Problemska nastava u visokoškolskom poučavanju matematike

Tihana Strmečki, Luka Marohnić, Dominik Jurković i Ivan Matić[1]

Uvod

„Suvremena metodika nastave matematike ukazuje na razne mogućnosti za rješavanje jednog od najvažnijih pitanja suvremene nastave matematike, pitanja razvoja stvaralačkog mišljenja i stvaralačkih sposobnosti učenika." (Kurnik, 2002.).

U Hrvatskoj se nastava većinom održava na tradicionalan način koji je uglavnom usmjeren samo na kognitivno područje, pri čemu se afektivni i psihomotorni aspekt zanemaruju. Predavač je postavljen kao središnja osoba odgovorna za uspjeh studenata koji pasivno upijaju informacije, ne ispituju njihovu točnost, rješavaju zadane zadatke i odgovaraju na postavljena pitanja. Za razliku od tradicionalne nastave, suvremena nastava teži biti usmjerena na studenta kao središnju osobu. Njegova je obveza da „pita, raspravlja, istražuje, zahtijeva, problematizira, surađuje s učiteljem rješavajući zadane probleme." (Kurnik, 2002.) Nastava matematike teži upravo ovakvom načinu stjecanja znanja, zato je uvođenje problemske nastave u visokoškolsko obrazovanje posebno važno.

Problemska nastava je suvremen, viši nastavni sustav u kojem studenti aktivno i samostalno rade, istražuju i rješavaju probleme za koje je potrebna primjena njihovih različitih matematičkih sposobnosti. Predavanje započinje zadatkom koji zadaje predavač, a usko je vezan uz nastavni program. Samostalno svladavanje gradiva uvodi učenika u istraživački rad, upoznaje ga s tehnikom samostalnog rada, pobuđuje zanimanje, te razvija kritičko mišljenje, što je motivacija za daljnje traganje, upoznavanje i svladavanje novih spoznaja. Osim toga, tako orijentirana nastava omogućuje tečnu komunikaciju predavača i studenta, stvara dinamičnu i zanimljivu radnu atmosferu koju studenti preferiraju više nego klasična predavanja, potiče razvoj induktivnog razmišljanja i pridonosi temeljitijem pamćenju naučenog.

Nastanak problemske nastave povezuje se s američkom *projekt-metodom* i *problem-metodom* (Poljak, 1977.), koje su razvili Dewey, Kilpatrick, Colling i drugi, dok neki izvori (Poljak, 1977.) razvoj pripisuju simpoziju o problemskoj nastavi u New

[1]Tihana Strmečki, Luka Marohnić, Dominik Jurković i Ivan Matić, Tehničko veleučilište u Zagrebu

Yorku 1965. godine. Može biti vođena na tri moguća načina: da je vodi isključivo predavač, u kombinaciji predavača i studenata, te da je vodi samo student, ovisno o težini zadanog problema i tematike koja se obrađuje, te o razini znanja studenata. Važne karakteristike ove nastavne tehnike su da je metodologija učenja fokusirana na studenta, da se odvija u malim grupama, da su predavači voditelji procesa učenja, zadani problem je stimulacija za daljnje učenje i razvoj novih vještina, te da se nova znanja dobivaju iz učenja usmjerenog na samog sebe. Drugim riječima, takva nastava zahtijeva suradnju, predavač usmjerava proces i daje potporu, osvještava slabija područja znanja studenata kroz rješavanje problema i potiče dvosmjernu komunikaciju u nastavnom procesu.

