Matematika u tangramu, tangram u matematici[1]

Nives Baranović[2] i Sanja Lehman[3]

Sažetak: Ponekad je dovoljno samo malo volje i mašte da se stare ili već viđene stvari prikažu uz pomoć novih nastavnih sredstava te da se tako razbije svakodnevna monotonija izlaganja, poučavanja i rješavanja matematičkih zadataka. Drugačiji pristup starom problemu utječe na stvaranje pozitivnoga radnog ozračja i pomaže postizanju uspješnih ishoda učenja.

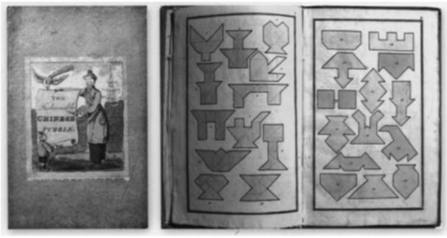
Iako drevna kineska slagalica poznata pod nazivom *tangram* na prvi pogled ne izgleda kao ozbiljan matematički alat, sustavnim istraživanjem i dubljom analizom pokazuje se da se taj skup od sedam jednostavnih geometrijskih likova može pretvoriti u inovativno nastavno sredstvo prilagodljivo svim uzrastima.

U ovom radu daje se rekonstrukcija i detaljna razrada starog problema o konveksnim tangram likovima. Cilj rada je primjenom vizualno-analitičke metode i metode razlikovanja slučajeva omogućiti uvid u matematičku snagu i nastavni potencijal tangram slagalice svakom čitatelju koji traži odgovor na pitanje zašto se pomoću te slagalice može oblikovati na tisuće različitih tangram likova, a konveksnih samo trinaest.

Ključni pojmovi: metoda razlikovanja slučajeva; geometrija; teorem o tangramu; vizualno-analitička metoda.

1. Uvod

Prije točno 200 godina, 1818. godine, na prostorima Europe objavljen je prvi pisani trag o drevnoj kineskoj slagalici *tangram*, iako je sama ideja mnogo starija (Slika 1.).



Slika 1. Naslovnica i zagonetke iz knjige Moderna kineska slagalica[4]

[1]Predavanje održano na 8. kongresu nastavnika matematike RH, 2018. godine u Zagrebu

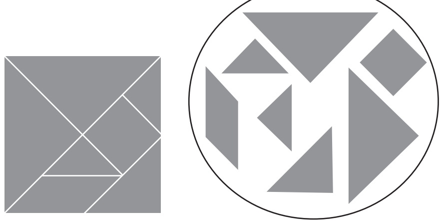
[1]Nives Baranović, Filozofski fakultet u Splitu, Split

[3]Sanja Lehman, IV. gimnazija Marko Marulić, Split

[4]Slika preuzeta iz [5, str. 46].

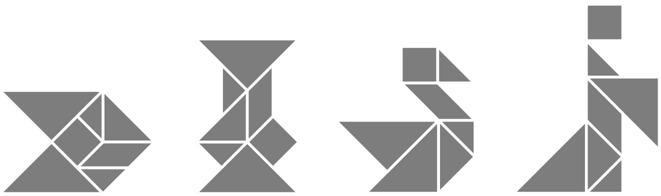
O samom nastanku tangram slagalice ne zna se baš mnogo pa je to prikladan prostor za stvaranje raznih priča i legendi koje se u nedostatku dokaza ne mogu ni potvrditi niti odbaciti. Međutim, sve priče o tangram slagalici slažu se u jednom: slagalica je vrlo jednostavna, a istodobno dovoljno intrigantna i poticajna. Zbog nepobitno zabavnog karaktera, tangram slagalica se s Istoka brzo proširila u sve dijelove svijeta i prihvaćena je u svim strukturama društva, a „tangram groznica" traje i danas (vidjeti [2], [3], [5]).

Ako se kvadratna ploča razreže kao na Slici 2., dobiva se sedam dijelova među kojima je 5 jednakokračnih pravokutnih trokuta, jedan kvadrat i jedan paralelogram. Skup od tih sedam geometrijskih likova čini *tangram* slagalicu. Svaki dio slagalice naziva se *tan*, a lik oblikovan od svih sedam tanova zovemo *tangram lik*.



Slika 2. Tangram kvadrat i tanovi

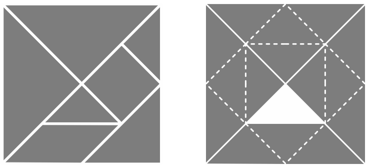
Na prvi pogled moglo bi se reći da tu i nema ničeg interesantnog, samo sedam običnih geometrijskih likova od kojih se može oblikovati na tisuće raznovrsnih tangram figura koje prikazuju znakove, predmete, životinje, osobe, itd. (Slika 3.). Ali, ako se pozornost usmjeri na odgovarajuće odnose među tanovima ili se proučavaju figure pod određenim ograničenjima, brzo se uočava prostor za otkrivanje raznih pravilnosti i zakonitosti, čime se otvaraju mogućnosti za primjenu u nastavi matematike, posebno geometrije.



Slika 3. Tangram figure

Može se, na primjer, istražiti u kakvom su odnosu stranice i površine tanova, na koliko se različitih načina pomoću tanova može oblikovati trokut, pravokutnik, paralelogram, trapez i sl., ima li među njima sukladnih ili sličnih, u kavom su odnosu njihovi opsezi, površine itd. Glavno pitanje ovog rada je: kako odrediti točan broj različitih konveksnih tangram likova i kako to dokazati?

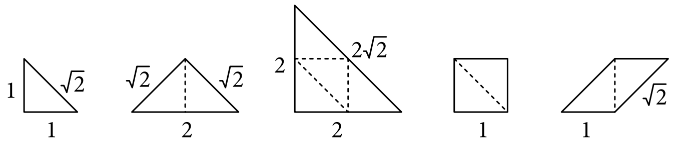
Kako bismo odgovorili na to pitanje, razrežimo sve tanove na male tan trokute (Slika 4.). Može se uočiti da tan kvadrat, tan srednji trokut i tan paralelogram imaju dvostruko veću, dok veliki tan trokut ima četverostruko veću površinu od malog tan trokuta. To znači da je površina svakog tangram lika, bio on konveksan ili ne, 16 puta veća od površine malog tan trokuta.



