Zlatna elipsa

Jens Carstensen, Alija Muminagić

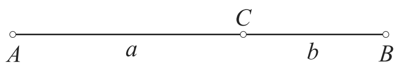
Uvod

U ovom ćemo prilogu dati definiciju *zlatne elipse* i dokazati neka njezina svojstva. Prethodno ćemo se prisjetiti nekih definicija i poučaka koji će biti primjenjivani.

Definicija 1. Ako točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ na slici 1 tako da vrijedi

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \tag{1}$$

kažemo da ju ona dijeli u omjeru *zlatnog reza*.



Slika 1.

Poučak 1. Točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru zlatnog reza ako je

$$\frac{a}{b} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{2}$$

Broj ϕ se naziva zlatni broj.

Iz (1) slijedi

$$a^2 - ab - b^2 = 0 \implies \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0 \implies \phi^2 - \phi - 1 = 0. \tag{3}$$

Iz (3) imamo:

$$\phi^2 - 1 = \phi \tag{4}$$

$$\phi^2 = \phi + 1 \tag{5}$$

$$\phi - 1 - \frac{1}{\phi} = 0 \quad \text{tj.} \quad \varphi - 1 = \frac{1}{\phi}. \tag{6}$$

Nadalje,

$$\phi^3 = \phi^2 \cdot \phi = (\phi+1)\phi = \phi^2 + \phi = 2\phi + 1 \tag{7}$$

$$\phi^4 = (\phi^2)^2 = (\phi+1)^2 = \phi^2 + 2\phi + 1 = 3\phi + 2 \tag{8}$$

$$\phi - 1 = \frac{1}{\phi} \implies (\phi - 1)^2 = \frac{1}{\phi^2}. \tag{9}$$

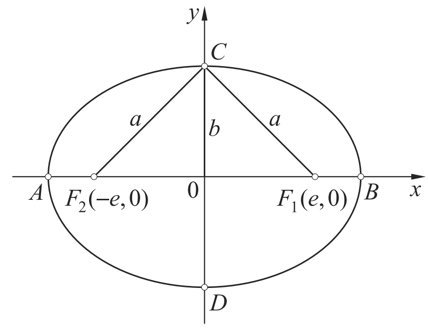
Definicija 2. Elipsa s fokusima F_1 i F_2 za dani broj $a > 0$ je skup svih točaka ravnine za koje je zbroj udaljenosti do fokusa jednak $2a$.

Jednadžba elipse sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava u ravnini s duljinama poluosi a i b je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{10}$$

Duljine $a = |OA| = |OB|$ i $b = |OC| = |OD|$ zovu se velika i mala poluos elipse. Nadalje, $e = |OF_1| = |OF_2| = \sqrt{a^2 - b^2}$ je ekscentricitet elipse. Iz definicije 2 dobivamo $|CF_1| = |CF_2| = a$.

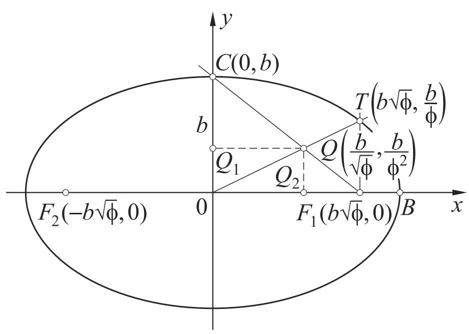
Definicija 3. Elipsa kod koje je omjer između duljina velike i male poluosi $\frac{a}{b} = \phi$, zove se *zlatna elipsa*.



Slika 2.

Razne zanimljivosti zlatne elipse

Promatrajmo sada zlatnu elipsu na slici 3.



Slika 3.

Zbog $a = b\phi$ imamo $e^2 = a^2 - b^2 = b^2(\phi^2 - 1) = b^2\phi$ tj. $e = b\sqrt{\phi}$. Dakle, $F_1(b\sqrt{\phi}, 0)$ i $F_2(-b\sqrt{\phi}, 0)$.

