ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. prosinca 2018. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. $3/275$.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 72.

A) Zadatci iz matematike

3651. Riješi sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} x_1+x_2-6x_3-4x_4 &= 6 & (J_1)\\ 3x_1-x_2-6x_3-4x_4 &= 2 & (J_2)\\ 2x_1+3x_2+9x_3+2x_4 &= 6 & (J_3)\\ 3x_1+2x_2+3x_3+8x_4 &= -7 & (J_4) \end{aligned}$$

3652. Nađi sva rješenja jednadžbe

$$(x^2+y)(x+y^2)=(x-y)^3$$

u skupu cijelih brojeva različitih od nule.

3653. Neka je x realan broj takav da je $x+\dfrac{1}{x}$ cijeli broj. Dokaži da je $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ cijeli broj za svaki prirodan broj n.

3654. Ako su a, b, c pozitivni brojevi takvi da je $a+b+c=3$, dokaži nejednakost

$$a^2b+b^2c+c^2a \le a^2+b^2+c^2.$$

3655. Pokaži da sve ove točke $A(1,0,2)$, $B(0,3,-1)$, $C(4,3,-1)$, $D(5,-2,4)$ leže u istoj ravnini. Kolika je površina četverokuta $ABCD$?

3656. Odredi sva realna rješenja jednadžbe

$$\frac{8^x+27^x}{12^x+18^x}=\frac{7}{6}.$$

3657. Bez računala odredi veći od ova dva broja $200!$ i 100^{200}.

3658. Pravci na kojima leže nasuprotne stranice $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ konveksnog četverokuta $ABCD$ sijeku se u točkama E i F, tim redom. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ dane su točke K i L takve da je $AD \parallel CK$ i $CD \parallel AL$. Ako vrijedi jednakost

$$\frac{|AE|\cdot|CE|}{|DE|\cdot|BE|}=\frac{|AF|\cdot|CF|}{|BF|\cdot|DF|},$$

dokaži $EF \parallel KL$.

3659. Neka su n i m udaljenosti točaka A i B trokuta ABC od proizvoljnog pravca kroz vrh C. Dokaži jednakost

$$a^2n^2+b^2m^2-2abnm\cos\gamma=4P^2,$$

gdje je P površina trokuta.

3660. Nasuprot stranica a, b, c trokuta su kutovi 55°, 15°, 110°. Dokaži jednakost $c^2-a^2=ab$.

3661. Dan je jednakokračan trokut ABC, gdje je $|AB|=|AC|$ i $\sphericalangle A=45^\circ$. Točke D i E su polovišta bridova $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Dokaži da kružnica opisana trokutu ADE dodiruje onu kojoj je $\overline{BC}$ promjer.

3662. Dokaži jednakost

$$\cos^3\frac{x}{3}+\cos^3\frac{x+2\pi}{3}+\cos^3\frac{x+4\pi}{3}=\frac{3}{4}\cos x.$$

3663. Za $n\ge 2$ dokaži jednakost

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}.$$

3664. Dva stošca imaju koncentrične baze i zajedničku visinu h. Razlika kutova između izvodnica i osi stošca jednaka je β, a kut između izvodnice unutarnjeg stošca i ravnine baze je α. Odredi volumen prostora između bočnih ploha stožaca.

B) Zadatci iz fizike

OŠ – 442. Bungee jumping skakač mase 90 kilograma skače s mosta visokog 50 metara. Duljina užeta za skok se prilagođava težini svakog skakača. Uže je elastično i zaustavlja skakača na visini 2 metra od vode. Njegova je konstanta elastičnosti 30 N/m. Koliko je to uže dugačko u neopterećenom stanju?

OŠ – 443. Učenik je vukao drveni kvadar mase 300 grama silom od 0.9 njutna. Kad je na njega zavezao kvadar iste mase utvrdio je da tako spojene kvadre može vući silom od 2.3 njutna. Koliko iznosi koeficijent trenja za prvi, a koliko za drugi kvadar?