(a) (b)

Slika 4. Tangram kvadrat podijeljen na male tan trokute

Nadalje, svi trokuti su jednakokračni pravokutni pa su međusobno slični (jer su im mjere odgovarajućih kutova jednake: 45°, 45° i 90°), a među njima se nalaze i dva para sukladnih trokuta. Zbog sličnosti se daljnje razmatranje, bez smanjenja općenitosti, može temeljiti na mjerama malog tan trokuta. Ako uzmemo da je tan kvadrat jedinični kvadrat, onda su nam poznate mjere stranica svih tanova (Slika 5.), kao i mjere njihovih površina. U tom slučaju, mjera površine bilo kojeg tangram lika je 8.



Slika 5. Osnovne karakteristike tanova

Kako bismo doznali koliko se konveksnih tangram likova može oblikovati, prvo ćemo razmatrati oblikovanje konveksnih likova pomoću 16 malih tan trokuta, a zatim isključiti one koji se ne mogu prekriti tanovima, tj. one koji nisu tangram likovi.

S obzirom da su duljine kateta malog tan trokuta racionalni brojevi, a duljina hipotenuze iracionalan broj, iz praktičnih razloga katete malog trokuta u nastavku rada nazivat će se *racionalnim stranicama*, a hipotenuza *iracionalnom stranicom*.

2. Rekonstrukcija teorema o tangramu

Polazeći od prethodno opisanih karakteristika, kineski matematičari Tsiang Wang i Chuan-Chih Hsiung još su 1942. godine postavili i dokazali teorem o tangramu.

Teorem: *Pomoću tangram slagalice može se oblikovati točno 13 konveksnih tangram likova.*

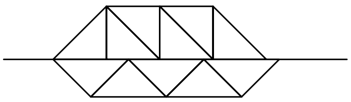
Dokaz teorema temelji se na četiri leme i diofantskoj jednadžbi sa 6 nepoznanica i četiri uvjeta. Rješavanjem postavljene jednadžbe dobiva se skup od 20 rješenja koji predstavlja 20 konveksnih likova, među kojima je samo 13 onih koji se u potpunosti mogu prekriti tanovima.

S obzirom da objavljeni dokaz nije cjelovito prikazan, a ispušteni dijelovi nisu trivijalni, cilj ovog rada je provesti potpunu analizu rješavanja postavljene jednadžbe te svako pojedino rješenje popratiti vizualnim prikazom i komentarom te na taj način dati potpunu i detaljnu rekonstrukciju lema i dokaza teorema.

Lema 1. *Ako sa 16 međusobno sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta oblikujemo konveksan lik, onda racionalna stranica jednog trokuta ne može biti postavljena uz iracionalnu stranicu drugog trokuta.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da se slaganjem racionalne stranice jednog trokuta uz iracionalnu stranicu drugog trokuta može formirati konveksan lik.

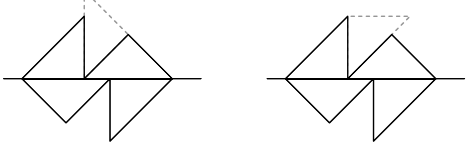
(a) Uzmimo jedan pravac te uz njega slažimo trokute tako da s jedne strane pravca budu racionalne stranice trokuta, a s druge strane iracionalne stranice, počevši od iste točke pravca, popunjavajući i praznine do konveksnog lika (Slika 6.). Kada posložimo svih 16 trokuta na takav način, krajnji vrhovi trokuta s obje strane pravca trebali bi se podudarati jer je prema pretpostavci dobiveni lik konveksan. Pritom će uz pravac s jedne strane biti m racionalnih stranica trokuta, a s druge strane n iracionalnih stranica, $m+n<16, m,n \in \mathbb{N}$.



Slika 6. Jednoliko slaganje trokuta uz pravac

Ako je racionalna stranica trokuta kateta duljine a, onda je iracionalna stranica trokuta hipotenuza duljine $a\sqrt{2}$. Prema opisanom slaganju vrijedi: $m \cdot a = n \cdot a\sqrt{2}$, odnosno $m = n\sqrt{2}$, a to nije moguće jer je lijeva strana jednakosti prirodan broj, a desna iracionalan broj, što je kontradikcija s polaznom pretpostavkom. Dakle, polazna pretpostavka nije točna, tj. slaganjem trokuta na ovaj način ne bi se dobio konveksan lik.

(b) Slaganje uz pravac može se vršiti i naizmjenično, tako da se par racionalne i iracionalne stranice s jedne strane pravca podudara s parom racionalne i iracionalne stra-

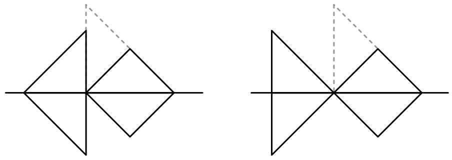


Slika 7. Naizmjenično slaganje trokuta uz pravac, u suprotnom poretku

nice s druge strane pravca, u suprotnom poretku. U ovom slučaju početne i završne točke trokuta se podudaraju, ali ostaju praznine koje treba popuniti. (Slika 7.)

S obzirom da prazninu oblikuju racionalne stranice pod kutom od 45°, a u malom trokutu kut od 45° zatvara jedna racionalna i jedna iracionalna stranica, kako god prazninu popunili malim trokutom, jedna racionalna stranica past će uz iracionalnu te nastali lik neće biti konveksan (Slika 7.). Nastavljanjem ovog postupka dok se ne iskoristi svih 16 malih trokuta ne dobiva se konveksan lik.

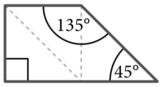
(c) Naizmjenično slaganje uz pravac, tako da se par racionalne i iracionalne stranice s jedne strane pravca podudara s parom racionalne i iracionalne stranice s druge strane pravca, može se vršiti i u istom poretku, i opet s istim ishodom (Slika 8.).



