

Linearno programiranje i metoda unutarnje točke – interaktivno rješavanje¹

LJILJANA MILETIĆ²

Ključne riječi: *Loomen Moodle – sustav za upravljanje tečajevima, Geogebra – program dinamičke geometrije, linearno programiranje, simpleks metoda, metoda unutarnjih točaka*

Sažetak

U ovom radu predstaviti ću kratak on-line tečaj linearnog programiranja (LP). Tečaj je strukturiran u trima modulima: teorija i problemi LP-a, simpleks metoda i metoda unutrašnje točke. Napravljen je u CARNet-ovom *Moodleu*.

Tečaj je prezentiran i u obliku web stranice. Osim prezentacije sadržaja, tečaj sadrži kvizove, križaljke i primjere za interaktivno rješavanje zadataka.

Tečaj ima interaktivni pristup učenju i rješavanju problema i vježbi. Sadržaji se opisuju dinamički i interaktivno pomoću geometrijskog softvera *Geogebra*. Simpleks metoda objašnjena je pomoću prilagođenih interaktivnih simpleks tablica za svaku iteraciju. Pojednostavljena metoda unutarnjih točaka (IPM) također je predstavljena i provedena u *Matlabu* i programskom jeziku *C++*.

Rješavajući zadani problem i koristeći metodu unutarnjih točaka, rješenja su prikazana grafički, prateći interaktivna rješenja.

Ovaj je tečaj korišten u istraživanju učinkovitosti e-učenja linearnog programiranja, a proveden je među učenicima drugog razreda Gimnazije u Požegi. Pokazalo se kako pravilna upotreba informacijskih i komunikacijskih tehnologija i interaktivno učenje pomažu u poboljšanju razumijevanja i dužem pamćenju naučenog sadržaja.

¹Predavanje održano na 8. kongresu nastavnika matematike RH, 2018. godine u Zagrebu

²Ljiljana Miletić, Gimnazija Požega

Uvod

Kratak on-line tečaj nastao je kao usporedba učinkovitosti e-učenja i klasičnog načina poučavanja. Projekt je proveden u dvama drugim razredima prirodoslovno–matematičke gimnazije u Požegi, a učenici tih razreda bili su približno jednakih predznanja.

Jedna je grupa koristila on-line učenje, dok je druga grupa koristila klasičan način učenja. Rezultati projekta pokazali su da e-učenje dovodi do boljih rezultata u odnosu na klasično poučavanje.

Projekt je opisan u *Poučku* – časopisu za metodiku i nastavu matematike (Lj. Miletić: *Istraživanje i vrednovanje učinkovitosti e-učenja na primjeru linearnog programiranja*, *Poučak*, godina 19., broj 73., ožujak 2018., 42 – 53.)

Idući je korak bila izrada stranice na kojoj će biti dostupan tečaj i izrada interaktivnih simpleks tablica, kao i algoritamsko rješavanje metode unutarnje točke.

1. Opis tečaja

Modul lekcija iz linearnog programiranja implementiran je u sustav za e-učenje *Loomen Moodle*. Učenike sam dodala u tečaj, pa mu korištenjem `AAI@Edu.hr` identiteta mogu pristupiti [2]. Tečaj linearnog programiranja dostupan je na sljedećoj poveznici: <https://loomen.carnet.hr/course/view.php?id=2746>

Lakši pristup tečaju napravljen je izradom web stranice u Google sitesu na sljedećoj poveznici: <https://sites.google.com/site/linearnoprogramiranje1/>

Stranica sadrži sljedeće dijelove: problem i teorija linearnog programiranja, simpleks metoda i metoda unutarnje točke. Tečaj ima interaktivni pristup rješavanju LP problema: geometrijsko rješavanje, interaktivne simpleks tablice, interaktivno rješavanje metode unutarnje točke. Unutar svake cjeline nalaze se pitanja i križaljke povezane sa sadržajem cjeline.

2. Modeliranje

Primjer:

U jednoj tvornici proizvedena su dva proizvoda: A i B. Za proizvodnju tih proizvoda koriste se tri stroja S_1 , S_2 i S_3 . Da bi se proizveo proizvod A, potrebno je tri sata rada na stroju S_1 i dva sata na stroju S_2 . Za proizvod B potreban je jedan sat na stroju S_1 , dva sata na stroju S_2 i tri sata na stroju S_3 . Dnevni je kapacitet 16 sati na stroju S_1 i na stroju S_2 te 12 sati na stroju S_3 . Dobit za proizvod A je 7000 kn, a za proizvod B 12 000 kn.

Pretpostavka je da se svi proizvodi prodaju, a cilj je pronaći optimalnu proizvodnju za proizvode A i B uz povećavanje dobiti [3].

