MATEMATIKA IZVAN MATEMATIKE

Diferencijske jednadžbe s prikazom primjene u demografskom modeliranju

Dušan Munđar[1]

Sažetak: Periodičko mjerenje vrijednosti vezanih uz pojavu često je jedan od početnih koraka koji se poduzima kada se želi saznati više o toj pojavi. Takva se mjerenja tada mogu zapisati u obliku niza. Sljedeći korak koji se poduzima je analiza razlika ili promjena između uzastopnih članova toga niza. Ovaj rad prikazuje pristup analizi tih razlika rješavanjem diferencijskih jednadžbi. Pristup je nadogradnja srednjoškolskog gradiva iz nizova, specijalno aritmetičkih i geometrijskih nizova. Na kraju je rada prikazana primjena analiza razlika vrijednosti rješavanjem sustava diferencijskih jednadžbi u svrhu izrade populacijskih projekcija. Rad može poslužiti nastavnicima i učenicima matematike za proširenje znanja iz nizova i praktične primjenjivosti matrica, a stručnjacima iz područja društvenih znanosti može dati uvid u još jedan mogući pristup izrade demografskih projekcija.

1. Uvod

Pretpostavimo da zainteresirani promatrač provodi periodička mjerenja pojave koja ga zanima. Primjerice, to može biti temperatura (na početku svakog sata), visina biljke koju je posadio (mjerena ujutro svakog dana), iznos na štednom računu (prvog dana u mjesecu), broj stanovnika u zemlji (u nekog godini) ili nešto drugo od interesa promatrača. Mjerenje možemo zapisati u obliku niza brojeva, gdje prvi označavamo rednim brojem nula i on predstavlja početno stanje, a ostali dobivaju redni broj n koji ukazuje da je prošlo n vremenskih razdoblja od početnog mjerenja. Matematički, tako zamišljeni niz mjerenja moguće je modelirati kao funkciju $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ za koju nam je poznato samo prvih par mjerenja, a želja nam je saznati pravilnost da bismo mogli odrediti bilo koji član a_n.

Pri proučavanju razlika ili diferencija između uzastopnih članova, $a_{n+1} - a_n$, mogu se pojavljivati različite pravilnosti. Najjednostavniji slučajevi takvih pravilnih

[1]Dušan Munđar, Fakultet organizacije i informatike, Varaždin

Poucak 75.indd 68 17.10.2018. 19:05:00

promjena su: konstantne promjene u apsolutnom iznosu i konstantne promjene u relativnom iznosu. Takvi nizovi obrađuju se kao aritmetički i geometrijski nizovi u sklopu srednjoškolskog obrazovanja. Promjene mogu biti svojevrsna kombinacija relativnih i apsolutnih promjena i njih ćemo proučavati u nastavku rada te ih zapisivati u obliku diferencijskih jednadžbi. Dodatno, uvodimo međusobnu ovisnost vrijednosti više nizova jednostavnim diferencijskim jednadžbama. Za takve nizove prezentiramo rješenja takvih nizova, tj. prezentiramo jednadžbu za opći n-ti član takvog niza ili nizova. Za rješavanje sustava diferencijskih jednadžbi potrebno je poznavanje osnovnih operacija s matricama. Čitatelju se preporuča korištenje nekog od besplatnih programskih rješenja za provođenje istih. Primjeri takvih alata su GeoGebra, Sage, R, Phyton ili neki drugi besplatni alat.

U radu *Matematika u demografiji* (Munđar, 2018.) čitatelji imaju prilike pročitati više o pokazateljima koji se izračunavaju u demografskim analizama te o jednom od mogućih načina izrada projekcija kretanja broja stanovnika, kao i praktičnoj primjene istog za populaciju Republike Hrvatske. Vještina korištenja sustava diferencijskih jednadžbi i osnova matričnog računa analitičaru može ubrzati proces izrade projekcija. Na kraju rada bit će prikazana primjena demografskog modeliranja sustavom diferencijskih jednadžbi za potrebe izrade populacijskih projekcija na zamišljenom primjeru i na primjeru stanovništva Republike Hrvatske.