Slika 8. Naizmjenično slaganje trokuta uz pravac, u istom poretku

Dakle, ako se pomoću opisanih 16 trokuta želi oblikovati konveksan lik, onda se racionalna stranica trokuta mora složiti uz racionalnu stranicu, a iracionalna uz iracionalnu.■

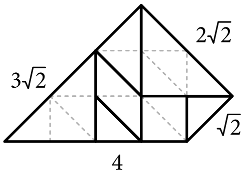
Poštujući svojstvo iskazano u Lemi 1, pri slaganju malih jednakokračnih pravokutnih trokuta u konveksan lik može se uočiti još jedna pravilnost: unutarnji kutovi tako oblikovanog konveksnog lika mogu biti 45°, 90° ili 135° (Slika 9.).



Slika 9. Unutarnji kutovi konveksnog lika

Neposredna posljedica prethodno opisanih svojstava iskazana je u sljedećoj lemi, što nije potrebno dokazivati.

Lema 2. *Ako sa 16 međusobno sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta oblikujemo konveksan lik, onda je svaka stranica tog lika sastavljena od racionalnih ili iracionalnih stranica polaznih trokuta. Štoviše, ako su stranice konveksnog lika različitih vrsta, one se izmjenjuju (alterniraju), osim u slučaju kada je kut konveksnog lika pravi kut* (Slika 10.).



Slika 10. Raspored stranica konveksnog lika

Lema 3: *Ako sa 16 međusobno sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta oblikujemo konveksni lik, onda taj lik može biti najviše osmerokut.*

Dokaz:

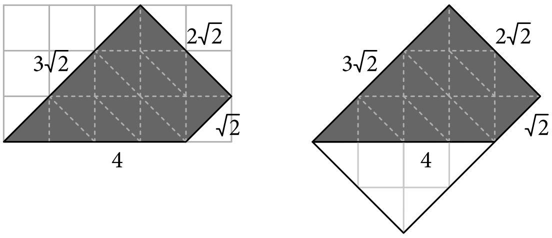
Prvi način: Zbroj svih unutarnjih kutova nekog n-terokuta iznosi $(n-2)\cdot 180°$, a kako je najveći kut koji se može oblikovati pomoću manjih trokuta 135°, zbroj svih unutarnjih kutova ne može premašiti $135°\cdot n$ pa vrijedi: $(n-2)\cdot 180° \le 135°\cdot n$, tj. $n \le 8$. To znači da se od malih jednakokračnih pravokutnih trokuta može oblikovati najviše osmerokut.

Drugi način: Neka je q broj kutova konveksnog lika od 45°, p broj kutova od 90°, a r broj kutova od 135°. Vrijede sljedeće jednakosti:

$$p+q+r=n$$
$$p\cdot 90°+q\cdot 45°+r\cdot 135°=(n-2)\cdot 180°$$

pri čemu su p, q i r nenegativni cijeli brojevi. Rješavanjem ovog sustava eliminiranjem jedne nepoznanice, npr. r, dobiva se: $p+2q=8-n$. Kako je $p,q\ge 0$, to je $8-n\ge 0$, odnosno $n\le 8$. Dakle, od malih jednakokračnih pravokutnih trokuta može se oblikovati najviše osmerokut. ■

Lema 4. *Ako sa 16 međusobno sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta oblikujemo konveksni lik, onda se taj lik može upisati u pravokutnik tako da sve racionalne stranice (ili sve iracionalne stranice) pripadaju stranicama pravokutnika.*



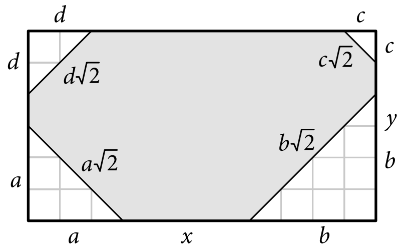
Slika 11. *Konveksan lik upisan u pravokutnik*

Svojstvo iskazano u ovoj lemi neposredna je posljedica prethodno opisanih svojstava. Na Slici 11. prikazano je kako se konveksan lik sa Slike 10. može upisati u pravokutnik tako da racionalne stranice pripadaju stranicama pravokutnika (lijeva slika), odnosno da iracionalne stranice pripadaju stranicama pravokutnika (desna slika). U oba slučaja dijelovi koji nadopunjuju konveksan lik do pravokutnika su jednakokračni pravokutni trokuti. Ukoliko je iracionalna stranica konveksnog lika $a\sqrt{2}$, duljine kateta tih trokuta su a (Slika 11., lijevo).

Dokaz teorema:

Prema lemi 3, najveći mogući konveksni lik koji se može oblikovati sa 16 sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta je osmerokut, a prema lemi 4 taj konveksni lik možemo, bez smanjenja općenitosti, upisati u pravokutnik tako da racionalne stranice osmerokuta pripadaju stranicama pravokutnika. Prema Lemi 2, racionalne (iracionalne) stranice konveksnog osmerokuta sastavljene su od racionalnih (iracionalnih) stranica malih jednakokračnih pravokutnih trokuta te se istovrsne stranice u konveksnom liku nalaze pod pravim kutom ili su paralelne, a stranice različitih vrsta zatvaraju kut od 45° ili 135°.

Neka su duljine stranica promatranog pravokutnika x i y, a duljine iracionalnih stranica upisanog konveksnog lika $a\sqrt{2}, b\sqrt{2}, c\sqrt{2}, d\sqrt{2}$ redom. Tada su duljine kateta jednakokračnih pravokutnih trokuta, koji upisani lik nadopunjuju do pravokutnika, a, b, c i d redom te vrijedi $a,b,c,d \in \mathbb{N}_0$ (Slika 12.).