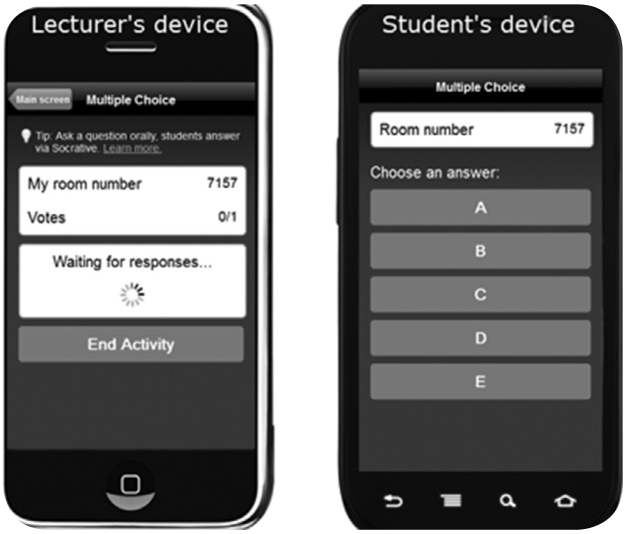
Ovakve nastavne strategije dizajnirane su da omoguće studentima da na neki način svojim aktivnim sudjelovanjem u predavanjima matematike nanovo izvedu tehnike rješavanja i reproduciraju osmišljavanje dijelova matematike, za razliku od opcije predavačkog prezentiranja tehnike. U tome je uloga predavača ogromna i puno zahtjevnija od klasične. Pri takvom usmjeravanju sata predavač je na neki način voditelj debate, motivator, učitelj i suradnik. Na ovaj iznimno koristan način nije moguće obraditi svaku temu zbog vremenske ograničenosti unutar akademske godine i količine gradiva. No, mudrim odabirom tema koje se razviju kroz problemski orijentiranu nastavu, studenti dobivaju osjećaj uključenosti i motiviranosti.

Classroom Response System u Španjolskoj

Jedan od primjera izvrsne primjene problemskog pristupa nastavi u visokoškolskom obrazovanju jest *Classroom Response System* (sustav za odgovore studenata), koji se provodi na matematičkim predmetima na *Donostia Polytechnic College* u San Sebastianu (Donostia), pitoresknom gradiću Baskijske regije u sjevernom dijelu Španjolske. Program mobilnosti na razini visokoškolskog obrazovanja, *Erasmus,* omogućava da predavači iz Hrvatske u funkciji gostujućih nastavnika održe vlastita predavanja, te sudjeluju u redovnoj nastavi kako bi proširili akademske, znanstvene, kulturne i socijalne vidike. *Kliker sistem* (kolokvijalni naziv CRS-a) baziran je na prezentaciji problema grupi studenata, bez prethodne teoretske pripreme na predavanju. Svaki prisutan student posjeduje mali daljinski – kliker (S*lika 1.*), kojim sukladno pitanjima predavača nudi svoj odgovor između više ponuđenih opcija s projekcijskog platna. Nakon što svaki student ponudi svoj odgovor, slijedi rasprava u kojoj odabrani student argumentirano objašnjava svoj odgovor. Tijekom rasprave neki studenti mijenjaju mišljenje na temelju komunikacije s kolegama. Nakon što predavač otkriva točan odgovor, ponovo pokreće diskusiju o inicijalnom problemu. Studenti su nakon tako provedene debate dovedeni do novog koncepta uz pomno vodstvo i otvoren je prostor za teoretski dio predavanja. Slijedi novi tip težih zadataka na projekcijskom platnu, koji zahtijevaju primjenu upravo naučenog kako bi se postigao novi nivo razumijevanja i zadržavanja znanja. Ovakav interaktivan, neposredan i dinamičan način nastave oduševljava i studente i predavače, te omogućuje dugotrajniju pohranu znanja.

Slika 1. Kliker koji se koristi u nastavi

Osim klikera, koji studenti preuzimaju u studentskoj referadi na početku akademske godine te ga vraćaju po završetku nastave, mogućnost davanja vlastitih odgovora nude i aplikacije na mobilnim uređajima, kao što je *Socrative*. Unutar aplikacije postoji opcija za prijavu kao predavač ili kao student (*Slika 2.*). Predavači imaju mogućnost koristiti unaprijed pripremljene probleme, te prikazivati histograme studentskih odgovora, dok studenti imaju opciju mobilnog klikera kojim se odlučuju za odgovore.



