Sferna i hiperbolička trigonometrija

Iva Kavčić[1], *Vedran Krčadinac*[2]

Uvod

Osnovna zadaća trigonometrije je određivanje nepoznatih veličina trokuta iz zadanih veličina. U pravokutnom trokutu s katetama duljine a i b, hipotenuzom duljine c i kutovima mjere α i β vrijedi

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}, \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}. \tag{1}$$

S pomoću tih relacija možemo izračunati duljinu katete iz duljine hipotenuze i mjere priležećeg kuta, a s pomoću relacija

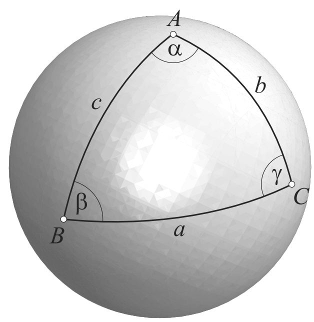
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \sin\beta = \frac{b}{c} \tag{2}$$

iz mjere nasuprotnog kuta. Relacije koje povezuju duljine dviju kateta s mjerama kutova su

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}. \tag{3}$$

Pravokutni trokut određen je jednim svojim oštrim kutom do na sličnost, a omjeri njegovih stranica jednoznačno su određeni. Zato su ove relacije zapravo definicije trigonometrijskih funkcija za kutove iz intervala $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Poznatom konstrukcijom namatanja brojevnog pravca na kružnicu proširujemo ih do funkcija definiranih na $\mathbb{R}$.

Prema nedavno objavljenom radu [8], trigonometrijske probleme rješavali su još stari Babilonci u 18. stoljeću prije nove ere. Ipak, otkriće trigonometrije obično se pripisuje starogrčkim matematičarima iz 2. stoljeća prije nove ere [11]. Zbog primjena u astronomiji, u tom razdoblju već su bili poznati trigonometrijski identiteti za trokute na sferi. Kao ilustraciju primjena trigonometrije u astronomiji i drugdje, upućujemo čitatelja na [1] i [6]. Zbroj kutova ravninskog trokuta jednak je π, a sfernog trokuta je veći od π. Mnogo kasnije, u 19. stoljeću, otkrivena je hiperbolička geometrija [2] u kojoj je zbroj kutova trokuta manji od π.



Slika 1. Sferni trokut.

U ovom članku izvest ćemo trigonometrijske identitete za sferni i hiperbolički trokut koristeći se modelima sfere i hiperboličke ravnine u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$. Vidjet ćemo sličnosti i razlike prema klasičnoj, euklidskoj trigonometriji. Izvedene formule dat

---

[1] Autorica je diplomirala na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu i radi kao koordinatorica operativnog i digitalnog poslovanja u tvrtki Styria medijski servisi; e-pošta: `iva.kavcic@gmail.com`

[2] Autor je izvanredni profesor na Matematičkom odsjeku PMF-a; e-pošta: `vedran.krcadinac@math.hr`

će nam informacije o nekim svojstvima geometrije na sferi i u hiperboličkoj ravnini. Članak je nastao iz diplomskog rada [5].

Model sfere i hiperboličke ravnine

Skup uređenih trojki realnih brojeva $\mathbb{R}^3$ je uz operacije zbrajanja po koordinatama i množenja realnim brojem trodimenzionalni vektorski prostor. Standardni skalarni produkt vektora $x = (x_1, x_2, x_3)$ i $y = (y_1, y_2, y_3)$ je $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. S pomoću skalarnog produkta definiramo duljinu vektora $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ i kut između vektora

$$\sphericalangle(x, y) = \cos^{-1} \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Ovdje $\cos^{-1}$ označava inverznu funkciju kosinusa, tj. arkus kosinus. Tako ćemo označavati i druge inverzne funkcije. Vektorski produkt $x \times y$ računamo razvojem determinante

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

po prvom retku, u kojem su vektori standardne baze $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ i $e_3 = (0, 0, 1)$.