Sada možemo sažeto prezentirati ciljeve ovoga rada:

1. Ponoviti osnove nizova s naglaskom na aritmetičke i geometrijske nizove
2. Uvesti nizove definirane linearnom diferencijskom jednadžbom i prikazati njihovo rješenje
3. Uvesti sustav linearnih diferencijskih jednadžbi i njegovo rješenje
4. Rješavanjem sustava diferencijskih jednadžbi izraditi demografske projekcije

2. Aritmetički i geometrijski niz kao diferencijske jednadžbe

Aritmetički niz je niz u kojem je razlika (diferencija) između bilo kojeg člana i njegovog prethodnika konstantna. Praktično to znači da se sljedbenik nekog člana niza dobiva dodavanjem (ili oduzimanjem ukoliko je diferencija negativna) uvijek istog broja.

$$y_{n+1} = y_n + d$$

Ukoliko je poznato početno stanje y_0 i diferencija d, tada je moguće odrediti bilo koji član toga niza formulom

$$y_n = y_0 + n \cdot d$$

Geometrijski niz je niz u kojem je kvocijent bilo kojeg člana i njegovog prethodnika konstantan, tj. vrijedi

$$y_{n+1} = y_n \cdot q$$

Praktično to znači da se sljedbenik nekog člana niza dobiva dodavanjem (ili oduzimanjem ukoliko je kvocijent manji od jedan) uvijek istog relativnog dijela a, ($a = q - 1$), toga člana.

$$y_{n+1} - y_n = (q-1)\,y_n = a y_n$$

Ukoliko je poznato početno stanje y_0 i relativno povećanje a ili kvocijent niza q ($q = 1 + a$), tada je moguće odrediti bilo koji član toga niza formulom

$$y_n = y_0 \cdot (1+a)^n = y_0 \cdot q^n$$

3. Diferencijske jednadžbe

Diferencijske jednadžbe opisuju povezanost (ili indirektno razliku) između susjednih članova niza

$$y_{n+1} = f(y_n).$$

Uz konstantne nizove, gdje je svaki član jednak, tj. $y_{n+1} = y_n$, najjednostavnija diferencijska jednadžba je linearna diferencijska jednadžba prvoga reda. U nastavku definiramo linearnu diferencijsku jednadžbu prvoga reda i navodimo opće rješenje takve jednadžbe, tj. formulu za opći član niza koji zadovoljava definiranu jednadžbu.

3.1 Linearne diferencijske jednadžbe prvoga reda

Opći oblik linearne diferencijske jednadžbe glasi

$$y_{t+1} = a y_t + b.$$

Niz je generalizacija aritmetičkog niza i geometrijskog niza. Ukoliko je $a = 1$, dobiva se aritmetički niz, a ukoliko je $b = 0$, dobijemo geometrijski niz. Svi geometrijski i aritmetički nizovi mogu se zapisati kao nizovi definirani linearnom diferencijskom jednadžbom prvog reda.

Jedan niz koji zadovoljava tu jednadžbu (jedno rješenje tog niza) je konstantni niz, tj. $y_n = c$, gdje je $c = \dfrac{b}{1-a}$ za $a \neq 1$. Konstantni niz može se dobiti i za vrijednosti $a = 1$, $b = 0$. Ako je $a = 1$, tada vrijedi $y_{t+1} = y_t + b$. Kao što smo već rekli, u tom se slučaju radi o aritmetičkom nizu.

Homogena jednadžba $y_{t+1} = a y_t$, jednadžba za koju je $b = 0$, ima rješenje $y_{t+1} = y_0 a^t$, gdje je y_0 početna vrijednost.

Poznavanjem jednog posebnog (partikularnog) rješenja i rješenja pripadne homogene diferencijske jednadžbe (jednadžbe za koju je $b = 0$) može se odrediti jednadžba za opći član niza kao zbroj tog posebnog rješenja i rješenja pripadne homogene jednadžbe. Dakle, uz poznavanje početnog člana y_0, opće rješenje, tj. formula za bilo koji član niza u ovisnosti o početnoj vrijednosti i vrijednostima parametara a i b, dobivamo formulom:

$$y_t = y_0 + bt \qquad \text{za } a = 1,$$
$$y_t = \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^t + \frac{b}{1-a} \qquad \text{za } a \neq 1.$$

Zadatak.

Pretpostavimo da imamo početni iznos od 1 000 kn. Od tog iznosa, 900 kn stavimo na štednju te dobivamo kamate od 10 % uloženog iznosa s početka razdoblja za jedno razdoblje. Preostali iznos nije uložen i ne nosi kamate. Odredimo diferencijsku jednadžbu koja opisuje zadani niz.

Rješenje.