Slika 2. Mobilna aplikacija „Socrative"

Prva je autorica promatrala nastavni sat predmeta *Calculus* u trajanju od 50 minuta, na temu kompleksnih brojeva. Osnovna ideja predavanja bila je predstaviti studentima fizikalne i inženjerske probleme koji nemaju rješenja u skupu realnih brojeva, kako bi ih, uz usmjeravanje predavača, razmišljanjem i osmišljavanjem novih tehnika riješili. Predavač je za nastavni sat osigurao sve materijale i smislio aktivnosti kojima su studenti nadopunjavali i nadograđivali potrebno znanje. Službeni udžbenik predmeta (Barragués, Arrieta, Manterola, 2010.) strukturiran je tako da svako poglavlje započinje problemom koji se ne može riješiti do tada obrađenim gradivom, čime se pokazuje potreba za proširivanjem znanja. Novi se koncept ne izlaže odmah formalno, nego ga se izgrađuje kroz niz aktivnosti kako bi se došlo do rješenja.

Prvih pet minuta provjeravalo se razumijevanje domaće zadaće koju su studenti dobili na kraju prethodnog predavanja kao pripremu. Kako bi točno riješili nekoliko pitanja s višestrukim ponuđenim odgovorima, kod kuće su trebali pročitati uvodnu nastavnu jedinicu *Koncept kompleksnih brojeva* iz udžbenika. Uobičajeno je da pitanja ovog uvodnog dijela sadržavaju osnovne definicije i algoritme koji su im poznati otprije, opće matematičke činjenice koje će se koristiti u tadašnjem predavanju, te jednostavnije primjene navedenoga. Osim raznih motivacijskih primjera za definiciju skupa $\mathbb{C}$, uvod je sadržavao i definiciju algebarskog oblika kompleksnog broja te pojašnjenje povezanosti sa skupom $\mathbb{R}$. Svaki je student na uvodna pitanja odgovorio svojim klikerom ili mobilnom aplikacijom, te dobio odgovarajuće bodove za točnost. Predavač odmah pri skupljenim odgovorima na projekcijskom platnu u obliku histograma prikazuje grupnu uspješnost rješavanja ovih zadataka. Time dobiva trenutni uvid u predznanje studenata i u nivo razumijevanja domaće zadaće. Na temelju odgovora može dodati slične zadatke za prisjećanje pojmova, ili nastaviti dalje s predavanjem.

Slijedi primjer dvaju takvih uvodnih zadatka.

Zadatak 1. Odredite sjecišta parabole zadane jednadžbom $y = x^2$ i pravca zadanog jednadžbom $y = x - 1$.

a) sjecišta ne postoje b) $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm 3i}{2}$ c) $\forall x \in \mathbb{R}$ d) $x_{1,2} = 2, -1$

Studenti su zadatak rješavali samostalno. Za prvi ponuđeni odgovor odlučilo se 28 %, za drugi (točan) odgovor 61 %, za treći 11 % studenata, dok četvrti odgovor nije odabrao niti jedan student. Student-dobrovoljac koji je točno riješio zadatak pojasnio je svoj postupak ostatku grupe.

Zadatak 2. Odredite sva realna rješenja jednadžbe $x^2 + 1 = 0$.

a) $x = 1$ b) $\forall x \in \mathbb{R}$ c) nema rješenja d) $x = -1$

Pri individualnom rješavanju, prvi ponuđeni odgovor nije odabrao niti jedan student, drugi odgovor odabralo je 10 %, treći (točan) 85 % studenata i četvrti 5 %.

Nakon molbe predavača da studenti koji nisu odabrali točan odgovor javno objasne svoja razmišljanja, dobili su uvid u pogrešku koju su napravili pri zaključivanju.

