osam kvadrata duljine stranice 2 cm na način da se medijski kvadrat odstrani. Druga iteracija bila je osam puta veća i radionica je 64 kvadrata. Treća iteracija bila je osam puta veća od druge. Četvrta iteracija bila je osam puta veća od druge a to je bilo 4096 kvadrata. Nakon osam iteracija pristupilo se izračunavanju opsega i površine prvih četiri iteracije. Nakon toga, kroz sat likovne kulture ispravili su se Sierpinski trokut i Sierpinski ston. Tijekom Sata razmišljanja pogledali su na internetne stranice projekta, topologija, wordpress.com i Twinnig stranica projekta te radionice koji su objavili druge škole. Učenicima omiljena radionica to su integrirali kroz sate Biologije i Matematike.

Sudjelovanje u projektu bilo je vrlo poučno jer sam bolje shvatila značenje i važnost opsega i površine kvadrata te drugih geometrijskih likova.

Poredno mi se vidio način zajedničkog rada, druženja s ciljem učenja novih radionica.

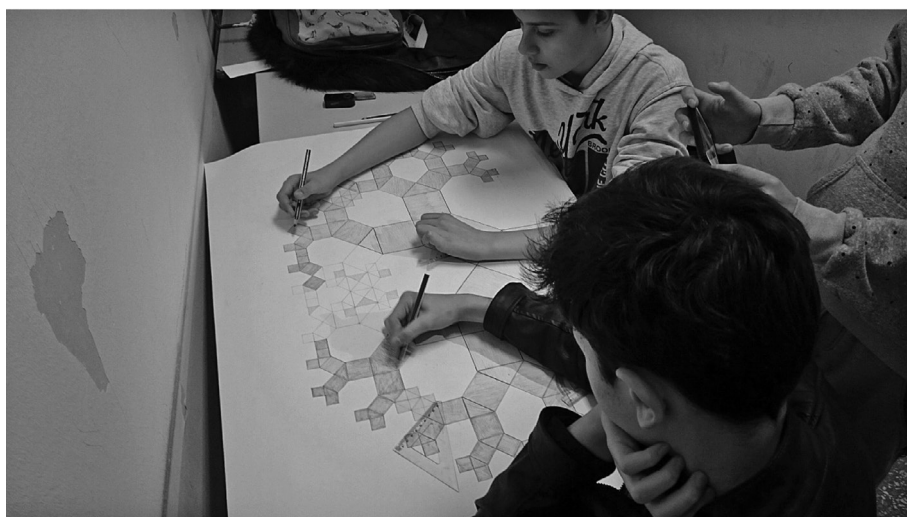
Slika 26. Pismeno izvješće – rad učenice Marte Šešelji, 4. c razred

Roditelji i učenici izradili su uskršnji blagdanski Sierpinski kolač po želji, i to u obliku Sierpinski fraktala.

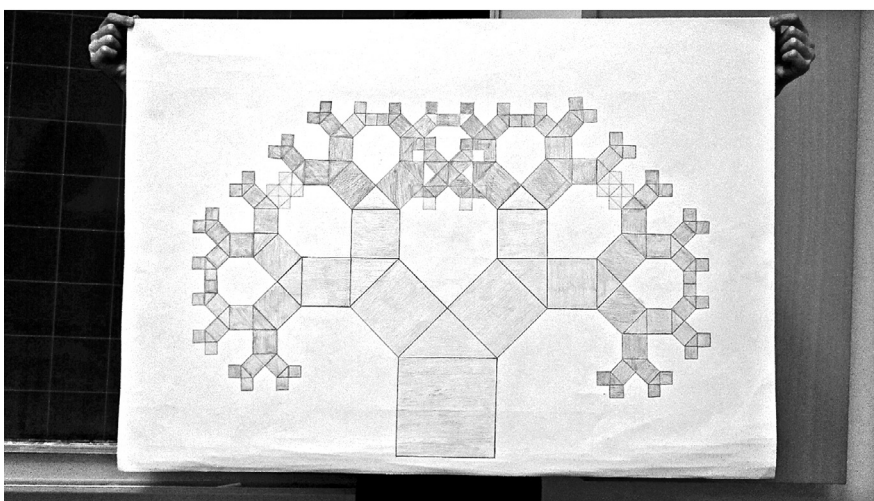
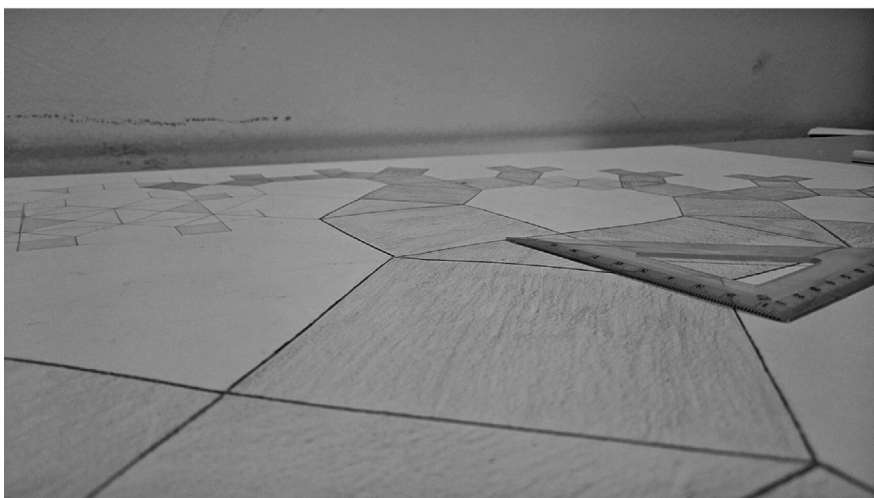