Iz (10) i $a = b\phi$ imamo

$$x^2 + \phi^2 y^2 = \phi^2 b^2. \tag{11}$$

Pravac kroz fokus F_1 paralelan s y-osi siječe zlatnu elipsu u I. kvadrantu u točki T. Njezine koordinate određujemo iz sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} x &= b\sqrt{\phi} \\ x^2 + \phi^2 y^2 &= \phi^2 b^2. \end{aligned}$$

Dobivamo, $y = \frac{b}{\phi}$. Dakle, $T\left(b\sqrt{\phi}, \frac{b}{\phi}\right)$.

Nacrtajmo sada pravce kroz točke $O(0,0)$, $T\left(b\sqrt{\phi}, \frac{b}{\phi}\right)$ i $C(0,b)$, $F_1(b\sqrt{\phi}, 0)$. Jednadžbe tih pravaca su

$$OT \quad \dots \quad y = \frac{x}{\phi\sqrt{\phi}} \qquad \text{i} \qquad CF_1 \quad \dots \quad y = -\frac{x}{\sqrt{\phi}} + b.$$

Presjek tih pravaca je točka Q. Odredimo njezine koordinate:

$$\frac{x}{\phi\sqrt{\phi}} = -\frac{x}{\sqrt{\phi}} + b \implies x = \frac{b\phi\sqrt{\phi}}{\phi + 1} = \frac{b\phi\sqrt{\phi}}{\phi^2}$$

tj. $x = \frac{b}{\sqrt{\phi}}$, $y = \frac{b}{\phi^2}$. Dakle, $Q\left(\frac{b}{\sqrt{\phi}}, \frac{b}{\phi^2}\right)$.

Neka je Q_1 ortogonalna projekcija točke Q na OC. Tada je $|CQ_1| = |OC| - |OQ_1| = b - \frac{b}{\phi^2}$. Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut CQ_1Q dobivamo:

$$
\begin{aligned}
|CQ|^2 &= |CQ_1|^2 + |Q_1Q|^2 = \left(b - \frac{b}{\phi^2}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{\phi}}\right)^2 \\
&= b^2 \cdot \frac{\phi^4 - 2\phi^2 + 1 + \phi^3}{\phi^4} = b^2 \cdot \frac{3\phi + 2 - 2\phi - 2 + 1 + 2\phi + 1}{\phi^4} \\
&= b^2 \cdot \frac{3\phi + 2}{3\phi + 2} = b^2,
\end{aligned}
$$

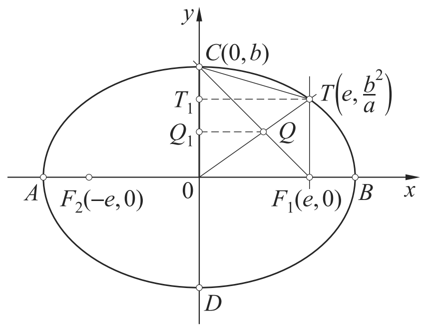
odakle slijedi $|CQ| = b$. Dakle, $|CQ| = b = |OC|$ tj. trokut COQ je jednakokračan i vrijedi $\frac{|CF_1|}{|CQ|} = \frac{a}{b} = \phi$. To znači da točka Q dijeli dužinu $\overline{CF_1}$ u omjeru zlatnog reza.

Promatrajmo sada proizvoljnu elipsu čija jednadžba je $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ s fokusima $F_1(e, 0)$, $F_2(-e, 0)$. Pravac kroz F_1 paralelan y-osi siječe elipsu (u I. kvadrantu) u točki T.

Odredit ćemo koordinate točke T. Iz $x = e$, $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ dobivamo

$$
y^2 = \frac{b^2(a^2 - e^2)}{a^2} = \frac{b^2 \cdot b^2}{a^2},
$$

odakle je $y = \frac{b^2}{a}$. Dakle, $T\left(e, \frac{b^2}{a}\right)$.



Slika 4.

Jednadžba pravca kroz točke O i T je $y = \frac{b^2}{ae}x$, a onog kroz C i F_1, $y = -\frac{b}{e}x + b$. Sjecište ova dva pravca je $Q\left(\frac{ae}{a+b}, \frac{b^2}{a+b}\right)$.