Sljedećih 10 minuta predavač dodatno pojašnjava koncept kompleksnih brojeva, osnovne matematičke operacije, potenciranje i korjenovanje, prikaz u Gaussovoj ravnini, trigonometrijski oblik, te ih povezuje s prethodnim gradivom. Naglašava se povezanost područja kompleksnih brojeva s algebrom (osnovni teorem algebre), s teorijom brojeva (Gaussovi cijeli brojevi, Pitagorine trojke), te se navode primjeri primjene (npr. prikaz izmjeničnih veličina induktivnog napona i struje, te fraktali).

Nakon toga sljedećih 30 minuta rješavaju se problemski zadatci kojima je cilj da studenti primijene ono što su upravo čuli, da se provjeri koliko su razumjeli ili da prošire dosadašnje stečeno znanje novim tehnikama. Ova se faza može odviti na nekoliko načina. Prvi je da svaki student razmisli o zadanom problemu za sebe i, neovisno o grupi, odluči se za jedan od ponuđenih odgovora. Drugi je način da predavač formira manje grupe studenata i da svaka grupa dođe do zajedničkog odgovora. Treći je način da svi studenti čine jednu grupu i odluče se za jedan skupni odabir. U svim trima načinima studenti trebaju argumentirati svoje odgovore, pri čemu im je dano dovoljno vremena za promišljanje. U svim slučajevima predavač može odgovore prikazati na projekcijskom platnu u obliku histograma i time imati uvid u trenutno znanje i razmišljanje svake pojedine grupe. Na temelju toga odlučuje se za novu temu ili dodatno pojašnjavanje onoga što se pokazalo nejasnim. Ovakav pristup zahtijeva aktivnost ne samo šačice motiviranih studenata, nego svakoga od njih.

Nastavni sat završava kratkim osvrtom predavača, u kojemu se razrješavaju eventualne sumnje nastale prilikom rasprave, te zadavanjem domaće zadaće za sljedeću nastavnu cjelinu.

Slijede primjeri nekih zadataka postavljenih tijekom predavanja.

Zadatak 3. Odredite imaginarni dio kompleksnog broja $z=\dfrac{(1-i)^{12}}{(1+i)^5}$.

a) -8 b) 0 c) 8

Ovaj su zadatak studenti samostalno rješavali i nudili individualna rješenja. Prvi ponuđeni odgovor (koji je točan) odabralo je 57 % studenata, drugi 21 %, treći 22 %. Nakon grupne rasprave uz vodstvo predavača, razjašnjene su najčešće pogreške prilikom računanja, kao što su greška predznaka ili određivanja kompleksno konjugiranog oblika.

Zadatak 4. Riješite jednadžbu $z-\overline{z}-4i=0$, gdje je $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$.

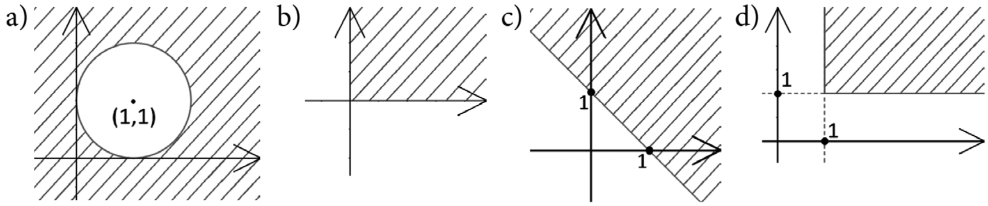
a) $z=2$ b) $z=2i$ c) $z=-2i$

Studenti su i ovaj zadatak rješavali samostalno, te je 17 % studenata odabralo prvi ponuđeni odgovor, 64 % studenata drugi (točan) odgovor i 19 % studenata treći.

Nakon grupne rasprave studenata, oni koji su ponudili netočan odgovor razumjeli su kako se točno rješava postavljeni zadatak.

Zadatak 5.

Skicirajte skup rješenja nejednadžbe $Re(z)+Im(z)\geq 1$ u Gaussovoj ravnini.