Slika 12. Konveksni osmerokut upisan u pravokutnik

Kako je površina osnovnog trokuta 0.5 kvadratnih jedinica, a upisani konveksni lik sastavljen je od 16 osnovnih trokuta, površina konveksnog lika je 8 kvadratnih jedinica. Površina konveksnog lika može se odrediti i oduzimanjem površina rubnih jednakokračnih pravokutnih trokuta duljina kateta a, b, c i d od površine pravokutnika, te vrijedi:

$$x \cdot y - \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{d^2}{2} = 8$$

odnosno: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2xy - 16$, $x, y \in \mathbb{N}$, $a,b,c,d \in \mathbb{N}_0$ (1)

Osim toga, za duljine stranica pravokutnika i duljine kateta a, b, c i d rubnih jednakokračnih pravokutnih trokuta vrijedi:

$$\begin{cases} a + b \le x,\ c + d \le x \\ a + d \le y,\ b + c \le y \end{cases} \qquad (2)$$

Kako bismo odredili sve konveksne likove koje je moguće sastaviti pomoću 16 sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta duljina kateta 1, potrebno je odrediti cjelobrojna rješenja jednadžbe (1) uz uvjete (2), tj. treba odrediti sve uređene šestorke (x, y, a, b, c, d) koje ispunjavaju (1) i (2). Bez smanjenja općenitosti može se pretpostaviti da je $x \ge y$, pa rješenja određujemo promatranjem dvaju slučajeva: $x = y$ i $x > y$.

Prvi slučaj: $x = y$.

Sada jednadžba (1) prelazi u $a^2+b^2+c^2+d^2=2x^2-16$. Kako su a, b, c i d nenegativni brojevi, mora vrijediti $2x^2-16\ge 0$, iz čega slijedi da je $x\ge 3$. Dalje se mogu razmatrati tri slučaja: kada su svi a, b, c i d jednaki 0, zatim kada nisu svi nula i manji su od x, te kada je barem jedan od njih jednak x.

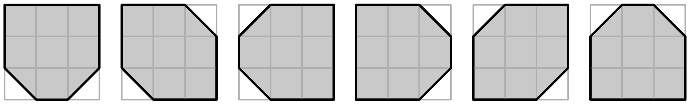
1. Neka je $a=b=c=d=0$. Tada iz (1) dobivamo $2x^2=16$, odnosno $x=2\sqrt{2}\notin\mathbb{N}$. Kako su duljine stranica prirodni brojevi, u ovom slučaju jednadžba nema cjelobrojna rješenja, tj. konveksan lik ne može biti kvadrat s racionalnim stranicama.

2. Neka je $a,b,c,d<x$ i neka je barem jedan od njih različit od 0. Tada vrijede nejednakosti[4]:

$$\begin{cases} a^2+b^2\le (x-1)^2+1 \\ c^2+d^2\le (x-1)^2+1 \end{cases} \tag{3}$$

Njihovim se zbrajanjem dobiva $2x^2-16\le 2(x-1)^2+2$, iz čega slijedi da je $x\le 5$, a s obzirom da površina pravokutnika, u ovom slučaju kvadrata, mora biti barem 8, vrijedi: $3\le x\le 5$.

2.1. Za $x = 3$ jednadžba (1) prelazi u $a^2+b^2+c^2+d^2=2$. Kako je $2=1^2+1^2$ i s obzirom na uvjet (2), $a+b\le 3, a+d\le 3, b+c\le 3, c+d\le 3$, dobivena jednakost bit će ispunjena samo ako za dva broja uzmemo po 1, a za preostala dva 0. Sva moguća rješenja jednadžbe (1) u ovom slučaju su: (3, 3, 1, 1, 0, 0), (3, 3, 1, 0, 1, 0), (3, 3, 1, 0, 0, 1), (3, 3, 0, 1, 1, 0), (3, 3, 0, 1, 0, 1) i (3, 3, 0, 0, 1, 1).

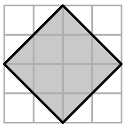


Slika 13. Konveksni likovi za $x = y = 3$

Pritom 1., 3., 4. i 6. šestorka brojeva određuju sukladne konveksne likove pa se za daljnje razmatranje odabire samo jedna od njih. Analogno, 2. i 5. šestorka brojeva određuju dva nova sukladna konveksna lika te će se za daljnje razmatranje odabrati samo jedna od njih (Slika 13.). Dakle, radi se o dva konveksna šesterokuta.

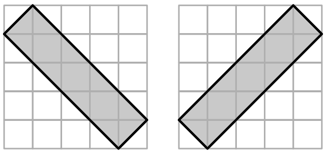
2.2. Za $x = 4$ jednadžba (1) prelazi u $a^2+b^2+c^2+d^2=16$. Kako je $16 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2$ ili $16 = 4^2$, uz uvjet $a,b,c,d<x$ te uz uvjet (2), $a + b\le 4$, $a + d\le 4$, $b + c\le 4$, $c + d\le 4$, to je moguće samo za $a=b=c=d=2$. Dakle, rješenje jednadžbe (1) u ovom slučaju je (4, 4, 2, 2, 2, 2), a konveksni lik je kvadrat s iracionalnim stranicama (Slika 14.).

[4]Dokaz nejednakosti (3) dan je nakon razmatranja svih slučajeva.



Slika 14. Konveksni lik za x = y = 4

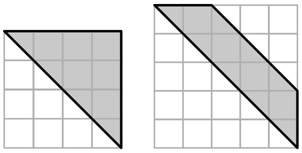
2.3. Za $x = 5$ jednadžba (1) prelazi u $a^2+b^2+c^2+d^2=34$. Kako je $34 = 4^2 + 4^2 + 1^2 + 1^2$, uz uvjete (2), $a+b\le 5, a+d\le 5, b+c\le 5, c+d\le 5$, moguća su dva rješenja: (5, 5, 4, 1, 4, 1) i (5, 5, 1, 4, 1, 4). Dakle, radi se o dva pravokutnika s iracionalnim stranicama (Slika 15.).



Slika 15. Konveksni likovi za x = y = 5

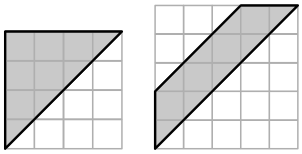
3. Promotrimo još slučaj kada je jedan od brojeva a, b, c, d jednak x. Naime, ako bi dva broja bila jednaka x, npr. $a = b = x$, onda bi jednadžba (1) prešla u $c^2+d^2=-16$, što je nemoguće. Analogno, niti bilo koja tri od brojeva a, b, c, d ne mogu biti jednaki kao x, niti sva četiri broja.