Jedinična sfera sa središtem u ishodištu je skup svih vektora duljine jedan: $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$. Ulogu pravaca na sferi igraju velike kružnice, tj. presjeci sfere s ravninama kroz ishodište. Svake dvije točke $A, B \in S^2$ leže na jedinstvenoj velikoj kružnici, presjeku sfere i ravnine s jednadžbom $\langle A \times B, x\rangle = 0$, kojoj je vektor normale $A \times B$. Iznimka je slučaj kad su A i B antipodalne točke, tj. $B = -A$. Tada je $A \times B$ nulvektor i imamo beskonačno mnogo velikih kružnica kroz A i B. Dualno, presjek svake dvije velike kružnice je par antipodalnih točaka sfere. Identificiranjem antipodalnih točaka dobivamo projektivnu ravninu; u njoj kroz svake dvije točke prolazi jedinstveni pravac i svaka dva pravca sijeku se u jedinstvenoj točki. Uočimo da u projektivnoj ravnini i na sferi ne postoje paralelni pravci, odnosno velike kružnice.

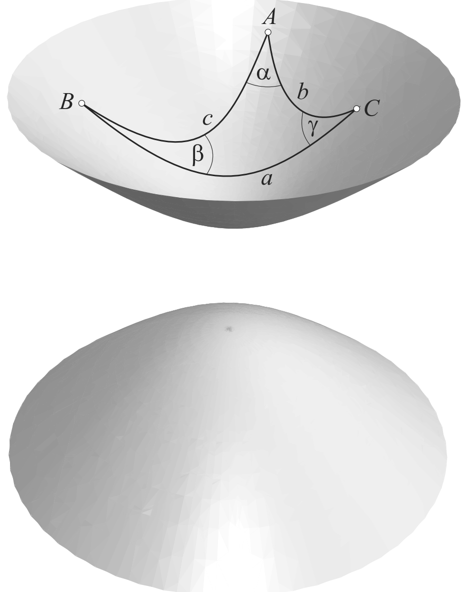
Udaljenost točaka na sferi ne podudara se s udaljenošću u $\mathbb{R}^3$. Točke A i B dijele veliku kružnicu na kojoj leže na dva luka. Udaljenost između A i B je duljina kraćeg od ta dva luka i računamo je po formuli

$$d(A, B) = \cos^{-1}\langle A, B\rangle . \tag{4}$$

Sferni trokut zadan je trima točkama A, B, $C \in S^2$ koje su nekolinearne, tj. ne pripadaju istoj velikoj kružnici. Duljine njegovih stranica su $a = d(B, C)$, $b = d(A, C)$ i $c = d(A, B)$. Mjere njegovih kutova odgovaraju mjerama kutova između normala ravnina u kojima leže velike kružnice AB, AC i BC. Mjera kuta pri vrhu A je

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{\langle A \times B, A \times C\rangle}{\|A \times B\| \cdot \|A \times C\|}, \tag{5}$$

a tako računamo i kutove β i γ.



Slika 2. Hiperbolički trokut.

Model hiperboličke ravnine možemo izgraditi analogno, kao sferu imaginarnog polumjera $i = \sqrt{-1}$. Za to trebamo modificirati standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$ promjenom predznaka zadnjeg pribrojnika: $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$. Vektorski prostor s takvim skalarnim produktom nazivamo prostorom Minkowskog ili Lorentzovim prostorom. On predstavlja prirodnu prostorno-vremensku geometriju Einsteinove specijalne teorije relativnosti [3]. Dok je standardni skalarni kvadrat $\langle x, x \rangle$ nenul vektora x uvijek pozitivan, u prostoru Minkowskog može biti pozitivan, nula ili negativan. U prvom slučaju kažemo da je x prostorni, u drugom svjetlosni (npr. $x = (1,0,1)$), a u trećem vremenski vektor (npr. $x = e_3 = (0,0,1)$). Duljina $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ prostornog vektora je pozitivan realan broj, svjetlosnog vektora je nula, a vremenskog vektora imaginarni broj oblika $r\sqrt{-1}$ za $r > 0$. Vektorski produkt u prostoru Minkowskog također treba modificirati promjenom predznaka zadnje koordinate; računamo ga kao determinantu