Slika 27. Blagdanski Sierpinski kolači

Učenici 8. d razreda, s učiteljicom Marijanom Odak Krstičević, pomoću geometrijskog pribora nacrtali su Pitagorino stablo kao primjer fraktala.

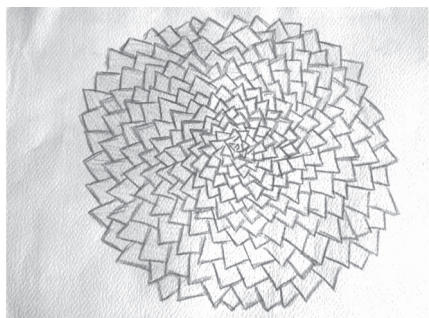


Slika 28. Pitagorino stablo

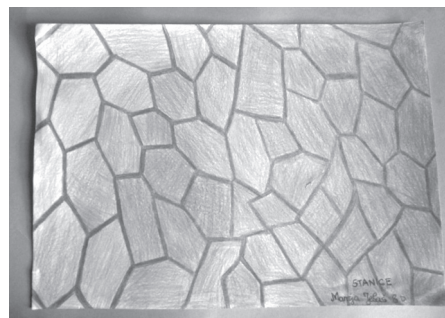


Slika 29. Pitagorino stablo

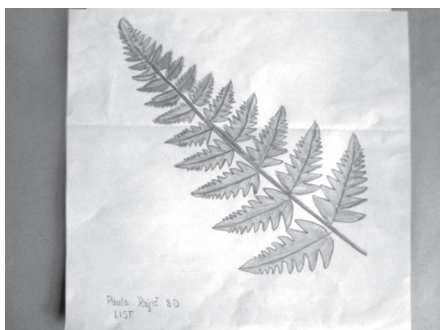
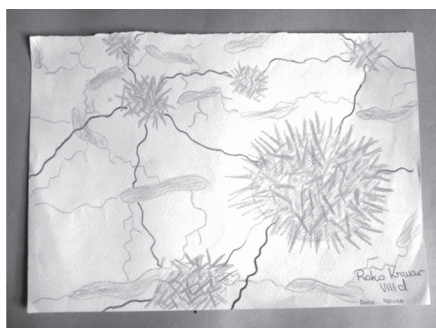
U nastavi Biologije, s učiteljicom Vesnom Pavlović, crtežima su prikazali dijelove u našem tijelu i u prirodi koji se temelje na samosličnosti, te su radove izložili u obliku plakata.



