O Cevinom teoremu i jednoj njegovoj primjeni

Šefket Arslanagić[1]

U geometriji je poznat i vrlo se uspješno primjenjuje teorem talijanskog matematičara i geometra Giovannija Ceve (1648. – 1734.) koji je dokazan 1678. godine. Cevin teorem glasi:

Neka su A_1, B_1 i C_1 točke koje pripadaju stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ΔABC. Pravci AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku se u jednoj točki ako i samo ako je:

$$\frac{|BA_1|}{|A_1C|}\cdot\frac{|CB_1|}{|B_1A|}\cdot\frac{|AC_1|}{|C_1B|}=1. \tag{1}$$

Dokaz: 1° Dokažimo da je uvjet teorema nužan.

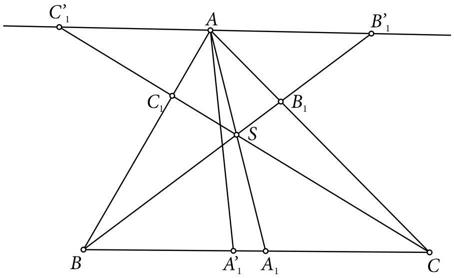
Pravci AA_1, BB_1 i CC_1 u općem se slučaju ne sijeku u jednoj točki (Slika 1.). Ako se sijeku u nekoj točki *S*, i ako su B'_1 i C'_1 točke u kojima pravci BB_1 i CC_1 sijeku pravac kroz točku *A* paralelan s *BC*, tada iz dobivenih sličnih trokuta slijedi:

$$\frac{|BA_1|}{|A_1C|}=\frac{|B_1'A|}{|AC_1'|},\ \frac{|CB_1|}{|B_1A|}=\frac{|BC|}{|AB_1'|},\ \frac{|AC_1|}{|C_1B|}=\frac{|AC_1'|}{|BC|},$$

pa je

$$\frac{|BA_1|}{|A_1C|}\cdot\frac{|CB_1|}{|B_1A|}\cdot\frac{|AC_1|}{|C_1B|}=1.$$

Ovim je (1) dokazano.



Slika 1.

[1]Šefket Arslanagić, Sarajevo

2° Dokažimo da je uvjet teorema dovoljan.

Pretpostavljajući da je uvjet (1) zadovoljen, dokažimo da se pravci AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku u jednoj točki. Neka je S točka presjeka pravaca BB_1 i CC_1, a A_1' točka u kojoj pravac AS siječe pravac BC. Dokažimo da se točke A_1 i A_1' podudaraju. Zaista, prema dokazanom dijelu ovog teorema, bit će:

$$\frac{|BA_1'|}{|A_1'C|}\cdot\frac{|CB_1|}{|B_1A|}\cdot\frac{|AC_1|}{|C_1B|}=1. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) dobivamo da je:

$$\frac{|BA_1|}{|A_1C|}=\frac{|BA_1'|}{|A_1'C|},$$

pa su točke A_1 i A_1' istovjetne, tj. podudaraju se.

Ovime je teorem u potpunosti dokazan.

Cevinim teoremom lako se dokazuje sljedeće:

a) težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki,
b) visine trokuta sijeku se u jednoj točki,
c) simetrale unutrašnjih kutova trokuta sijeku se u jednoj točki,
d) pravci AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku se u jednoj točki, gdje su A_1, B_1 i C_1 dirališta upisane kružnice trokuta sa stranicama $\overline{BC}, \overline{CA}$ i $\overline{AB}$.

Dokaze prepuštamo čitatelju.

Služeći se Cevinim teoremom riješit ćemo jedan vrlo zanimljiv geometrijski zadatak: Treba naći zavisnost među stranicama *a*, *b* i *c* trokuta ΔABC ako je poznato da se težišnica $\overline{AM}$, visina $\overline{CH}$ i simetrala *BD* kuta uz vrh *B* sijeku u jednoj točki.

Da bismo uspješno riješili ovaj zadatak, osim Cevinog teorema trebat će nam još jedan važan teorem iz geometrije koji glasi:

Teorem 1. Simetrala unutrašnjeg kuta trokuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih dviju stranica.