Formula za opći član niza glasi $y_n = 900 \cdot 1.1^t + 100,$ jer smo 900 stavili na štednju pa dobivamo pripadne kamate od 10 %, tj. vrijednost raste za 10 % za svako razdoblje. Matematički gledano, radi se o geometrijskom nizu s kvocijentom 1 + 10 % = = 1.1. Na preostalih 100 ne dobivamo kamate, ali ih i dalje imamo pa zato iznos pribrajamo vrijednosti geometrijskoga niza.

Dakle, naše početno stanje je poznato, tj. znamo da je $y_0 = 1\,000$, a = 1.1 jer se iznos na štednji povećava, te iznos koji se ne ukamaćuje (ne množi se brojem 1.1) iznosi $\frac{b}{1-a} = 100$, odakle slijedi b = -10.

Niz zapisan linearnom diferencijskom jednadžbom glasi

$$y_{n+1} = 1.1\,y_n - 10, \qquad y_0 = 1000$$

Provjerite na prvih nekoliko članova da se vrijednosti dobivene diferencijskom jednadžbom i općom jednadžbom ne razlikuju.

U primjeni se češće uspoređivanjem susjednih članova određuju parametri a i b te se prema rješenju pripadne diferencijske jednadžbe zaključuje o formuli za opći član niza.

3.2 Sustavi linearnih diferencijskih jednadžbi prvog reda

Ukoliko želimo modelirati kompliciraniji sustav u kojem vrijednost niza u (t + 1) koraku ovisi linearno o vrijednostima tog niza, ali i o vrijednostima drugih nizova iz prethodnog razdoblja, dolazimo do sustava linearnih diferencijskih jednadžbi.

Pretpostavimo sada da imamo sustav diferencijskih jednadžbi

$$\begin{aligned} z_1^{(t+1)} &= a_{11}z_1^{(t)} + a_{12}z_2^{(t)} + \ldots + a_{1n}z_n^{(t)} + b_1 \\ z_2^{(t+1)} &= a_{21}z_1^{(t)} + a_{22}z_2^{(t)} + \ldots + a_{2n}z_n^{(t)} + b_2 \\ &\vdots \\ z_n^{(t+1)} &= a_{n1}z_1^{(t)} + a_{n2}z_2^{(t)} + \ldots + a_{nn}z_n^{(t)} + b_n \end{aligned}$$

Matrično se jednadžba može zapisati u obliku

$$z_{t+1} = \mathrm{A}z_t + b, \quad t = 0, 1, 2...$$

gdje su $A = [a_{ij}]$, $b = [b_i]$, a $z_0 = [z_i]^0$ je početno stanje procesa.

Rješavanje se provodi slično kao kod jednodimenzijskog slučaja, određivanjem jednog partikularnog (posebnog) i općeg rješenja pripadnog homogenog sustava (b = 0). Partikularno rješenje, koje se dobije za slučaj konstantnih nizova, glasi:

$$z_p = (I - A)^{-1}\, b$$

Homogeni sustav diferencijskih jednadžbi $w_{t+1} = A\, w_t$ ima opće rješenje $w_t = A^t\, w_0$.

Uzimajući u obzir da je z_0 početno stanje, opće rješenje sustav diferencijskih jednadžbi (2) glasi:

$$z_t = \mathrm{A}^t \left(z_0 - z_p\right) + z_p$$

Ako se matrica A može dijagonalizirati, tj. napisati jednadžbom u obliku $S\,\Lambda\, S^{-1}$, gdje je Λ dijagonalna matrica, tada rješenje poprima za brze izračune još pogodniji oblik.

$$z_t = S\,\Lambda^t\, S^{-1}(z_0 - z_p) + z_p$$

Više o rješavanju diferencijskih jednadžbi dostupno je primjerice u (Matejaš, 2018.).

4. Primjer demografskog modeliranja diferencijskim jednadžbama

Prikazani sustavi diferencijskih jednadžbi korisni su za analizu raznih sustava. U nastavku prikazujemo jednu primjenu za analizu populacije, tj. izradu populacijskih projekcija. U prvom koraku kroz jedan izmišljeni primjer prikazujemo pristup, a u nastavku navodeći prave podatke i pozivajući se na postavljene sustave i njihova rješenja prezentiramo relativno grube procjene kretanja broja stanovnika u Republici Hrvatskoj u narednom razdoblju.

Primjer 1. Pretpostavimo da agronom kreće sa sadnjom biljaka čiji je uobičajeni vijek tri godina. Svake godine planira posaditi 1 000 novih biljaka. Neka prvu godinu preživi 60 % novoposađenih biljaka. Sljedeće dvije godine vjerojatnost da biljka opstane u pojedinoj godini neka iznosi 80 %. Vjerojatnosti da biljka starosti tri ili više godina preživi još jednu godinu neka iznosi 10 %. Procijenite koliko će biljaka imati agronom nakon šest godina.