OŠ – 444. Verona Rupes je najviša litica u Sunčevom sustavu i nalazi se na Uranovom mjesecu Mirandi. Visoka je oko 20 kilometara. Pad s nje bi trajao 11.86 minuta jer je ubrzanje sile teže na Mirandi jako maleno. S koje bi visine na Zemlji tijelo trebalo pasti da u tlo udari istom brzinom koju bi imalo da padne s vrha litice Verona Rupes?

OŠ – 445. Vaza u obliku kvadra je napravljena od stakla. Baza joj je kvadrat kojemu je stranica dugačka 10, a visina 30 centimetara. Debljina baze je 1 centimetar, a bočne su strane dvostruko tanje. Kolika je masa vaze? Gustoća stakla je 2500 $\mathrm{kg/m^3}$.

1679. Na kojoj visini znad površine Zemlje treba kružiti satelit ako želimo da mu ophodno vrijeme iznosi točno dva sata? Uzmimo da je Zemlja kugla radijusa 6371 km i mase $6 \cdot 10^{24}$ kg.

1680. Homogena kugla radijusa R pluta na površini tekućine, tako da je u ravnoteži kad je polovina volumena kugle uronjena u tekućinu. Odredi period malih oscilacija, gore-dolje oko položaja ravnoteže.

1681. Element lutecij (Lu), među najrjeđim elementima u prirodi, sadrži dva izotopa, 97.41 % $^{175}\mathrm{Lu}$ i 2.59 % $^{176}\mathrm{Lu}$. Teži izotop je radioaktivan, s vremenom poluraspada 38 milijardi godina. Odredi koliko će se raspada dogoditi u uzorku s 5 grama lutecija u intervalu od 10 sekundi.

1682. Halleyev komet giba se po vrlo izduženoj elipsi oko Sunca. U perihelu, najbližoj točki Suncu, udaljenost je 0.586 a.j. (astronomska jedinica), a u ahelu, suprotnoj točki putanje, 35.082 a.j. Koristeći činjenicu da je ophodno vrijeme Zemlje oko Sunca definicija godine, a a.j. definirana kao srednja udaljenost Zemlje od Sunca, odredi period Halleyevog kometa (u godinama), te njegovu brzinu (u odnosu na Sunce) u perihelu i ahelu.

1683. Odredi indeks loma stakla od kojeg je načinjena plankonveksna leća kojoj je žarišna daljina 82 % veća od radijusa zakrivljenosti.

1684. Odredi broj atoma u kovanici od dvije kune. Kovanica teži 6.2 grama, a sastav slitine je 65 % bakar, 23.2 % nikal i 11.8 % cink (maseni omjer).

1685. Od stakla gustoće 2500 $\mathrm{kg/m^3}$ načinjena je šuplja kugla debljine stakla 1 cm, vanjskog promjera 20 cm. Kolika je površina presjeka s vodenom plohom, ako kugla pluta na morskoj vodi, gustoće 1030 $\mathrm{kg/m^3}$? Masu zraka zanemarujemo.

C) Rješenja iz matematike

3623. *Dokaži da za duljine kateta a, b i duljinu hipotenuze c pravokutnog trokuta vrijedi nejednakost*

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq c\sqrt{2}.$$

Rješenje. Najprije,

$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{c^2}{2}, \quad a+b \geq 2\sqrt{ab}.$$

Računamo,

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} &= \frac{a^3+b^3}{ab} = \frac{(a+b)(a^2+b^2-ab)}{ab} \\ &= \frac{a+b}{ab}(c^2-ab) \\ &\geq \frac{a+b}{ab}\left(c^2 - \frac{c^2}{2}\right) = \frac{a+b}{ab} \cdot \frac{c^2}{2} \\ &\geq \frac{2\sqrt{ab}}{ab} \cdot \frac{c^2}{2} = \frac{c^2}{\sqrt{ab}} \geq \frac{c^2}{\sqrt{\frac{c^2}{2}}} \\ &= c\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Danica Petolas (1),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3624. *Neka je n pozitivan cijeli broj. Dokaži da su brojevi $n!+1$ i $(n+1)!+1$ relativno prosti.*

Rješenje. Ako je $n = 1$ tada se radi o brojevima 2 i 3 koji jesu relativno prosti. Ako je $n \geq 2$ tada niti jedan prost broj p, $2 \leq p \leq n$, ne dijeli $n!+1$ što znači da su svi prosti faktori od $n!+1$ veći ili jednaki $n+1$. Pretpostavimo da je q, $q \geq n+1$, prost broj koji dijeli i $n!+1$ i $(n+1)!+1$. Tada on dijeli i njihovu razliku

$$(n+1)!+1-(n!+1) = n \cdot n!,$$

što je kontradikcija s $q \geq n+1$.