Duljina dužine $\overline{CQ}$ je

$$
|CQ| = \sqrt{\left(\frac{ae}{a+b}\right)^2 + \left(b - \frac{b^2}{a+b}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2(e^2 + b^2)}}{a+b} = \frac{a^2}{a+b}.
$$

Ako je trokut COQ jednakokračan, pri čemu je $|CQ| = |OC|$ tj. $\frac{a^2}{a+b} = b$, dobivamo

$$
\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0 \text{ tj. } \phi^2 - \phi - 1 = 0.
$$

Dakle, tada je elipsa zlatna.

U toj elipsi je i trokut TQF_1, također, jednakokračan, radi

$$
|QF_1| = |CF_1| - |CQ| = |OB| - |OC| = a - b = b(\phi - 1) = \frac{b}{\phi} = |F_1T|.
$$

(Naime, to slijedi iz: $\frac{b}{\phi} = \frac{b^2}{b\phi} = \frac{b^2}{a}$ i $T\left(e, \frac{b^2}{a}\right)$.)

Označimo li s T_1 ortogonalnu projekciju točke T na OC imamo $\dfrac{|OC|}{|OT_1|} = \dfrac{|OC|}{|F_1T|} = \dfrac{b}{\frac{b}{\phi}} = \phi$. To znači da točka T_1 dijeli dužinu $\overline{OC}$ u omjeru zlatnog reza.

Nadalje, iz pravokutnog trokuta OF_1T imamo

$$\begin{aligned}|OT|^2 &= |OF_1|^2 + |F_1T|^2 = e^2 + \left(\frac{b}{\phi}\right)^2 \quad (\text{zbog } e^2 = a^2 - b^2,\ a = b\phi)\\ &= b^2\left(\phi^2 - 1 + \frac{1}{\phi^2}\right) = b^2(\phi + (\phi-1)^2) = b^2(\phi^2 - \phi + 1)\\ &= b^2(\phi^2 - \phi - 1 + 2) = 2b^2 \implies |OT| = b\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Iz pravokutnog trokuta OQQ_2 sa slike 3 vidi se da je elipsa zlatna:

$$\begin{aligned}|OQ|^2 &= |OQ_2|^2 + |Q_2Q|^2 = \left(\frac{b}{\sqrt{\phi}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\phi^2}\right)^2 = b^2 \cdot \frac{1+\phi^3}{\phi^4}\\ &= b^2 \cdot \frac{1+\phi^2+\phi}{\phi^4} = b^2 \cdot \frac{2\phi^2}{\phi^4} = \frac{2b^2}{\phi^2} \implies |OQ| = \frac{b\sqrt{2}}{\phi}.\end{aligned}$$

Prema tome je $\dfrac{|OT|}{|OQ|} = \phi$, što znači da točka Q dijeli dužinu $\overline{OT}$ u omjeru ϕ zlatnog reza.

Konačno, pravokutni trapez OF_1TC ima kraću od paralelnih stranica $|F_1T| = \dfrac{b}{\phi}$ i dulju $|OC| = b$, te je $\dfrac{|OC|}{|F_1T|} = \phi$ i presječna točka Q dijeli dijagonale $\overline{OT}$ i $\overline{F_1C}$ u omjeru zlatnog reza. Taj trapez možemo zvati *zlatni trapez*. Nadalje, trokuti OCQ i QF_1T su slični s koeficijentom sličnosti ϕ.

Elipsa i njezine direktrise

Neka je F jedan fokus elipse. Pravac p koji ima svojstvo da za svaku točku T elipse vrijedi $\dfrac{d(T,p)}{d(T,F)} = c$, gdje je c pozitivna konstanta, zove se direktrisa (ravnalica) elipse. Svaka elipsa ima dvije direktrise: $p_1 \ \ldots\ x = \dfrac{a}{\varepsilon} = \dfrac{a^2}{e}$ i $p_2 \ \ldots\ x = -\dfrac{a^2}{e}$, gdje je e linearni ekscentricitet elipse, a $\varepsilon = \dfrac{e}{a}$ numerički ekscentricitet elipse.