Rješenje.

Budući da smo pretpostavili da je agronom tek krenuo sa sadnjom biljaka, početno stanje je nula, tj. još nema biljaka. Vektorski zapisano početno stanje je $z_0 = (0, 0, 0, 0)$, gdje z_i, $i = 1, ..., 3$ označava broj biljaka pune starosti i-1, a z_4 označava broj biljaka starosti tri godine ili više.

Budući da agronom ne kupuje starije biljke, nego samo sadi 1 000 novih biljka svake godine, ulaz u sustav svake godine je $b = (1000, 0, 0, 0)$.

Sustav diferencijskih jednadžbi tada glasi

$$\begin{aligned} z_1^{(t+1)} &= 1000 \\ z_2^{(t+1)} &= 0.6\, z_1^{(t)} \\ z_3^{(t+1)} &= 0.8\, z_2^{(t)} \\ z_4^{(t+1)} &= 0.8\, z_3^{(t)} + 0.1\, z_4^{(t)} \end{aligned}$$

Matrica sustava diferencijskih jednadžbi glasi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Ukoliko želimo procijeniti koliko će biljaka imati u prvih šest godina, potrebno je za t = 1, ...,6 izračunati izraz

$$z_t = A^t \left(z_0 - z_p\right) + z_p$$

i izračunati zbroj komponenti vektora z_t. Za izračun vektora z_t potreban je vektor z_p koji iznosi

$$z_p = \left(I - A\right)^{-1} b = \left(1000, 600, 480, 427\right)$$

Prikaz ukupnog broja biljaka po godinama, zbroj komponenti vektora z_p, prikazan je sljedećoj tablici:

Godina	Procjena ukupnog broja biljaka	Godina	Procjena ukupnog broja biljaka
1	1 000	4	2 464
2	1 600	5	2 502
3	2 080	6	2 506

Zaključujemo da se broj biljaka kroz godine stabilizira. Očekivani broj biljaka pojedine starosti nakon razdoblja stabiliziranja sadržan je u vektoru z_p. Ukupan broj se u ovom slučaju stabilizira oko broja 2 507.

U radu (Munđar, 2018.) prikazana je izrada demografskih projekcija korištenjem tabličnog kalkulatora te je više pažnje posvećeno demografskim pokazateljima. Jednostavniji, ali u prvoj fazi manje prilagodljivi model može se izraditi korištenjem diferencijskih jednadžbi kao u prethodnom zadatku.

Primjer 2. Izrada demografskih projekcija rješavanjem sustava diferencijskih jednadžbi.

Prikažimo sada izradu slične projekcije na slučaju populacije Republike Hrvatske.

Neka je $z_0 = \left[z_i \right]^0$ vektor veličina populacije pojedine dobi. Na i-toj komponenti neka je broj stanovnika dobi *i-1*. Na mjestu $i = 1$ nalazi se broj osoba koje su u navedenoj godini bile mlađe od godinu dana (starosti 0). Na mjesto $i = 106$ nalazi se broj osoba starosti 105 ili više godina. Budući da nemamo prave podatke za 2017. godinu, uzet ćemo da je stanje kako je evidentirano pri popisu stanovništva 2011. godine, a dostupno je u (DZS, 2013).

Matrica $A = \left[a_{ij} \right]$ je matrica sustava diferencijskih jednadžbi, tj. matrica prijelaza iz pojedine dobne skupine u dobnu skupinu veće vrijednosti. Matrica A ima ne nul-vrijednosti na pozicijama $a_{i+1,i}$ koje predstavljaju vjerojatnost da osoba prijeđe u sljedećoj godini u skupinu godinu dana starijih osoba. Osim spomenutih vrijednosti, jedina dodatna vrijednost koja je različita od nule je vrijednost $a_{106,106}$ koja predstavlja vjerojatnost da osoba u dobnoj skupini 105+ ostane i sljedeće godine u toj dobnoj skupini. Vjerojatnosti se mogu procijeniti korištenjem vjerojatnosti doživljenja dobi $x + 1$ za osobe starosti x, u oznaci p_x, za muško i žensko stanovništvo iz Tablica mortaliteta DZS-a. (DZS, 2014). Može se primijetiti da je konstrukcija matrice A analogna konstrukciji matrice sustava u prethodnom primjeru, samo što se broj stanja i vjerojatnosti razliku.