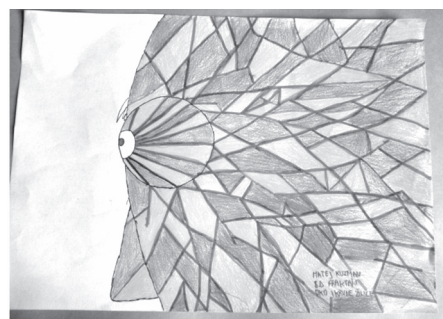
Slika 30. Cvijet



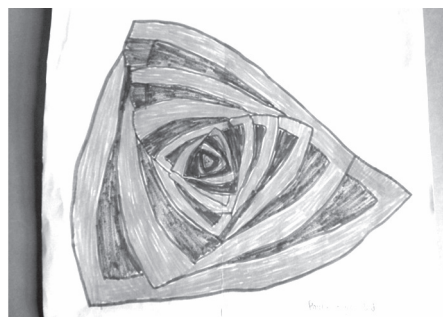
Slika 33. Stanice



Slika 31. List



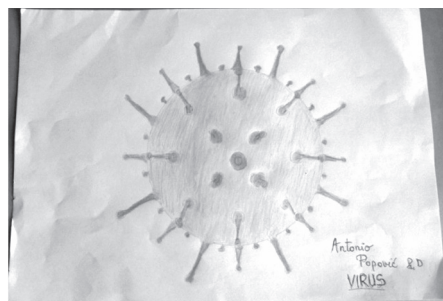
Slika 34. Očni živci



Slika 35. Alge



Slika 32. Mišićno tkivo



Slika 36. Virusi

Izrađeni „matematički tepih” (Sierpinski carpet) poslan je na Sveučilište u Almeriju gdje je 13. 5. 2016. bio izložen u palači Mediteran među 512 ostalih koji tvore ogroman fraktal sedme iteracije velik 43.74 metra, uz stotu obljetnicu opisivanja tepiha Sierpinskog. Na internetskim stranicama Sveučilišta uvršten je među najbolje „matematičke tepihe”.

<https://topologia.wordpress.com> (škola broj 385)

Učiteljica Marijana Curić učeničke radove predstavila je na stranicama OŠ Stjepana Radića

http://os-sradica-metkovic.skole.hr/?news_hk=1&news_id=779&mshow=290#mod_news

na stranicama eTwinninga

<https://twinspace.etwinning.net/363/materials/imagesici>

te na facebook stranici projekta

<https://web.facebook.com/sierpinskiacarpetchproject/?fref=ts>

Koordinator projekta za OŠ Stjepana Radića Metković bila je učiteljica Marijana Curić koja je pozvana na taj veliki događaj u Almeriju, a ovaj fraktal koji su izrađivala djeca diljem svijeta dosad je najveći izrađeni fraktal.



Slika 37. Sudionici projekta OŠ Stjepana Radića Metković

Učiteljica Marijana Curić sudjelovala je 13. 5. 2016. na završnom događaju projekta u Almeriji u Španjolskoj, u Palacio Municipal de los Juegos Mediterraneos, gdje su nazočni učitelji iz Španjolske, Poljske, Njemačke, Srbije i Hrvatske zajedno s učenicima složili najveći Sierpinski tepih dosad napravljen na svijetu, duljine stranica 43.74 m. Na istom događaju predstavljeni su i rezultati radionice *Sierpinski trokut*

koju su učiteljica Marijana i koordinatorica *Sierpinski Carpet Projekta* na *eTwinningu* Dolores Jimenez Cardenas održale u OŠ San Fernando s učenicima uzrasta 11 – 12 godina.



Slika 38. Iteracija Sierpinski Carpet projekta složena 13.5. 2016. u Almeriji

Učenici su zajedno s učiteljicom 4. c razreda predstavili rezultate projekta na Radio Naroni u Metkoviću. Učiteljica Marijana Curić u Almeriji je predstavila hrvatske škole u projektu te kratki video u kojemu su učenici na engleskome jeziku izrazili svoj doživljaj projektnih aktivnosti i uputili pozdrav svima nazočnima na završnom događaju. Objave projektnih aktivnosti svih aktivnih škola sudionica mogu se pronaći na stranici španjolskog sveučilišta.



Slika 39. Priznanje eTwinning teama

Literatura i internetske stranice

1. *Sierpinski trokut – iteracije* – GeoGebra /on line/ <https://www.geogebra.org/m/qdvA6Cbu> (21. 8. 2017.)
2. *Trokut Sierpinskog* /on line/ Wikipedija https://hr.wikipedia.org/wiki/Trokut_Sierpi%C5%84skog (25. 8. 2017.)
3. Šikić, J. (2014.). *Trokut Sierpinskog*. Matka, 23 (89), 13-15. Preuzeto s <https://hrcak.srce.hr/140012>
4. Mladen Paušić. *Uvod u fraktale*. FER – Sveučilište u Zagrebu /on line/ https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/Uvod%20U%20Fraktale%20by%20Mladen%20Pausic.pdf (14. 8. 2017.)
5. <https://padlet.com/jlrodriblancas/SierpinskiStones/wish/106166699>
6. https://www.youtube.com/watch?v=aJvmyQ_aFCw
7. <https://www.youtube.com/watch?v=o838FkONRzw>
8. <https://topologia.wordpress.com/2016/05/16/sierpinskialteria/>
9. <https://www.facebook.com/sierpinskiarpetproject/?fref=ts>