$$x \times y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Točke hiperboličke ravnine čine svi vektori duljine i s pozitivnom trećom koordinatom: $H^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = i,\ x_3 > 0\}$. To su vektori iz $\mathbb{R}^3$ koji leže na gornjoj plohi dvoplošnog hiperboloida $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$ (vidi sliku 2). Pravci u H^2 su presjeci hiperboloida s ravninama kroz ishodište, kao i velike kružnice sfere S^2. Takva ravnina siječe hiperboloid ako i samo ako joj je vektor normale prostorni. Pokazuje se da je za svaka dva vremenska vektora njihov vektorski produkt prostorni. Zato kroz svake dvije točke $A, B \in H^2$ prolazi jedinstveni pravac, presjek hiperboloida s ravninom $\langle A \times B, x \rangle = 0$. Ograničili smo se na gornju plohu hiperboloida da izbjegnemo parove točaka oblika $B = -A$, koji bi imali beskonačno mnogo spojnica. To je analogno identificiranju antipodalnih točaka sfere.

Ključno svojstvo po kojem se H^2 razlikuje od euklidske ravnine je bogatija struktura paralelnih pravaca. Pravci određeni ravninama $\langle n_1, x\rangle = 0$ i $\langle n_2, x\rangle = 0$ sijeku se ako i samo ako je vektorski produkt $n_1 \times n_2$ vremenski. Ako je $n_1 \times n_2$ svjetlosni vektor kažemo da su pravci paralelni, a u slučaju kad je $n_1 \times n_2$ prostorni vektor zovemo ih ultraparalelnim. Sva tri slučaja mogući su za prostorne vektore n_1 i n_2, a paralelni i ultraparalelni pravci nemaju zajedničkih točaka u H^2. Vidjeli smo da se na sferi i u projektivnoj ravnini svaka dva pravca sijeku. Euklidsku ravninu karakterizira poznati Euklidov peti postulat: za svaki pravac ℓ i točku T koji nisu incidentni, postoji jedinstveni pravac kroz T koji ne siječe ℓ. U hiperboličkoj ravnini H^2 postoji beskonačno mnogo pravaca kroz T koji ne sijeku ℓ. Dva od njih su paralelni s ℓ, a ostali su ultraparalelni.

Udaljenost točaka u H^2 razlikuje se od udaljenosti u $\mathbb{R}^3$, ali i od euklidske duljine luka hiperbole između A i B koju vidimo na slici 2. Duljinu tog luka treba izračunati u metrici izvedenoj iz skalarnog produkta u prostoru Minkowskog. Pokazuje se da udaljenost točaka $A, B \in H^2$ računamo po formuli

$$d(A,B) = \mathrm{ch}^{-1}(-\langle A, B\rangle). \tag{6}$$

Ovdje se pojavljuje inverzna funkcija kosinusa hiperbolnog $\mathrm{ch}\, x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Ostale hiperbolne funkcije su sinus hiperbolni $\mathrm{sh}\, x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, tangens hiperbolni $\mathrm{th}\, x = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}$ i kotangens hiperbolni $\mathrm{cth}\, x = \frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x}$. Hiperbolne funkcije imaju slična svojstva kao odgovarajuće trigonometrijske funkcije, a s njima ih povezuje Eulerova formula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Iz nje slijedi da je $\mathrm{ch}(ix) = \cos x$, $\mathrm{sh}(ix) = i \sin x$, $\mathrm{th}(ix) = i\,\mathrm{tg}\, x$ te $\mathrm{cth}\, x = -i\,\mathrm{ctg}\, x$. Mjere kutova hiperboličkog trokuta računamo po istoj formuli (5) kao za sferni trokut. Budući da su A, B i C vremenski vektori, njihovi vektorski produkti su prostorni i duljine su im realni brojevi. Razlomak na koji primjenjujemo $\cos^{-1}$ uvijek pripada intervalu $[-1, 1]$, u prostoru Minkowskog kao i u $\mathbb{R}^3$ sa standardnim skalarnim i vektorskim produktom.