Ovaj su zadatak studenti rješavali u malim grupama po četiri studenta. Prvi ponuđeni odgovor odabralo je 19 % studenata, drugi 25 %, treći (točan) 24 % i četvrti 32 %. Nakon toga predavač je formirao novu grupu od po jednog predstavnika svake grupe, koji su međusobno diskutirali svako ponuđeno rješenje. Nove grupe sljedećim su glasovanjem pokazale da je zadatak uspješno riješen s razumijevanjem.

Zadatak 6.

Odredite ono rješenje jednadžbe $z^3=-1-i\sqrt{3}$ koje pripada prvom kvadrantu.

a) $z=2^{\frac{1}{3}}cis\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$ b) $z=2^{-\frac{1}{3}}cis\left(\dfrac{4\pi}{9}\right)$ c) $z=2^{-\frac{1}{3}}cis\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$

Ovaj zadatak studenti su rješavali samostalno i 32 % ih je odabralo prvi odgovor, 37 % drugi (točan) odgovor, te 31 % treći odgovor. Predavač je pokazao histogram odgovora i potom formirao parove studenata koji su imali različita mišljenja da prodiskutiraju međusobno i ponovno zajednički glasuju. U novom histogramu i dalje je bilo parova koji nisu točno odgovorili, pa je provedena detaljna rasprava o svakom koraku rješavanja. Nakon toga je predavač zadao još jedan sličan zadatak, kako bi se novo gradivo utvrdilo bez sumnji u postupak ili teoriju.

Pitanja koja se javljaju u problemskim zadatcima podijeljena su po težini u četiri kategorije. Prva kategorija je primjena poznatih algoritama na jednostavne probleme (Zadaci 1. i 2.). Druga kategorija su problemi koji pokazuju potrebu da se uvedu novi koncepti za pristup temi (Zadaci 1. i 2.). Treća kategorija su pitanja koja produbljuju znanje o novim tehnikama i konceptima. Četvrta kategorija su pitanja koja služe za pojašnjavanje gradiva koje se nije pokazalo dovoljno jasnim.

Nastava s kliker sistemom nosi 15 % ukupne ocjene, pri čemu se bodovi dobivaju u uvodnom dijelu nastave kao provjera obavljene domaće zadaće i za aktivnost na nastavi. Sljedećih 15 % bodova donose vježbe u softverskom paketu *GeoGebra*, za primjenu gradiva koje se obrađuje tijekom nastave, dok 70 % bodova nose parcijalni ispiti tijekom akademske godine.

Nakon odslušane ovako stukturirane nastavne jedinice, studenti prepoznaju važnu ulogu problemski orijentirane nastave, te cijene trud predavača koji je uložen u njenu organizaciju. Znanje stečeno kroz sustav odgovora studenata dugotrajnije je i draže studentima od klasične nastave. Studenti lakše samostalno uočavaju vlastite nedostatke u znanju te povećavaju motivaciju za usvajanje novih tehnika. Istraživanje (Morais, Barragués, Guisasola, 2010.) je pokazalo da im se sviđa aktivna komunikacija s predavačem i kolegama, sudjelovanje u nastavi, te trenutna razmjena ideja o novom gradivu. Na kraju krajeva, razvijaju vještine koje su iznimno potrebne i cijenjene u današnjoj edukaciji – snalaženje u dinamičnim konceptima koji zahtijevaju razvoj njihovih profesionalnih, društvenih i osobnih vještina.

Rješavanje problemskih zadataka uz primjenu računalnog softvera na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu

S ciljem postizanja boljeg razumijevanja tehnika matematičkog modeliranja te teorijskog dijela gradiva, u nastavi predmeta Matematika 1 i 2 u ak. god. 2017./2018. na izvanrednom dodiplomskom stručnom studiju elektrotehnike na Elektrotehničkom odjelu Tehničkog veleučilišta u Zagrebu studentima je prezentiran softverski paket Xcas (Marohnić & Orlić Bachler, 2017.; Parisse & De Graeve, 2018.) kao pomagalo pri rutinskom računu. Koristeći Xcas za izradu dijelova postupka koji su zahtijevali deriviranje, integriranje, rješavanje diferencijalnih jednadžbi, određivanje graničnih vrijednosti te primjenu Laplaceove transformacije, studenti su se mogli bolje usredotočiti na modeliranje tekstualno zadanih realnih (fizikalnih) problema odnosno na stratešku primjenu teorijskog gradiva (teorema i definicija) prilikom rješavanja apstraktnih zadataka. Svaki je student dobio po dva zadatka u svakome od dvaju navedenih predmeta koje je potom izradio u obliku seminarskog rada. Svaki uspješno obranjen seminarski rad vrednovao se u sklopu provjere znanja i time utjecao na završnu ocjenu.