Danica Petolas (1), Zagreb

3625. *Nađi sve parove* (x, y) *cijelih brojeva takve da je*

$$1 + 2016x + 2018y = xy.$$

Rješenje. Zadana jednadžba je ekvivalentna s

$$(x - 2018)(y - 2016) = 2017^2.$$

Kako je broj 2017 prost, imamo sljedećih šest slučajeva:

$$(x - 2018, y - 2016) \in \{(\pm 1, \pm 2017^2), (\pm 2017, \pm 2017), (\pm 2017^2, \pm 1)\},$$

tj.

$$(x, y) = \{(2019, 4\,070\,305), (2017, -4\,066\,273), (4035, 4033), (1, -1), (-4\,066\,271, 2015), (4\,070\,307, 2017)\}.$$

Danica Petolas (1), Zagreb

3626. *Odredi sva realna rješenja jednadžbe* $x^{10} - x^8 + 8x^6 - 24x^4 + 32x^2 - 48 = 0.$

Rješenje. Ako stavimo $u = x^2$ jednadžba postaje

$$u^5 - u^4 + 8u^3 - 24u^2 + 32u - 48 = 0. \quad (*)$$

Prvo ispitujemo ima li ta jednadžba cjelobrojnih korijena, a oni se nalaze među cjelobrojnim djeliteljima od 48. Zbog $u = x^2 \geq 0$, tražimo samo pozitivne cjelobrojne djelitelje od 48. Ako je $u \geq 3$ onda zbog

$$u^5 - u^4 + 8u^3 - 24u^2 + 32u - 48 = u^4(u - 1) + 8u^2(u - 3) + 16(2u - 3) > 0$$

vidimo da je dovoljno provjeriti jesu li $u = 1$ i $u = 2$ rješenja. Direktnim uvrštavanjem vidimo da $u = 1$ nije, a $u = 2$ jest rješenje. Sada je, nakon dijeljenja polinoma,

$$u^5 - u^4 + 8u^3 - 24u^2 + 32u - 48 = (u - 2)(u^4 + u^3 + 10u^2 - 4u + 24).$$

Uočimo

$$u^4 + u^3 + 10u^2 - 4u + 24 = (u^4 + 8u^2 + 16) + u^3 + (2u^2 - 4u + 2) + 6 = (u^2 + 4)^2 + u^3 + 2(u - 1)^2 + 6 > 0,$$

pa je $u = 2$ jedino realno rješenje od $(*)$, odnosno $x = -\sqrt{2}$ i $x = \sqrt{2}$ su jedina dva realna rješenja zadane jednadžbe.

Danica Petolas (1), Zagreb

3627. *Dokaži da se za* $x, y, z > 1$ *iz jednakosti*

$$\frac{x(y + z - x)}{\log x} = \frac{y(z + x - y)}{\log y} = \frac{z(x + y - z)}{\log z}$$

dobiva

$$x^y y^x = y^z z^y = x^z z^x.$$

Prvo rješenje. Koristit ćemo poznato svojstvo omjera:

$$\frac{a}{u} = \frac{b}{v} = \frac{a + b}{u + v}. \qquad (*)$$

Iz $\dfrac{x(y + z - x)}{\log x} = \dfrac{y(z + x - y)}{\log y} \implies$

$$\frac{y \log x}{y + z - x} = \frac{x \log y}{z + x - y} = (*) = \frac{\log (x^y y^x)}{2z}. \qquad (1)$$

Iz $\dfrac{y(z + x - y)}{\log y} = \dfrac{z(x + y - z)}{\log z} \implies$

$$\frac{y \log z}{x + y - z} = \frac{z \log y}{z + x - y} = (*) = \frac{\log (y^z z^y)}{2x}. \qquad (2)$$