Teorem o kosinusu

Relacije (1) – (3) odnose se na pravokutni trokut. Elemente općeg trokuta povezuje poznati teorem o kosinusu, koji u euklidskoj ravnini glasi

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \tag{7}$$

Analogne formule vrijede za $\cos\alpha$ i $\cos\beta$. Ovu relaciju možemo promatrati kao generalizaciju Pitagorina teorema na trokute koji nisu pravokutni. Vidimo da je $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ako i samo ako vrijedi $c^2 = a^2 + b^2$. Evo kako glasi teorem o kosinusu za sferne i hiperboličke trokute.

Teorem 1. *U sfernom trokutu vrijedi*

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma. \tag{8}$$

U hiperboličkom trokutu vrijedi

$$\mathrm{ch}\, c = \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{ch}\, b - \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{sh}\, b \cos\gamma. \tag{9}$$

Dokaz. Na sferi po formuli (4) vrijedi $\cos a = \langle B, C\rangle$, $\cos b = \langle A, C\rangle$ i $\cos c = \langle A, B\rangle$, a po formuli (5) je $\cos\gamma = \dfrac{\langle C\times A, C\times B\rangle}{\|C\times A\|\cdot\|C\times B\|}$. Brojnik možemo izračunati iz sljedećeg identiteta za standardni skalarni i vektorski produkt u $\mathbb{R}^3$, čiji se dokaz nalazi u knjizi [9] na str. 85–86:

$$\langle x\times y, z\times w\rangle = \langle x, z\rangle\langle y, w\rangle - \langle x, w\rangle\langle y, z\rangle. \tag{10}$$

Uvrštavanjem $x = z = C$, $y = A$ i $w = B$ slijedi $\langle C\times A, C\times B\rangle = \cos c - \cos a\cos b$. Za izraze u nazivniku koristimo Lagrangeov identitet, koji dobijemo uvrštavanjem $z = x$ i $w = y$ u (10):

$$\|x\times y\|^2 = \|x\|^2\,\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2.$$

Slijedi $\|C\times A\| = \sqrt{1-\cos^2 b} = \sin b$ i $\|C\times B\| = \sin a$. Uvrštavanjem u izraz za $\cos\gamma$ dobivamo sferni teorem o kosinusu (8).

Stranice hiperboličkog trokuta zadovoljavaju $\operatorname{ch} a = -\langle B, C\rangle$, $\operatorname{ch} b = -\langle A, C\rangle$ i $\operatorname{ch} c = -\langle A, B\rangle$, a izraz za $\cos\gamma$ je isti. U prostoru Minkowskog identitet koji odgovara (10) glasi

$$\langle x\times y, z\times w\rangle = \langle x, w\rangle\langle y, z\rangle - \langle x, z\rangle\langle y, w\rangle,$$

a Lagrangeov identitet

$$\|x\times y\|^2 = \langle x, y\rangle^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2.$$

Koristeći se tim identitetima i sa $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, na isti način izvodimo hiperbolički teorem o kosinusu (9). $\square$

Iz prethodnog teorema slijedi sferni i hiperbolički Pitagorin teorem.

Teorem 2. *U sfernom trokutu je* $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$ *ako i samo vrijedi*

$$\cos c = \cos a\cos b.$$

U hiperboličkom trokutu je $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$ *ako i samo vrijedi*

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a\operatorname{ch} b.$$

Dokaz. Uočimo da je $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$ ekvivalentno s $\cos\gamma = 0$. $\square$

Sad možemo izvesti sfernu i hiperboličku verziju relacije (1). Za pravokutni trokut kosinus kuta izražava se kao omjer priležeće katete i hipotenuze, ali u sfernom slučaju na brojnik i nazivnik treba primijeniti tangens, a u hiperboličkom slučaju tangens hiperbolni.

Teorem 3. *U sfernom trokutu s kutom* $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$ *vrijedi*

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}, \qquad \cos\beta = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}.$$

U hiperboličkom trokutu s kutom $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$ *vrijedi*

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{th} c}, \qquad \cos\beta = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{th} c}.$$

Dokaz. Iz sfernog teorema 1 o kosinusu i Pitagorina teorema 2 slijedi

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b\, \cos c}{\sin b\, \sin c} = \frac{\cos a - \cos a\, \cos^2 b}{\sin b\, \sin c} = \frac{\cos a\,(1-\cos^2 b)}{\sin b\, \sin c}$$

$$= \frac{\cos a\, \sin^2 b}{\sin b\, \sin c} = \frac{\cos a\, \sin b}{\sin c} = \frac{\frac{\cos c}{\cos b}\,\sin b}{\sin c} = \frac{\frac{\sin b}{\cos b}}{\frac{\sin c}{\cos c}} = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}.$$