Svrha ovog pristupa bila je modernizirati nastavu matematike uvođenjem računala kao pomoćnog alata prilikom računanja. Xcas je matematički alat opće namjene primjenom kojega se izrada rutinskih dijelova postupka rješavanja znatno pojednostavnjuje. Pritom se, dakako, od studenta i dalje zahtijeva razumijevanje zadatka te samostalno stvaranje strategije postupka rješavanja, što uključuje ispravnu primjenu definicija i kriterija obrađenih na predavanjima. Smatramo da ovaj pristup poboljšava razumijevanje teorijskog (i svakako najvažnijeg) dijela gradiva budući da se ono primjenjuje na nešto složenijim zadatcima. Računalo u čitavom procesu ostaje isključivo alat, u istom smislu u kojemu su to kalkulator i, nekada davno, logaritamske tablice te različiti mnemonički i ostali postupci kojima se olakšavao račun. Razvojem raznih softverskih paketa za tzv. simboličku algebru (engl. *Computer Algebra System*) posljednjih desetljeća, mnogi su složeni ali i dalje rutinski postupci u računu postali znatno jednostavniji za provedbu.

Važno je napomenuti da se Xcas distribuira pod GNU/GPL licencom, što ga svrstava u tzv. slobodni softver (engl. *free software*). Time je ovaj alat, uključujući i izvorni kod, besplatno dostupan svakome, a posebno studentima. Dodatno, spomenuta licenca omogućava zainteresiranim osobama, npr. nastavnicima, da se uključe u razvoj samoga alata i time doprinesu modernizaciji provođenja matematičkog računa.

U nastavku navodimo nekoliko primjera zadataka koje su, u sklopu seminarskih radova, izradili studenti. Zadatke je trebalo ispravno protumačiti i modelirati na odgovarajući način, a zatim računski složenije dijelove postupka izraditi na računalu. Pritom su od koristi sljedeće naredbe ugrađene u Xcas:

- `limit`, za određivanje granične vrijednosti realne funkcije jedne realne varijable,
- diff i `int`, za određivanje (n-te) derivacije odnosno (određenog) integrala realne funkcije jedne realne varijable,
- `solve`, za rješavanje jednadžbi te sustava polinomijalnih jednadžbi,
- `dsolve`, za rješavanje nekih običnih diferencijalnih jednadžbi prvog i drugog reda (može riješiti sve tipove standardno obrađivane u sklopu nastave),
- `laplace` i `ilaplace`, za određivanje Laplaceovih transformata realnih funkcija odnosno originala transformiranih izraza,
- `plot`, za prikazivanje grafova realnih funkcija jedne realne varijable.

Budući da se ne mora usredotočavati na mehaničke, računske dijelove postupka koje jednostavno treba provesti, student može pažnju usmjeriti na ispravnu primjenu modela, interpretaciju zadanih parametara te organizaciju i detaljni opis postupka rješavanja, kao i odgovarajuće tumačenje dobivenog rješenja. Ukratko, računalo se koristi kad god je to prikladno, a važno je i prije primjene određene naredbe znati, ako je to moguće, da rješenje postoji te da ga dotična naredba može izračunati. Na primjer, naredba `dsolve` može riješiti bilo koju linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda, a nelinearne općenito ne može (izuzetak je npr. Bernoullijeva diferencijalna jednadžba).