   3.1. Neka je $a = x$. Sada iz uvjeta (2) slijedi da je $b = 0$, $d = 0$ i $c < x$ pa jednadžba (1) prelazi u $x^2=c^2+16$. Ova jednakost moguća je za $x = 4$ i $c = 0$ te za $x = 5$ i $c = 3$. U prvom je slučaju rješenje jednadžbe (4, 4, 4, 0, 0, 0), a u drugome slučaju (5, 5, 5, 0, 3, 0). Dakle, radi se o jednakokračnom pravokutnom trokutu i jednakokračnom trapezu (Slika 16.).



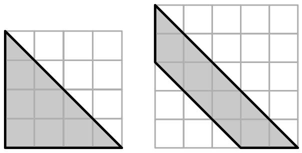
Slika 16. Konveksni likovi za a = x = y

   3.2. Neka je $b = x$. Analognim razmatranjem, uz uvjete (2), dobivaju se još dva rješenja jednadžbe (1): (4, 4, 0, 4, 0, 0) i (5, 5, 0, 5, 0, 3), koja određuju jedan novi trokut i jednakokračni trapez (Slika 17.).



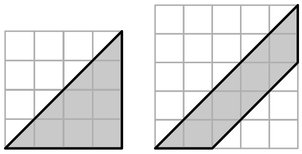
Slika 17. Konveksni likovi za b = x = y

3.3. Neka je $c = x$. Analogno, jednadžba (1) uz uvjete (2) ima još dva rješenja: (4, 4, 0, 0, 4, 0) i (5, 5, 3, 0, 5, 0), koja određuju još jedan trokut i još jedan jednakokračni trapez (Slika 18.).



Slika 18. Konveksni likovi za c = x = y

3.4. Neka je $d = x$. Analogno, jednadžba (1) uz uvjete (2) ima još dva rješenja: (4, 4, 0, 0, 0, 4) i (5, 5, 0, 3, 0, 5), koja određuju po još jedan trokut i jednakokračni trapez (Slika 19.).



Slika 19. Konveksni likovi za d = x = y

S obzirom da u ova četiri slučaja uređene šestorke određuju četiri sukladna jednakokračna pravokutna trokuta i četiri sukladna jednakokračna trapeza, za daljnje razmatranje uzet će se samo po jedan od njih.

Dokaz nejednakosti (3): Neka je $a, b, c, d < x$. Tada je: $a,b,c,d \leq x-1$.

1. Ako su oba broja uz istu stranicu pravokutnika jednaka 0, npr. ako je $a = b = 0$, onda je prva od nejednakosti (3) očita jer je lijeva strana nejednakosti 0, dok je desna barem 1.
2. Ako je bar jedan od brojeva uz istu stranicu pravokutnika različit od 0, onda imamo dvije mogućnosti.

   2.1. Jedan od brojeva uz istu stranicu pravokutnika je 0, a drugi je različit od 0. Uzmimo npr. slučaj da je $a \neq 0,\ b = 0.$ Tada je: $a^2 + b^2 = a^2 \leq \left(x-1\right)^2 < \left(x-1\right)^2 + 1$ pa prva nejednakost u (3) vrijedi.

2.2. Oba su broja uz istu stranicu pravokutnika različita od 0, tj. $a \neq 0, b \neq 0$. Tada vrijedi: $a \geq 1, b \geq 1$. Ako je $b = 1$, onda je prva nejednakost u (3) ekvivalentna s $a^2 \leq (x-1)^2$, a to vrijedi jer je $a \leq x-1$. Ako je $b > 1$, onda je $b-1>0$, pa vrijede sljedeće nejednakosti:

$$\begin{aligned}
&2a \geq 2\\
&2a-1 \geq 1\\
&2a+b-1 \geq b+1 \quad \Big| \cdot (b-1),\ b-1>0\\
&(2a+b-1)(b-1) \geq (b+1)(b-1)\\
&(a+b-1+a)(a+b-1-a) \geq b^2-1\\
&(a+b-1)^2 - a^2 \geq b^2-1\\
&(a+b-1)^2 + 1 \geq a^2+b^2\\
&a^2+b^2 \leq (a+b-1)^2+1 \leq (x-1)^2+1.
\end{aligned}$$

Dakle, prva nejednakost u (3) vrijedi. Analognim razmatranjem dobiva se i druga nejednakost u (3). ■

Za druge parove brojeva vrijede analogne nejednakosti: $\begin{cases} a^2+d^2 \leq (y-1)^2+1 \\ b^2+c^2 \leq (y-1)^2+1 \end{cases}$. (3')

Drugi slučaj: $x > y$

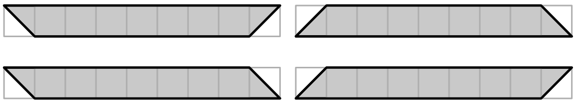
S obzirom da slažemo 16 sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta kateta duljine 1, koji oblikuju konveksni lik površine 8, za stranice pravokutnika mora vrijediti: $1 \leq y < x \leq 9$ (vidjeti Sliku 9.).

1. Ako uzmemo da je $y = 1$, onda među uvjetima (2) imamo sljedeće dvije nejednakosti: $a+d \leq 1, b+c \leq 1$, što je moguće ako su sva četiri broja 0 ili ako je jedan broj u paru (a,d) i (b,c) jednak 0, a drugi 1.

1.1. Ako je $a = b = c = d = 0$, onda iz jednadžbe (1) dobivamo $2x - 16 = 0$, tj. $x = 8$, pa je rješenje jednadžbe (8, 1, 0, 0, 0, 0). Dakle, radi se o pravokutniku s racionalnim stranicama (Slika 20.).

Slika 20. Konveksni lik za x = 8 i y = 1

1.2. U drugom slučaju, kada su dva broja 0, a druga dva 1, jednadžba (1) prelazi u $2x - 16 = 2$, odnosno $x = 9$, pa su moguća četiri rješenja jednadžbe: (9, 1, 1, 1, 0, 0), (9, 1, 0, 0, 1, 1), (9, 1, 1, 0, 1, 0) i (9, 1, 0, 1, 0, 1). Kako prve dvije šestorke određuju sukladne konveksne likove, a druge dvije šestorke druge sukladne konveksne likove, dovoljno je razmatrati samo po jednu od njih (Slika 21.).