Iz $\dfrac{x(y + z - x)}{\log x} = \dfrac{z(x + y - z)}{\log z} \implies$

$$\frac{z \log x}{y + z - x} = \frac{x \log z}{x + y - z} = (*) = \frac{\log (x^z z^x)}{2y}. \qquad (3)$$

Sada iz (1) i (2) imamo

$$\log\left(x^y y^x\right) = \frac{2xz \log y}{z + x - y} = \log\left(y^z z^y\right) \implies x^y y^x = y^z z^y,$$

a iz (2) i (3)

$$\log\left(y^z z^y\right) = \frac{2xy \log z}{x + y - z} = \log\left(x^z z^x\right) \implies y^z z^y = x^z z^x.$$

Dakle, $x^y y^x = y^z z^y = x^z z^x$.

Danica Petolas (1), Zagreb

Drugo rješenje. Stavimo

$$\frac{x(y+z-x)}{\log x} = \frac{y(z+x-y)}{\log y} = \frac{z(x+y-z)}{\log z} = \frac{1}{t}.$$

Tada je

$$\log x = tx(y+z-x),$$
$$\log y = ty(z+x-y),$$
$$\log z = tz(x+y-z)$$

i

$$y\log x + x\log y = 2txyz,$$
$$y\log z + z\log y = 2txyz,$$
$$z\log x + x\log z = 2txyz.$$

Dakle,

$$y\log x + x\log y = y\log z + z\log y = z\log x + x\log z$$

tj.

$$\log x^y y^x = \log z^y y^z = \log x^z z^x.$$

Konačno,

$$x^y y^x = z^y y^z = x^z z^x.$$

Ur.

3628. *Ako su dijagonale četverokuta okomite, dokaži da su i dijagonale svakog četverokuta s istim duljinama stranica, međusobno okomite.*

Rješenje. Neka je zadan četverokut s duljinama stranica a, b, c, d s okomitim dijagonalama. Zbog okomitosti dijagonala, koristeći oznake sa slike,

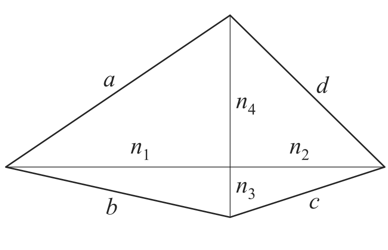
$$a^2+c^2 = (n_1^2+n_4^2)+(n_2^2+n_3^2) = n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2.$$

Analogno,

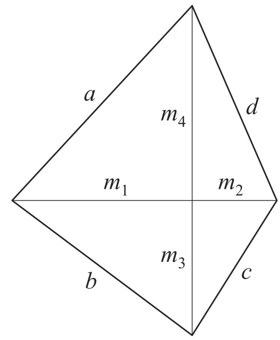
$$b^2+d^2 = n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2.$$

Dakle, za stranice tog četverokuta vrijedi

$$a^2+c^2 = b^2+d^2. \qquad (*)$$



Obratno, ako je zadan četverokut s duljinama stranica a, b, c, d onda za njegove duljine stranica vrijedi $(*)$ i koristeći oznake sa slike dolje i kosinusov poučak vrijedi,



$$a^2 = m_1^2 + m_4^2 - 2m_1m_4\cos\alpha$$
$$b^2 = m_1^2 + m_3^2 + 2m_1m_3\cos\alpha$$
$$c^2 = m_2^2 + m_3^2 - 2m_2m_3\cos\alpha$$
$$d^2 = m_2^2 + m_4^2 + 2m_2m_4\cos\alpha,$$

pri čemu je kut α među dijagonalama nasuprot stranice a (odnosno c). Iz $(*)$ imamo

$$0 = b^2+d^2-a^2-c^2 = 2(m_1m_3+m_2m_4+m_2m_3+m_1m_4)\cos\alpha.$$

Odavde slijedi $\cos\alpha = 0$ tj. $\alpha = 90^\circ$.