Zadatak 1. Zadana je diferencijalna jednadžba

$$x \cdot y' + (1 - x) \cdot y = \frac{x \cdot e^x}{1 + x^2}.$$

a) Odredite opće rješenje gornje jednadžbe.

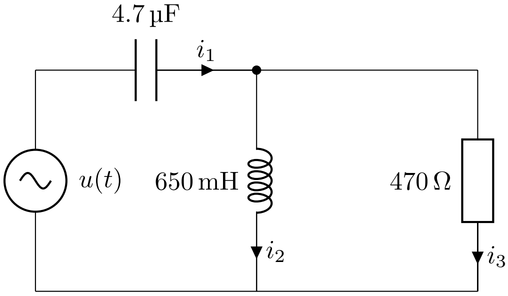
b) Postoji li partikularno rješenje koje se može po neprekidnosti proširiti na čitav skup realnih brojeva? Ako postoji, odredite to proširenje i prikažite ga grafički na segmentu $[-1,1]$.

Postupak rješavanja. Budući da se radi o linearnoj diferencijalnoj jednadžbi prvog reda, opće rješenje dobiva se jednostavno primjenom naredbe `dsolve`. Dobiva se

$$\frac{\left(\ln\left(x^2+1\right)+C\right)\cdot e^x}{2x}.$$

Student treba uočiti da se za različite vrijednosti realne konstante C dobivaju različita partikularna rješenja te da niti jedno nije definirano u točki $x = 0$. Međutim, jedno se partikularno rješenje, naime ono za $C = 0$, može dodefinirati u točki $x = 0$ jer postoji limes u toj točki (za C različito od 0 limes sigurno ne postoji jer je brojnik jednak C za $x = 0$). Taj se limes može odrediti pomoću naredbe `limit`, pa je to partikularno rješenje lako proširiti na skup svih realnih brojeva.

Zadatak 2. Shemom na donjoj slici zadana je RLC mreža s dvije konture.



Napon na izvoru jednak je $u(t) = 120\sin(377t)$ [V]. Odredite struje i_1, i_2 i i_3 u ovisnosti od varijable t te ih prikažite grafički na segmentu od 0 do 15 ms. Zadatak riješite primjenom Laplaceove transformacije. Pretpostavite da su sve struje u trenutku $t = 0$ jednake nuli.

Postupak rješavanja. Problem najprije treba postaviti, koristeći Kirchhoffove zakone, u obliku sustava linearnih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima. Jednadžbe se tada transformiraju Laplaceovom transformacijom uz dane početne uvjete. Prilikom transformiranja desne strane svake jednadžbe koristi se naredba `laplace`. Dobiveni sustav linearnih jednadžbi rješava se pomoću naredbe `solve` ili `linsolve`. Primjenom naredbe `ilaplace` za inverznu Laplaceovu transformaciju dobivaju se tražene struje, čiji se grafovi prikazuju pomoću naredbe `plot`.

Zadatak 3. Veličina P populacije određene vrste ribe u nekom jezeru, izražena u tisućama jedinki, mijenja se prema sljedećem modelu (tzv. *logistički rast*):

$$\frac{dP}{dt} = k\cdot P\cdot\left(1-\frac{P}{L}\right),$$

gdje je t vrijeme u godinama, L gornja granica veličine populacije (budući da jezero ima ograničen kapacitet) i k relativna stopa rasta godišnje. Pretpostavite da je $L = 10$ i $k = 0.3$ te da je u trenutku $t = 0$ u jezero pušteno 2 500 riba.

a) Odredite veličinu P nakon t godina. Prikažite graf te funkcije.

b) Koliko je vremena potrebno da populacija dosegne veličinu od 8 000 jedinki?

c) Dodatno pretpostavite da se riba izlovljava brzinom od 400 komada godišnje. Modificirajte jednadžbu logističkog rasta tako da opisuje ovu varijantu modela i riješite je, pa zatim prikažite graf dobivene funkcije P.