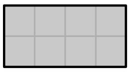


Slika 21. Konveksni likovi za x = 9 i y = 1

2. Promotrimo nadalje slučajeve za koje je $1 < y < x \leq 5$. Za desnu stranu jednakosti (1) mora vrijediti $2xy - 16 \geq 0$, odnosno $xy \geq 8$ pa preostaje ispitati nekoliko mogućnosti.

<u>2.1.</u> Ako je $y = 2$, onda je $x = 4$ ili $x = 5$.

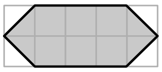
<u>2.1.1.</u> Za $x = 4$ i $y = 2$, jednadžba (1) prelazi u $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$, što je moguće za $a = b = c = d = 0$, pa je rješenje jednadžbe (4, 2, 0, 0, 0, 0). Radi se o pravokutniku s racionalnim stranicama (Slika 22.).



Slika 22. Konveksni lik za x = 4 i y = 2

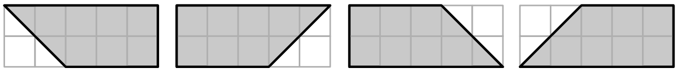
<u>2.1.2.</u> Za $x = 5$ i $y = 2$ jednadžba (1) prelazi u $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$, što je uz uvjete (2) moguće za $a = b = c = d = 1$ ili kada je jedan od brojeva a, b, c, d jednak 2, a preostala tri broja su 0.

U prvom slučaju, rješenje jednadžbe je (5, 2, 1, 1, 1, 1), što je konveksni šesterokut (Slika 23.).



Slika 23. Konveksni šesterokut za x = 5 i y = 2

U drugom slučaju, jednadžba ima četiri rješenja: (5, 2, 2, 0, 0, 0), (5, 2, 0, 2, 0, 0), (5, 2, 0, 0, 2, 0) i (5, 2, 0, 0, 0, 2). S obzirom da se radi o sukladnim jednakokračnim trapezima, dovoljno je uzeti samo jednog u razmatranje (Slika 24.).

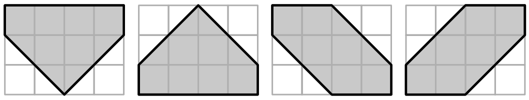


Slika 24. Pravokutni trapezi za x = 4 i y = 2

<u>2.2.</u> Ako je $y = 3$, onda je $x = 4$ ili $x = 5$.

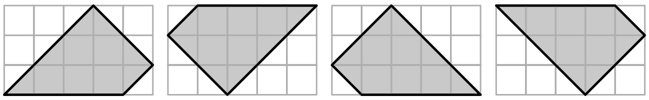
<u>2.2.1.</u> Za $x = 4$ i $y = 3$ jednadžba (1) prelazi u $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8 = 2^2 + 2^2$, što je uz uvjete $a + d \leq 3$, $b + c \leq 3$ iz (2) moguće ako je jedan broj u paru (a, d) i (b, c) jednak 0, a drugi 2 pa su rješenja jednadžbe: (4, 3, 2, 2, 0, 0), (4, 3, 0, 0, 2, 2), (4, 3, 2, 0, 2, 0) i (4, 3, 0, 2, 0, 2). Kako prva dva rješenja određuju sukladne kon-

veksne peterokute, a druga dva rješenja sukladne konveksne šesterokute, dovoljno je uzeti u razmatranje samo po jednog od njih. (Slika 25.).



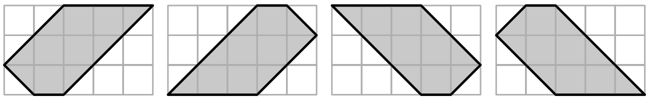
Slika 25. Konveksni likovi za $x = 4$ i $y = 3$

<u>2.2.2.</u> Za $x = 5$ i $y = 3$ jednadžba (1) prelazi u $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 14 = 1^2 + 2^2 + 3^2$, što je uz uvjete $a + d \leq 3, b + c \leq 3$ iz (2) moguće ako su u parovima (a, d) i (b, c) brojevi 1 i 2 ili 0 i 3. Sada postoji 8 različitih rješenja jednadžbe (1). Od tih osam, četiri rješenja (5, 3, 0, 1, 2, 3), (5, 3, 2, 3, 0, 1), (5, 3, 1, 0, 3, 2) i (5, 3, 3, 2, 1, 0) određuju sukladne pravokutne trapeze pa je dovoljno uzeti jednog u razmatranje (Slika 26.).



Slika 26. Konveksni pravokutni trapezi za $x = 5$ i $y = 3$

Preostala četiri rješenja (5, 3, 1, 3, 0, 2), (5, 3, 0, 2, 1, 3), (5, 3, 3, 1, 2, 0) i (5, 3, 2, 0, 3, 1) određuju sukladne konveksne peterokute (Slika 27.) te je dovoljno uzeti jednog u razmatranje.



Slika 27. Konveksni peterokuti za $x = 5$ i $y = 3$

<u>2.3.</u> Ako je $y = 4$, onda je $x = 5$, pa jednakost (1) prelazi u $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 24$. Iako se 24 može zapisati kao zbroj potpunih kvadrata, $24 = 4^2 + 2^2 + 2^2$, brojevi 4, 2, i 2, ne ispunjavaju uvjete $a + d \leq 4$ i $b + c \leq 4$ iz (2) pa u ovom slučaju jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

3. Još preostaje ispitati slučajeve za $y > 1$ i $x > 5$.

<u>3.1.</u> Ako je $y \geq 5$, onda imamo:

$$\frac{1}{y} \leq \frac{1}{5}$$

$$\frac{9}{y} \leq \frac{9}{5} < 2$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{9}{y}+y<2+y=(y+1)+1\leq x+1\\
&9+y^2<y(x+1)\\
&xy>y^2-y+9\\
&2xy-16>2y^2-2y+2. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Nadalje, zbog nejednakosti $b+c\leq y$ iz uvjeta (2) vrijedi:

$$b^2+c^2\leq(b+c)^2\leq y^2. \qquad (5)$$

Iz jednadžbe (1) i nejednakosti (4) i (5) slijedi:

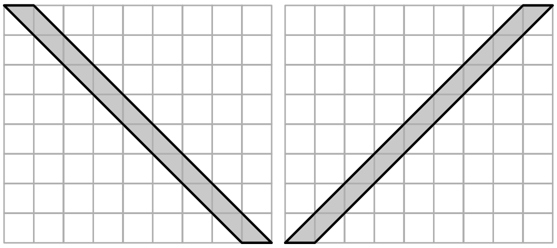
$$
\begin{aligned}
a^2+d^2+y^2\geq a^2+b^2+c^2+d^2=2xy-16>2y^2-2y+2\\
a^2+d^2>(y-1)^2+1. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Desna strana nejednakosti (6) pozitivan je broj pa i lijeva strana mora biti pozitivan broj. Dakle, bar jedan od brojeva a ili d mora biti različit od 0.