Stroj	Potrebno vrijeme za proizvod		Dnevni kapacitet
	A	B	
S_1	3	1	16
S_2	2	2	16
S_3	0	3	12

LP model: $Max z = 7000x_1 + 12000x_2$

$$3x_1 + x_2 \leq 16$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 16$$

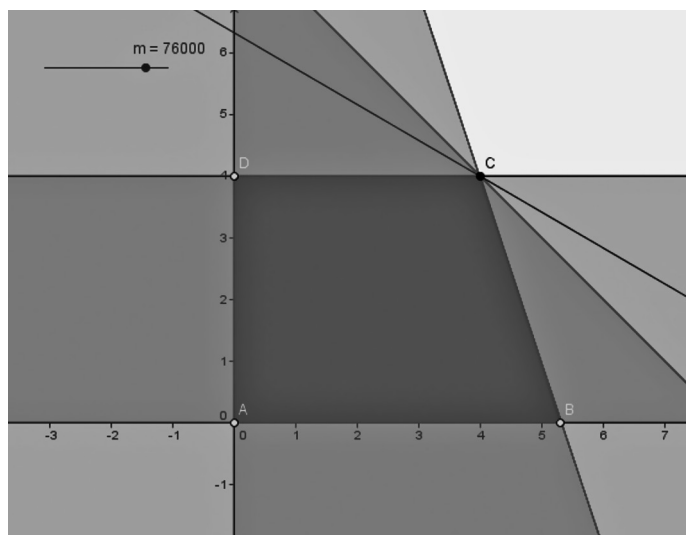
$$3x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Zadani problem riješen je interaktivno na sljedeća tri načina: geometrijski pristup, interaktivne simpleks tablice i algoritamsko rješavanje metodom unutarnje točke.

2.1. Geometrijski pristup

Problem LP učenici su rješavali geometrijskom 2-D metodom. Koristili su program dinamičke geometrije *Geogebra*. Radom u *Geogebra* na računalima učenici su na vizualan način mogli vidjeti dopustivo područje i pomicati paralelne pravce kroz vrhove dopustivog područja. Na taj način vidjeli su u kojem se vrhu postiže minimum ili maksimum za zadani problem [2]. Primjer *Geogebra*nog alpeta za zadani primjer vidljiv je na sljedećoj poveznici: <https://www.geogebra.org/m/FYh8wcyK>



Optimalna vrijednost funkcije cilja $z^* = 76000$ postiže se u točki $C(4,4)$

2.2. Interaktivne simpleks tablice

Za zadani problem prikazane su interaktivne simpleks tablice.

Basic variables	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R.H.S.
z	1	-7000	-12000	0	0	0	0
x_3	0	3	1	1	0	0	16
x_4	0	2	2	0	1	0	16
x_5	0	0	3	0	0	0	12

Restore

Basic variables	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R.H.S.
z	1	-7000	0	0	0	0	48000
x_3	0	3	0	1	0	0	12
x_4	0	-4	0	-2	1	0	-16
x_2	0	0	1	0	0	0	4

Restore

Basic variables	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R.H.S.
z	1	0	0	7000/3	0	0	76000
x_1	0	1	0	1/3	0	0	4
x_4	0	0	0	-2/3	1	0	0
x_2	0	0	1	0	0	0	4

Restore

Basic variables	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R.H.S.
z	1	0	0	7000/3	0	0	76000
x_1	0	1	0	1/3	0	0	4
x_4	0	0	0	-2/3	1	0	0
x_2	0	0	1	0	0	0	4

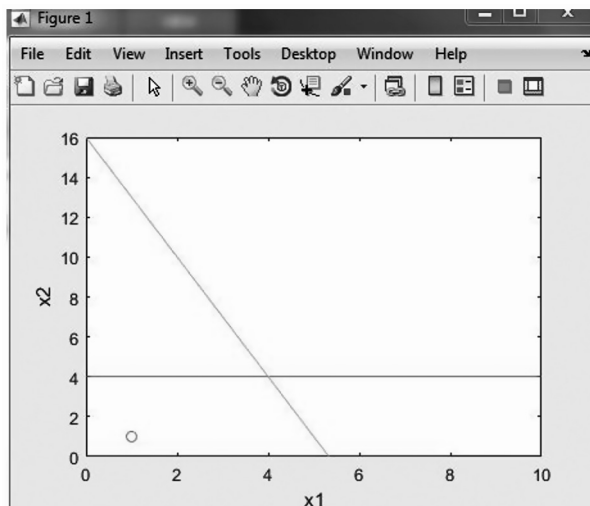
Korištenje interaktivnih tablica možete vidjeti na sljedećoj poveznici:

<http://dev.pulsir.eu/ljmiletic/LPlite-master/index.html>

2.3. Metoda unutarnje točke

Uz pomoć algoritama [1],[2] za rješavanje metode unutarnjih točaka napravljeno je interaktivno rješenje u *MatLabu* i *C++*.