Postupak rješavanja. U podzadatku a) treba postaviti i riješiti Cauchyev problem s početnim uvjetom u $t = 0$. Rješenje se dobiva jednim pozivom naredbe `dsolve`, a graf se prikazuje pomoću naredbe `plot`. Da bi se dobilo vrijeme u podzadatku b), potrebno je riješiti jednadžbu $P(t) = 8$ pomoću naredbe `solve` (rezultat se dobiva u godinama). Na koncu, ako se riba izlovljava konstantnom brzinom, tada brzinu promjene populacije $\mathrm{d}P/\mathrm{d}T$ treba umanjiti za taj iznos (tj. oduzeti 0.4 od desne strane u jednadžbi logističkog rasta). Time jednadžba postaje složenija, ali i dalje se može riješiti metodom separacije varijabli, pa naredba `dsolve` daje točno rješenje.

Zadatak 4. Realna funkcija f zadana je propisom

$$f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right).$$

a) Proširite funkciju f po neprekidnosti do funkcije F definirane na čitavom skupu realnih brojeva.

b) Pokažite da je funkcija F derivabilna u točki $x = 0$ i izračunajte $F'(0)$.

c) Pokažite da graf funkcije F ima točku infleksije s apscisom jednakom 0.

Postupak rješavanja. Funkcija f ima limes 1/2 u točki $x = 0$ (što se dobiva korištenjem naredbe `limit`). Prema tome može se proširiti do funkcije F dodefiniranjem. Da bi se pokazalo da je F derivabilna u $x = 0$, treba primijeniti definiciju i pokazati da postoji limes izraza $(F(h)\text{-}F(0))/h$ kada h teži nuli. Primjenom funkcije `limit` dobiva se rezultat 1/24, što je tražena vrijednost $F'(0)$. Da bi se pokazalo kako F ima infleksiju u točki $x = 0$, treba pokazati da je $F''(0) = 0$ i da $F''(x)$ mijenja predznak kako x prolazi točkom 0. Posljednja tvrdnja slijedi iz činjenice da F' ima lokalni maksimum u $x = 0$ zbog $F'''(0) = -1/480 < 0$.

Literatura:

1. Barragués, J. I., Arrieta, I., Manterola, J.: *Análisis Matemático con soporte interactivo en Moodle*, Pearson, Madrid, 2010.

2. Kadum, V.: *Utjecaj učenja rješavanjem problemskih zadataka na obrazovni učinak u elementarnoj nastavi matematike*, Metodički ogledi: časopis za filozofiju odgoja 2, 12(2006), str. 31. - 60.

3. Kuna, L.: *Kompleksni brojevi u nastavi matematike*, Sveučilište u Osijeku, Osijek 2014.

4. Kurnik, Z.: *Problemska nastava*, MiŠ 15, Zagreb, 2002.
5. Kurnik, Z.: *Heuristička nastava*, MiŠ 34, Zagreb, 2002.
6. Maričić, S.: *Kompleksni brojevi u algebri i teoriji brojeva*, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2014.
7. Marohnić, L., Orlić Bachler, M.: *Applications of free computational software in math courses at Zagreb University of Applied Sciences*, Matematics Education as a Science and a Profession, Osijek: Element, str. 192-204, Osijek, 2017.
8. Matijević, M., Radovanović, D.: *Nastava usmjerena na učenika*, Školske novine, Zagreb, 2011.
9. Mirković, M.: *Nastava usmjerena na učenika*, Pogled kroz prozor, https://pogled-krozprozor.wordpress.com/2012/04/29/nastava-usmjerena-na-ucenika/
10. Morais, A., Barragués, J. I., Guisasola, J.: *Using a Classroom Response System for promoting Interaction to Teaching Mathematics to Large Groups of Undergraduate Students,* Jl. of Computers in Mathematics and Science Teaching, 2015.
11. Parisse, B., De Graeve, R., Giac/Xcas, verzija 1.4.9, http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac.html, 2018.
12. Poljak, V.: *Nastavni sistemi*, Pedagoško-književni zbor, str. 78-79, Zagreb, 1977.