Kada bi i a i d bili različiti od 0, onda bi vrijedila nejednakost $a^2+d^2\leq(y-1)^2+1$ (dokaz analogan dokazu nejednakosti (3)), što je u kontradikciji sa (6). Dakle, točno jedan od brojeva a ili d mora biti različit od 0.

Neka je npr. $a\neq 0,\ d=0$. Tada prema nejednakosti $a+d\leq y$ iz uvjeta (2) vrijedi $a\leq y$. Ako pretpostavimo da je $a<y$, onda je $a\leq y-1$, iz čega slijedi da je $a^2<(y-1)^2+1$, što je u kontradikciji sa (6). Dakle, mora vrijediti $a = y$. Prema tome, mogu se razmatrati dvije mogućnosti: $a = y$, $d = 0$ ili $a = 0$, $d = y$. Analognim razmatranjem za par brojeva (b, c) dobili bismo: $b = y$, $c = 0$ ili $b = 0$, $c = y$.

Uvrštavanjem tih mogućnosti u jednadžbu (1) dobiva se $2y^2=2xy-16$, odnosno $y(x-y)=8$, te zaključujemo da je y djelitelj broja 8. Kako je $y\geq 5$, dobiva se da je $x = 9$ i $y = 8$, pa su zbog uvjeta (2) moguća dva rješenja jednadžbe: (9, 8, 8, 0, 8, 0) i (9, 8, 0, 8, 0, 8). S obzirom da se radi o dva sukladna paralelograma, za daljnje razmatranje uzima se samo jedan od njih (Slika 28.).



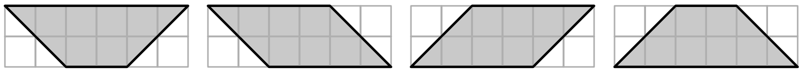
Slika 28. Konveksni likovi za x = 9 i y = 8

<u>3.2.</u> Promotrimo još slučaj kada je $1 < y < 5$ i $x > 5$. Iz jednadžbe (1) dobivamo sljedeće nejednakosti:

$$
\begin{aligned}
&2xy - 16 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \le \left(a+d\right)^2 + \left(b+c\right)^2 \le y^2 + y^2 = 2y^2 \\
&xy - 8 \le y^2 \\
&xy \le y^2 + 8 \\
&x \le \frac{y^2+8}{y}. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

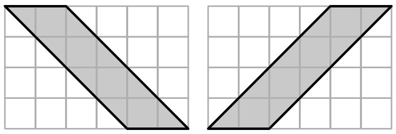
Uzimajući u obzir nejednakost (7) te da je $x > 5$, preostaju još dvije mogućnosti.

<u>3.2.1.</u> Ako je $y = 2$, onda je $x = 6$, te su zbog uvjeta (2) moguća četiri rješenja jednadžbe: (6, 2, 2, 2, 0, 0), (6, 2, 2, 0, 2, 0), (6, 2, 0, 2, 0, 2) i (6, 2, 0, 0, 2, 2). Kako 1. i 4. rješenje određuje sukladne jednakokračne trapeze, a 2. i 3. sukladne paralelograme, za daljnja razmatranja dovoljno je uzeti po jedan od njih (Slika 29.).



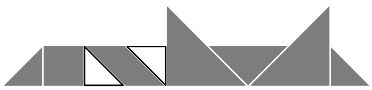
Slika 29. Konveksni likovi za x = 6 i y = 2

<u>3.2.2.</u> Ako je $y = 4$, onda je $x = 6$, te su zbog uvjeta (2) moguća dva rješenja jednadžbe: (6, 4, 4, 0, 4, 0) i (6, 4, 0, 4, 0, 4). Ova rješenja određuju sukladne konveksne likove pa za daljnja razmatranja uzimamo samo jedan od njih (Slika 30.).



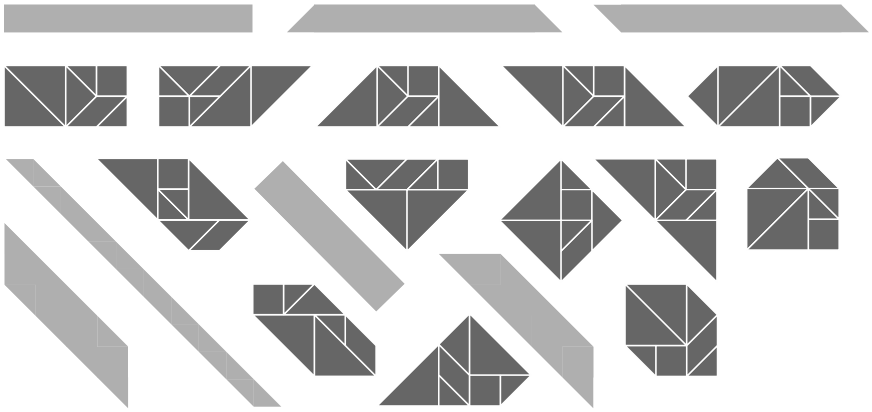
Slika 30. Konveksni likovi za x = 6 i y = 4

Konačno, nakon što su ispitane sve mogućnosti, možemo reći da za $x \ge y$ jednadžba (1) uz uvjete (2) ima 48 različitih rješenja koja određuju 20 različitih konveksnih likova. Međutim, svi dobiveni konveksni likovi nisu i tangram likovi. Na primjer, jednakokračni trapez sa Slike 20. ne može se prekriti sa svih sedam tanova (Slika 31.).