U *MatLabu* grafički prikaz pojedinih iteracija izgleda ovako:



Iteracija 1:

$$x1 = 1.0540$$

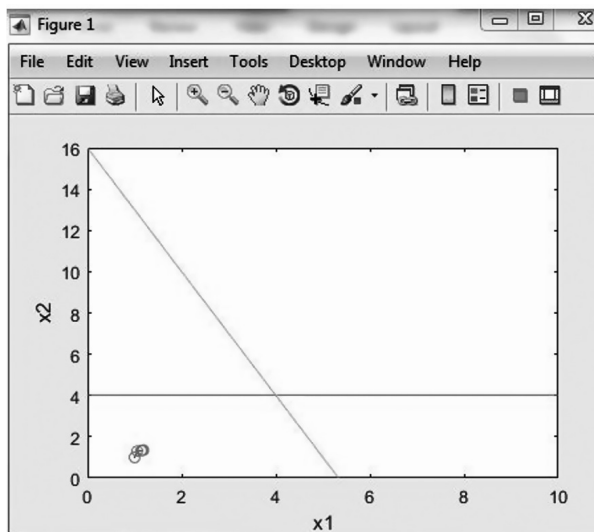
$$x2 = 1.3011$$

$$0.5413$$

$$0.2943$$

$$0.1000$$

$$z = 19000$$



Iteracija 6:

$$x1 = 1.2045$$

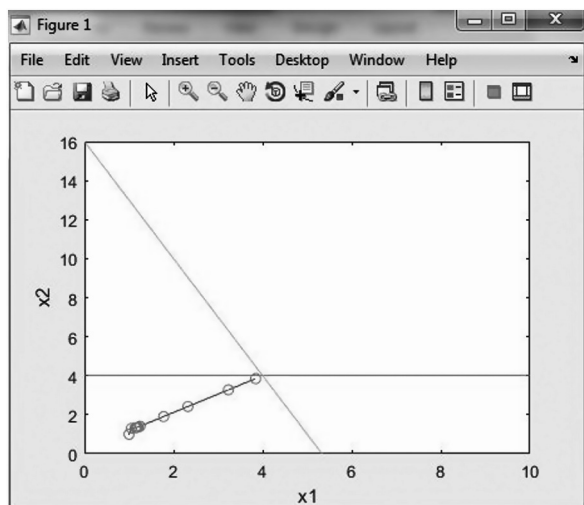
$$x2 = 1.3688$$

$$0.1643$$

$$0.0000$$

$$0.0002$$

$$z = 24507$$



Iteracija 12:

$$x1 = 3.9842$$

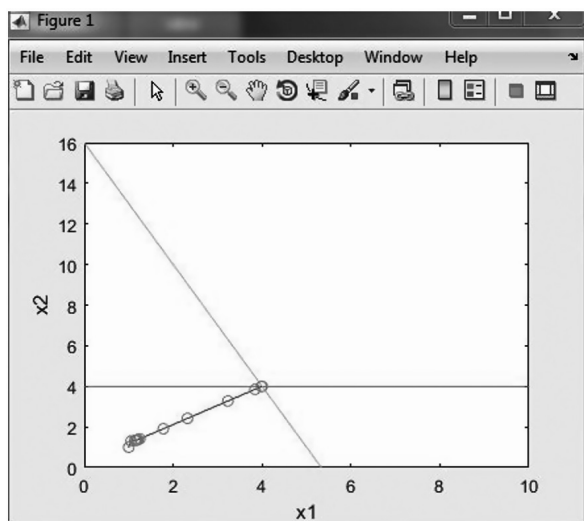
$$x2 = 3.9852$$

$$0.0009$$

$$0.0000$$

$$0.0000$$

$$z = 73116$$



Iteracija 19:

$$x1 = 4.0000$$

$$x2 = 4.0000$$

$$0.0000$$

$$0.0000$$

$$0.0000$$

$$z = 76000$$

Interaktivno rješenje LP problema koristeći program C++ može se pogledati na linku: http://dev.pulsir.eu/ljmiletic/ljilja_16.exe

Radim na poboljšanju toga rješenja, a njegovu interaktivnost možete vidjeti na sljedećem LP problemu.

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 5x_2 \\ x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

U program je potrebno zadati: $n = 3$, $m = 5$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Optimalno rješenje: $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, $z^* = 36$

3. Zaključak:

Opisan je kratki on-line tečaj linearnog programiranja. Tečaj se sastoji od triju djelova: teorija i problem LP, simpleks metode, metode unutarnje točke. Tečaj u sebi sadrži interaktivnost koja je ilustrirana na jednostavnim primjerima. U planu je napraviti i elektroničku knjigu za učenje LP-a, kao i staviti tečaj u repozitorij digitalnih obrazovnih materijala.

Učenici su izrazito dobro prihvatili interaktivno rješavanje uz pomoć računala jer su pripadnici mlađe generacije koja je odrasla uz računalo i internet. To potkrepljuje i činjenicu da je budućnost uspješnog usvajanja znanja novih generacija učenika vezana uz e-učenje i korištenje interaktivnosti u rješavanju zadataka.

Literatura:

1. Lešaja, G. (2009.), *Introducing Interior – Point Methods for Introductory Operations Research Courses and/or Linear Programming Courses, The Open Operational Research Review (CRORR)*, Vol. 3, 163 – 176.
2. Miletić, Lj. (2018.), *Istraživanje i vrednovanje učinkovitosti e-učenja na primjeru linearnog programiranja*, Poučak, godina 19., broj 73., 42 – 53.
3. Neralić, L. (2012.), *Uvod u matematičko programiranje 1*, Četvrto izdanje, Element, Zagreb.