Vektor b (vektor broja novorođenih i neto migracija u ovom slučaju nećemo detaljnije razmatrati budući da ne želimo značajnije ulaziti u područje demografije. Pretpostavljamo da se svake godine rodi isti broj osoba i da je neto migracija po ostalim dobima jednaka nula. Dakle, vektor b samo na prvoj komponenti ima vrijednost različitu od nule i neka ona iznosi 38 000, što odražava broj novorođenih osoba u jednoj godini. Broj 38 000 kao procjena broja novorođenih uzet je jer se u 2017. godini u Republici Hrvatskoj rodilo 37 537 osoba.

Nakon izračuna prema formuli za opće rješenje diferencijskih jednadžbi, u sljedećoj tablici prikazujemo očekivani ukupan broj osoba u Republici Hrvatskoj za idućih 30 godina.

Godina	Procjena veličine populacije	Godina	Procjena veličine populacije	Godina	Procjena veličine populacije
2018.	4 182 840	2028.	3 984 551	2038.	3 759 142
2019.	4 164 817	2029.	3 963 250	2039.	3 735 144
2020.	4 146 214	2030.	3 941 711	2040.	3 711 020
2021.	4 127 115	2031.	3 919 913	2041.	3 686 839
2022.	4 107 600	2032.	3 897 839	2042.	3 662 675
2023.	4 087 734	2033.	3 875 470	2043.	3 638 596
2024.	4 067 575	2034.	3 852 795	2044.	3 614 676
2025.	4 047 158	2035.	3 829 810	2045.	3 590 981
2026.	4 026 507	2036.	3 806 522	2046.	3 567 575
2027.	4 005 636	2037.	3 782 953	2047.	3 544 510

Izrađene projekcije zainteresirani čitatelj može usporediti s projekcijama Državnog zavoda za statistiku (DZS, 2011.). Prema rezultatima sustava diferencijalnih jednadžbi možemo zaključiti da će se ukupan broj stanovnika smanjivati. Pri tome treba uzeti u obzir da model ne uzima u obzir emigraciju ($b_i = 0$ za $i > 1$) koja je u posljednje vrijeme dosta intenzivna. Više o tematici utjecaja demografskih promjena na obrazovni i mirovinski sustav zainteresirani čitatelj može primjerice pročitati u radovima (Munđar, 2017.) i (Munđar, Zrinski, 2017.).

5. Zaključak

U radu smo čitatelja upoznali s pojmom diferencijskih jednadžbi i dodatno analizirali posebne slučajeve diferencijskih jednadžbi, linearne diferencijske jednadžbe. Diferencijske jednadžbe povezali smo s gradivom koje se obrađuje u sklopu srednjoškolskog obrazovanja, tj. s gradivom iz aritmetičkih i geometrijskih nizova. Primjenu rješenja diferencijskih jednadžbi i sustava diferencijskih jednadžbi prikazali smo na primjerima, od čega se posebni naglasak stavio na izradu populacijskih projekcija pomoću sustava diferencijskih jednadžbi.

Literatura:

1. DZS (2013.), *Popis stanovništva, kućanstava i stanova 2011. Stanovništvo prema spolu i starosti*, Državni zavod za statistiku, Zagreb www.dzs.hr (26. 2. 2018.)
2. DZS (2011.), *Projekcije stanovništva Republike Hrvatske od 2010. do 2061.*, Državni zavod za statistiku Republike Hrvatske, Zagreb, 2011. www.dzs.hr (26. 2. 2018.)

3. DZS (2014.), *Tablice mortaliteta Republike Hrvatske od 2010. do 2012.*, Državni zavod za statistiku, Zagreb, www.dzs.hr (16. 2. 2018.)

4. Matejaš, J. (2018.), *Matematičke metode za ekonomske analize*, skripta iz istoimenog predmeta na poslijediplomskom specijalističkom studiju Statističke metode za ekonomske analize i prognoziranje, Ekonomski fakultet Zagreb.

5. Munđar, D. (2018.), *Matematika u demografiji: opis strukture stanovništva i izrada projekcija*, Matematika i škola, br. 93; str. 114-120.

6. Munđar, D. (2017.), *Utjecaj demografskih trendova na mirovinski i obrazovni sustav*, Informator: poslovno-pravni magazin, br. 6492, str. 5-7.

7. Munđar, D., Zrinski, Z. (2017.), *Mirovina iz drugog stupa mirovinskog osiguranja – očekivane isplate osiguraniku*, Računovodstvo i financije, br. 7, str. 125-128.