Slika 31. Konveksni lik koji nije tangram lik

Među 20 izdvojenih različitih konveksnih likova, 7 ih se ne može prekriti sa svih sedam tanova (likovi na slikama 15., 16. – 19., 20., 21., 28. i 30.). To znači da preostaje samo 13 konveksnih tangram likova: 1 trokut, 6 četverokuta, 2 peterokuta i 4 šesterokuta (Slika 32.).



Slika 32. Svi konveksni likovi

Na Slici 32. prikazan je samo jedan načina popločivanja[4] konveksnih likova. Čitatelj za vježbu može ispitati na koliko se različitih načina može popločiti svaki konveksni tangram lik.

4. Tangram kao nastavno sredstvo

Iz svega gore navedenog jasno je da tangram slagalica može biti ozbiljan matematički alat i vrlo korisno didaktičko sredstvo u nastavi matematike, a posebno u nastavi geometrije. Međutim, tek kad nastavnik sam stekne određeno iskustvo u tangram aktivnostima, onda može svrhovito osmišljavati aktivnosti za učenike, što je osnovni preduvjet za učinkovito korištenje tangram slagalice u nastavi matematike.

Ipak, postoje određene preporuke koje pomažu u osmišljavanju tangram aktivnosti. Prilikom prvog susreta s tangramom korisno je dopustiti učenicima da najprije samostalno slažu neke od ponuđenih figura (kao npr. na Slici 3.), a zatim osmišljavaju svoje figure. Koristeći svih sedam tanova, učenici mogu oblikovati tisuće različitih figura: slova, znamenke, interpunkcijske znakove, različite vrste simbola, oblike koji prikazuju osobe, životinje, biljke, predmete itd. Nakon toga, osmišljene likove mogu crtati, konstruirati, opisivati itd.

Nakon što steknu određeno iskustvo i uvide mogućnosti, učenike se može postupno usmjeravati na ciljano istraživanje određenih pravilnosti. Tako na primjer mogu istražiti i opisati osnovne karakteristike tanova (odnosi stranica, površina, veličine

[4]Popločiti lik tanovima znači u potpunosti ga prekriti, bez praznina i bez preklapanja.

kutova itd., Slika 4. i 5.), služeći se pri tome odgovarajućim definicijama, aksiomima i teoremima. Tangram slagalica može služiti kao podloga za uvođenje ili provjeravanje razumijevanja određenih koncepata, kao što su razlomci, postotci, sličnost, sukladnost, prebrojavanje itd.

Kada učenici steknu određeno iskustvo i rutinu, aktivnosti se mogu proširivati i međusobno povezivati. Na primjer, nakon što slože svih 13 konveksnih tangram likova, učenici mogu istražiti na koliko se različitih načina može oblikovati svaki od tih likova, na koliko se različitih načina svaki od njih može obojiti u dvije boje (po pola), u kakvom su odnosu njihovi opsezi i površine, kako nacrtati određeni lik u kvadratnoj točkastoj mreži, kako ga proporcionalno uvećati ili umanjiti, kako odrediti površinu složenog lika uz zadanu veličinu tan kvadrata itd.

Tangram aktivnosti mogu biti usmjerene na razvoj različitih vještina (crtanje, konstruiranje, popločivanje, preslagivanje i sl.), za uvođenje određenih pojmova ili provjeru znanja o njima, zatim na istraživanje, otkrivanje i postavljanja matematičkih zakonitosti, a time i na razvoj matematičkog (geometrijskog) rječnika i procesa mišljenja. Više o korištenju tangram slagalice kao matematičkog alata može se pročitati u [1], [2], [3], [7] i [8].

5. Zaključak

Tangram slagalica može biti samo igra, ali i moćno didaktičko sredstvo. Prema nekim izvorima, u nastavi se, kao didaktičko sredstvo, koristio već davne 1860. godine (vidjeti [5, str.43]).

Njegova privlačnost je upravo u njegovoj jednostavnosti, mogućnosti prilagodbe svim uzrastima, u njegovoj primjenjivosti u gotovo svim fazama nastavnog procesa i aktivnostima istraživačkog tipa.

Kineski teorem o tangramu i njegov dokaz svakako ne spadaju u jednostavnije matematičko štivo, čak ni za vještijeg srednjoškolca. Cilj nam je bio detaljno razraditi dokaz teorema (vidjeti [9]) te ga upotpuniti slikama dobivenim primjenom vizualno – analitičke metode, a kojom se također mogu dobiti sva rješenja diofantske jednadžbe iz dokaza i na taj ga način približiti i mlađim učenicima (vidjeti [1]).

Sve istine lako je razumjeti jednom kad su otkrivene; svrha je otkrivati ih.
(Galileo Galilei)

Literatura:

1. Baranović, N., Lehman, S. (2016.). Razvoj geometrijskog mišljenja kroz tangram aktivnosti. Simpozijum Matematika i primene. Matematički fakultet sveučilišta u Beogradu.
2. Kavajin, A. (2016.). Tangram i njegova primjena. Diplomski rad. Filozofski fakultet u Splitu.
3. Khairiree, K. (2015.). Creative Thinking in Mathematics with Tangrams and The Geometer's Sketchpad. Proceedings of the 20th Asian Technology Conference in Mathematics. Leshan, China.
4. Legenda o tangram slagalici, dostupno na: http://www.tangram-channel.com/legend-of-the-tangram/ (Svibanj 2016.).
5. Slocum, J., (2003.). *Tangram: The World's First Puzzle Craze*. http://www.indiana.edu/~liblilly/collections/overview/puzzle_docs/Tangram-Worlds_First_Puzz_Craze.pdf. (Prosinac 2015.).
6. Scott, Paul. (2006.). Convex tangram. Australian Mathematics Teacher, 62 (2), 2- 5.
7. Tchoshanov, M. (2011.). Building Students' Mathematical Proficiency: Connecting Mathematical Ideas Using the Tangram. Learning and Teaching Mathematics, 10, 16-23.
8. Van Hiele, P.M. (1999.). Developing geometric thinking through activities that begin with play. Teaching children mathematic, 5(6), 310-316.
9. Wang F. T. & Hsiung, C. C. (1942.). A Theorem on the Tangram. The American Mathematical Monthly, Vol. 49, No. 9, pp. 596-599.