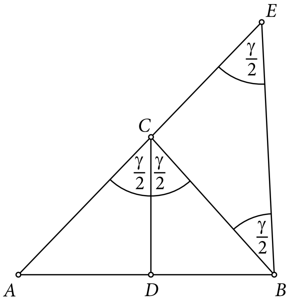
Dat ćemo dokaz ovoga teorema:

Neka u trokutu ΔABC simetrala kuta pri vrhu *C* siječe nasuprotnu stranicu u točki *D* (Slika 2.). Treba dokazati da vrijedi:

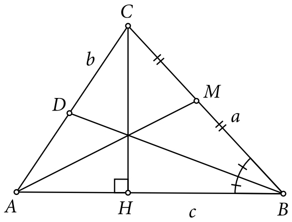
$$|AD|:|DB|=|AC|:|BC|. \tag{3}$$

Produžimo stranicu $\overline{AC}$ preko vrha C i povucimo točkom B paralelu BE s CD, gdje je E točka na pravcu AC. Prema čuvenom Talesovom teoremu[2] primijenjenom na pravce AB i AE, imamo:

$$|AD|:|DB|=|AC|:|CE|.$$



Slika 2.



Slika 3.

Kako je $\angle CBE = \angle CEB$ (zašto?), to je i trokut ΔBCE jednakokračan pa je $|BC|=|CE|$, te iz prethodne jednakosti zaista slijedi (3).

Prijeđimo sada na rješavanje danog zadatka. Prema Cevinom teoremu imamo:

$$\frac{|AD|}{|CD|}\cdot\frac{|CM|}{|BM|}\cdot\frac{|BH|}{|AH|}=1 \text{ (Slika 3.)}$$

Kako je $\overline{AM}$ težišnica trokuta ΔABC, to je $|BM|=|CM|$, te je $\frac{|BM|}{|CM|}=1$. Dalje, kako je BD simetrala kuta uz vrh B trokuta ΔABC, to je na osnovi Teorema 1 $\frac{|AD|}{|CD|}=\frac{c}{a}$. Sada izraz za Cevin teorem postaje: $\frac{c}{a}\cdot\frac{|BH|}{|AH|}=1$, tj. $\frac{|BH|}{|AH|}=\frac{a}{c}$. Stavimo da je $|BH|=at$, $|BH|=ct$, ($0<t<1$). Budući da je $c=|AH|+|BH|=ct+at$, to je:

$$t=\frac{c}{a+c}. \tag{4}$$

[2]Talesov teorem glasi: Paralelni pravci a i b na krakovima kuta $\angle xOy$ odsijecaju proporcionalne dužine: $\frac{|OA|}{|OB|}=\frac{|OA_1|}{|OB_1|}$, a također vrijedi i $\frac{|OA|}{|OB|}=\frac{|AA_1|}{|BB_1|}$.

Budući da su trokuti ΔACH i ΔBCH pravokutni, to je na osnovi Pitagorina teorema:

$$|CH|^2 = b^2 - c^2t^2 \text{ i } |CH|^2 = a^2 - a^2t^2,$$

a odavde je

$$b^2 - c^2t^2 = a^2 - a^2t^2, \text{ tj.}$$

$$t^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}. \tag{5}$$

Sada iz (4) i (5) dobivamo:

$$\frac{c^2}{(a+c)^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}$$

ili

$$\frac{c^2}{a+c} = \frac{a^2 - b^2}{a-c},$$

što predstavlja traženu zavisnost između stranica a, b i c trokuta ΔABC.

Literatura:

1. Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
2. Blagojević, V., *Teoreme i zadaci iz planimetrije*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstava, I. Sarajevo, 2002.
3. Mettler, M., *Vom Charme der „verblassten" Geometrie*, Verlag Eurobit Temeswar (Romania), 2000.
4. Palman, D., *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.
5. Prasolov, V.V., *Zadači po planimetrii*, Čast 1, Nauka-Fizmatlit, Moskva, 1995.