Tako dobivamo i formulu za $\cos\beta$, a u hiperboličkom slučaju umjesto trigonometrijskih u svakom koraku imamo hiperbolne funkcije. □

Teorem o sinusima

Drugi poznati trigonometrijski identitet za opći trokut je teorem o sinusima:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \tag{11}$$

Geometrijska interpretacija ovog omjera je promjer trokutu opisane kružnice ili $\frac{abc}{2P}$, gdje je P površina trokuta. Identitet možemo izvesti iz teorema o kosinusu.

Teorem 4. *U sfernom trokutu vrijedi*

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}. \tag{12}$$

U hiperboličkom trokutu vrijedi

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\sin\alpha} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin\beta} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin\gamma}. \tag{13}$$

Dokaz. Iz hiperboličkog teorema 1 o kosinusu te identiteta $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ i $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ slijedi

$$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = 1 - \left(\frac{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} c}{\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b}\right)^2$$

$$= \frac{\operatorname{sh}^2 a \operatorname{sh}^2 b - \operatorname{ch}^2 a \operatorname{ch}^2 b + 2\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{ch}^2 c}{\operatorname{sh}^2 a \operatorname{sh}^2 b}$$

$$= \frac{(\operatorname{ch}^2 a - 1)(\operatorname{ch}^2 b - 1) - \operatorname{ch}^2 a \operatorname{ch}^2 b + 2\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{ch}^2 c}{\operatorname{sh}^2 a \operatorname{sh}^2 b}$$

$$= \frac{1 - \operatorname{ch}^2 a - \operatorname{ch}^2 b - \operatorname{ch}^2 c + 2\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c}{\operatorname{sh}^2 a \operatorname{sh}^2 b}.$$

Omjer $\frac{\operatorname{sh}^2 c}{\sin^2\gamma}$ izražava se kao izraz simetričan u a, b i c:

$$\frac{\operatorname{sh}^2 a \operatorname{sh}^2 b \operatorname{sh}^2 c}{1 - \operatorname{ch}^2 a - \operatorname{ch}^2 b - \operatorname{ch}^2 c + 2\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c}.$$

Isti izraz dobili bismo računanjem $\dfrac{\operatorname{sh}^2 a}{\sin^2\alpha}$ i $\dfrac{\operatorname{sh}^2 b}{\sin^2\beta}$, pa se ta tri omjera podudaraju. U sfernom trokutu računanjem omjera $\dfrac{\sin^2 a}{\sin^2\alpha}$, $\dfrac{\sin^2 b}{\sin^2\beta}$ i $\dfrac{\sin^2 c}{\sin^2\gamma}$ dobijemo izraz

$$\frac{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c},$$

a u euklidskom trokutu su omjeri $\dfrac{a^2}{\sin^2\alpha}$, $\dfrac{b^2}{\sin^2\beta}$ i $\dfrac{c^2}{\sin^2\gamma}$ jednaki

$$\frac{4a^2b^2c^2}{2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-a^4-b^4-c^4}.$$

Nazivnik zadnjeg izraza je $16P$, što se vidi iz Heronove formule za površinu trokuta $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, gdje je $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ poluopseg. $\square$

Iz teorema o sinusima lako se izvodi sferna i hiperbolička varijanta relacije (2).

Teorem 5. *U sfernom trokutu s kutom* $\gamma=\dfrac{\pi}{2}$ *vrijedi*

$$\sin\alpha=\frac{\sin a}{\sin c},\qquad \sin\beta=\frac{\sin b}{\sin c}.$$

U hiperboličkom trokutu s kutom $\gamma=\dfrac{\pi}{2}$ *vrijedi*

$$\sin\alpha=\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} c},\qquad \sin\beta=\frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} c}.$$

Dokaz. Slijedi direktno iz (12) i (13) zato što je $\sin\gamma=1$. $\square$

Konačno, iz $\operatorname{tg} x=\dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ te teorema 2, 3 i 5 vidimo kako glasi sferna i hiperbolička varijanta relacije (3).