Neka zlatna elipsa ima direktrisu p_1 (vidi sliku 5) čija je jednadžba

$$x = \frac{a^2}{e} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{b^2\phi^2}{\sqrt{b^2(\phi^2-1)}} = \frac{b\phi^2}{\sqrt{\phi}} = b\phi\sqrt{\phi}.$$

Neka je E sjecište x-osi i direktrise p_1. Tada je $\dfrac{|OE|}{|OF_1|} = \dfrac{b\phi\sqrt{\phi}}{b\sqrt{\phi}} = \phi$, što znači da točka F_1 dijeli dužinu $\overline{OE}$ u omjeru zlatnog reza.

Obrnuto, ako fokus F_1 elipse dijeli dužinu $\overline{OE}$ u omjeru zlatnog reza, elipsa je zlatna.

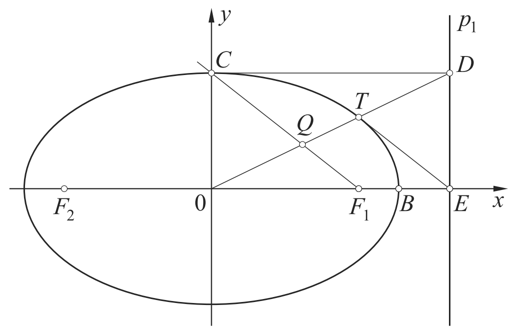
Iz $\dfrac{|OE|}{|OF_1|} = \phi$ redom dobivamo:

$$\phi = \frac{\frac{a^2}{e}}{e} = \frac{a^2}{e^2} = \frac{a^2}{a^2 - b^2}$$

odakle je

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{\phi}{\phi - 1} = \frac{\phi^2 - 1}{\phi - 1} = \phi + 1 = \phi^2$$

$$\Longrightarrow \frac{a}{b} = \phi.$$



Slika 5.

Pravac OQ i direktrisa imaju jednadžbe $y = \dfrac{x}{\phi\sqrt{\phi}}$ i $x = b\phi\sqrt{\phi}$ i njihovo sjecište je $D(b\phi\sqrt{\phi}, b)$.

Koristeći Pitagorin poučak na trokut OED dobivamo

$$|OD|^2 = |OE|^2 + |ED|^2 = (b\phi\sqrt{\phi})^2 + b^2 = b^2(\phi^3 + 1) = b^2(2\phi + 1 + 1) = 2b^2\phi^2.$$

Dakle, $|OD| = b\phi\sqrt{2}$ odakle je $\dfrac{|OD|}{|OT|} = \dfrac{b\phi\sqrt{2}}{b\sqrt{2}} = \phi$. Dakle, točka T dijeli dužinu $\overline{OD}$ u omjeru zlatnog reza. Osim toga, ranije smo pokazali da točka Q dijeli dužinu $\overline{OT}$ u omjeru zlatnog reza, radi čega je $|OQ| = |DT|$.

Dalje je $T\left(b\sqrt{\phi}, \dfrac{b}{\phi}\right)$, $E(b\phi\sqrt{\phi}, 0)$ i udaljenost tih dviju točaka je

$$|TE|^2 = (b\sqrt{\phi}(\phi - 1))^2 + \frac{b^2}{\phi^2} = b^2\phi \cdot \frac{1}{\phi^2} + \frac{b^2}{\phi^2} = b^2,$$

tj. $|TE| = b = |OC| = |ED|$, što znači da su trokuti EDT i COQ sukladni.

Literatura

[1] ALDO SCIMANE, *What else?*, The mathematical Gazette, Vol. 99, 2015.

[2] JENS CARSTENSEN, *Den gyldne ellipse*, Matematik Magazinet, 87, 2016.

[3] BORIS PAVKOVIĆ, DARKO VELJAN, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb 1995.

[4] IVICA GUSIĆ, *Matematički rječnik*, Zagreb, 1995.