Teorem 6. *U sfernom trokutu s kutom* $\gamma=\dfrac{\pi}{2}$ *vrijedi*

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg} a}{\sin b},\qquad \operatorname{tg}\beta=\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta}=\frac{\operatorname{tg} b}{\sin a}.$$

U hiperboličkom trokutu s kutom $\gamma=\dfrac{\pi}{2}$ *vrijedi*

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{sh} b},\qquad \operatorname{tg}\beta=\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta}=\frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{sh} a}.$$

Hiperboličku geometriju otkrili su nezavisno njemački matematičar Carl Friedrich Gauss (1777.–1855.), ruski matematičar Nikolaj Ivanovič Lobačevski (1793.–1856.) i mađarski matematičar János Bolyai (1802.–1860.). Bolyai je uočio da množenjem relacija (11), (12) i (13) s 2π u brojniku dobivamo izraze za duljinu kružnice. U euklidskoj ravnini duljina kružnice polumjera r računa se po poznatoj formuli $O(r)=2\pi r$. Na sferi vrijedi formula $O(r)=2\pi\sin r$, a u hiperboličkoj ravnini

$O(r) = 2\pi \operatorname{sh} r$. Tako je dobio univerzalni iskaz teorema o sinusima: u svakom euklidskom, sfernom i hiperboličkom trokutu vrijedi

$$\frac{O(a)}{\sin\alpha} = \frac{O(b)}{\sin\beta} = \frac{O(c)}{\sin\gamma}.$$

Riječima, omjer sinusa kuta i duljine kružnice kojoj je polumjer nasuprotna stranica trokuta je konstantan.

Dokaz formula za duljinu kružnice nalazi se u knjizi [4] na str. 407–408. U euklidskoj ravnini duljina kružnice proporcionalna je njezinom polumjeru. Zbog svojstva $\sin r < r$ za $r > 0$, duljina kružnice na sferi manja je od duljine euklidske kružnice odgovarajućeg polumjera i omeđena je odozgo s duljinom velike kružnice 2π. S druge strane, duljina hiperboličke kružnice raste eksponencijalno s r i veća je od odgovarajuće euklidske kružnice. Tako se u diferencijalnoj geometriji zakrivljenost plohe može odrediti "iznutra" (Gaussov Theorema Egregium, vidi poglavlje 4C knjige [7]). Sfera ima pozitivnu zakrivljenost, hiperbolička ravnina negativnu, a zakrivljenost euklidske ravnine je nula.

Dualni teorem o kosinusu

Na kraju ćemo dokazati trigonometrijski identitet u sfernoj i hiperboličkoj geometriji koji nema ekvivalenta u euklidskoj geometriji. S pomoću teorema o kosinusu (7), (8) i (9) iz duljina stranica trokuta a, b, c možemo izračunati mjere njegovih kutova α, β, γ. Obrnuto, ako su zadane mjere kutova α, β, γ euklidskog trokuta, ne možemo izračunati duljine njegovih stranica jer je trokut određen samo do na sličnost. U sfernoj i hiperboličkoj trigonometriji ipak imamo formule koje nam to omogućuju.

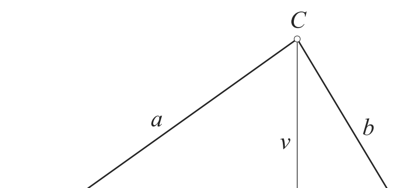
Teorem 7. *U sfernom trokutu vrijedi*

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c. \tag{14}$$

U hiperboličkom trokutu vrijedi

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\operatorname{ch} c. \tag{15}$$

Dokaz. Spustimo visinu iz vrha C na nasuprotnu stranicu. Neka je njezino nožište N, duljina v i neka dijeli nasuprotnu stranicu na dijelove duljine c_1 i c_2. U sfernom trokutu iz Pitagorina teorema 2 primijenjenog na pravokutne trokute BNC i ANC slijedi $\cos a = \cos c_1 \cos v$ i $\cos b = \cos c_2 \cos v$. Pomnožimo te dvije jednadžbe međusobno i sa $\cos c$, koji s lijeve strane raspišemo po adicijskoj formuli $\cos(c_1 + c_2) = \cos c_1 \cos c_2 - \sin c_1 \sin c_2$:



Slika 3. Dokaz dualnog teorema o kosinusu.

$$\cos a\cos b(\cos c_1\cos c_2 - \sin c_1\sin c_2) = \cos c_1\cos c_2\cos^2 v\cos c.$$

Podijelimo s $\cos c_1 \cos c_2$ i zamijenimo $\cos^2 v$ s $1 - \sin^2 v$:

$$\cos a\cos b(1 - \operatorname{tg} c_1 \operatorname{tg} c_2) = (1 - \sin^2 v)\cos c.$$

Sad izmnožimo zagrade i presložimo jednadžbu ovako:

$$\cos a \cos b - \cos c = \cos a \cos b \operatorname{tg} c_1 \operatorname{tg} c_2 - \sin^2 v \cos c.$$

Izraz na lijevoj strani raspišemo po teoremu 1 o kosinusu:

$$-\sin a \sin b \cos \gamma = \cos a \cos b \operatorname{tg} c_1 \operatorname{tg} c_2 - \sin^2 v \cos c.$$

Podijelimo li sa $-\sin a \sin b$, dobijemo

$$\cos \gamma = -\frac{\operatorname{tg} c_1}{\operatorname{tg} a} \cdot \frac{\operatorname{tg} c_2}{\operatorname{tg} b} + \frac{\sin v}{\sin a} \cdot \frac{\sin v}{\sin b} \cdot \cos c.$$

Na kraju primijenimo teoreme 3 i 5 na pravokutne trokute BNC i ANC, te dobijemo relaciju (14).

Dokaz je za hiperbolički trokut analogan, samo se koristimo hiperboličkim verzijama teorema i adicijskom formulom

$$\operatorname{ch}(c_1 + c_2) = \operatorname{ch} c_1 \operatorname{ch} c_2 + \operatorname{sh} c_1 \operatorname{sh} c_2.$$

□

Analogni dokaz možemo provesti i u euklidskoj ravnini, ali dobijemo relaciju koja ne uključuje duljine stranica (zapravo je to dokaz adicijske formule za sinus). Osim klasičnih teorema o sukladnosti SKS, KSK, SKK i SSK$^{>}$, za sferne i hiperboličke trokute vrijedi i teorem o sukladnosti KKK. Dva trokuta koji se podudaraju u sva tri kuta su sukladna, a slični trokuti ne postoje. Čitatelje koji se žele bolje upoznati s ovim neobičnim geometrijama upućujemo na knjige [4], [9] i [10].

Literatura

[1] B. ALIHODŽIĆ, *Primjena trigonometrije u planimetriji, stereometriji, fizici i geodeziji*, Matematičko-fizički list **LXVI 3** (2015./ 2016.), 163–164.

[2] F. M. BRUECKLER, *Povijest matematike II*, Sveučilište u Osijeku, 2010.

[3] T. DRAY, *The geometry of special relativity*, CRC Press, 2012.

[4] M. J. GREENBERG, *Euclidean and non-Euclidean geometries. Development and history*, treće izdanje, W. H. Freeman and Company, 1994.

[5] I. KAVČIĆ, *Euklidska, hiperbolička i sferna trigonometrija*, diplomski rad, PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2018.

[6] V. KRČADINAC, *O veličini Mjeseca*, Matematičko-fizički list **LII 3** (2002./ 2003.), 169–172.

[7] W. KÜHNEL, *Differential geometry. Curves–surfaces–manifolds*, drugo izdanje, American Mathematical Society, 2006.

[8] D. F. MANSFIELD I N. J. WILDBERGER, *Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry*, Historia Mathematica **44** (2017), 395–419.

[9] P. J. RYAN, *Euclidean and non-Euclidean geometry: An analytic approach*, Cambridge University Press, 1986.

[10] W. P. THURSTON, *Three-dimensional geometry and topology, Vol. 1*, Princeton University Press, 1997.

[11] Wikipedia, *History of trigonometry*, siječanj 2018.
`https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_trigonometry`