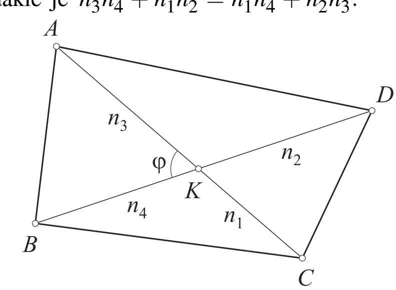
Danica Petolas (1), Zagreb

3629. *Dijagonale četverokuta $ABCD$ sijeku se u točki K, pričem vrijedi $P_{ABK}^2 + P_{CDK}^2 = P_{BCK}^2 + P_{ADK}^2$. Dokaži da je K polovište barem jedne od dijagonala.*

Rješenje. Uz oznake kao na slici,

$$P_{ABK} = \frac{n_3n_4\sin\varphi}{2}, \quad P_{CDK} = \frac{n_1n_2\sin\varphi}{2},$$
$$P_{BCK} = \frac{n_1n_4\sin\varphi}{2}, \quad P_{ADK} = \frac{n_2n_3\sin\varphi}{2},$$

odakle je $n_3^2n_4^2 + n_1^2n_2^2 = n_1^2n_4^2 + n_2^2n_3^2$.



Dodavanjem $-2n_1n_2n_3n_4$ na obje strane prethodne jednakosti slijedi

$$(n_1n_2 - n_3n_4)^2 = (n_1n_4 - n_2n_3)^2. \qquad (*)$$

Korjenovanjem $(*)$ imamo dvije moguće situacije.

1° $n_1n_2 - n_3n_4 = n_1n_4 - n_2n_3$

$$\implies n_1n_2 + n_2n_3 = n_1n_4 + n_3n_4$$

$$\implies n_2|AC| = n_4|AC| \implies n_2 = n_4.$$

2° $n_1n_2 - n_3n_4 = -n_1n_4 + n_2n_3$

$$\implies n_1n_2 + n_1n_4 = n_2n_3 + n_3n_4$$

$$\implies n_1|BD| = n_3|BD| \implies n_1 = n_3.$$

Danica Petolas (1), Zagreb

3630. *U pravokutnik $ABCD$ upisan je trokut AEK tako da je E na $\overline{BC}$ i K na $\overline{CD}$. Odredi* $\operatorname{tg}\sphericalangle KAE$ *ako je*

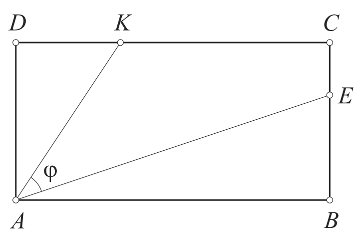
$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BE|}{|CE|} = \frac{|CK|}{|DK|} = m.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\varphi &= \operatorname{tg}(90^\circ - (\sphericalangle EAB + \sphericalangle KAD)) \\ &= \operatorname{ctg}(\sphericalangle EAB + \sphericalangle KAD) \\ &= \frac{\operatorname{ctg}\sphericalangle EAB \operatorname{ctg}\sphericalangle KAD - 1}{\operatorname{ctg}\sphericalangle EAB + \operatorname{ctg}\sphericalangle KAD}\end{aligned}$$

tj.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{|AB|}{|BE|}\frac{|AD|}{|DK|} - 1}{\frac{|AB|}{|BE|} + \frac{|AD|}{|DK|}}. \qquad (*)$$



Prvo,

$$|AB| = m|BC|,$$

$$|BE| = m|CE| = m(|BC| - |BE|) \implies$$

$$|BE| = \frac{m}{m+1}|BC| \implies$$

$$\frac{|AB|}{|BE|} = m + 1. \qquad (**)$$

Drugo,

$$|AD| = |BC| = \frac{1}{m}|AB|,$$

$$|DK| = \frac{1}{m}|CK| = \frac{1}{m}(|AB| - |DK|) \implies$$

$$|DK| = \frac{1}{m+1}|AB| \implies$$

$$\frac{|AD|}{|DK|} = \frac{m+1}{m}. \qquad (***)$$

Uvrštavanjem $(**)$ i $(***)$ u $(*)$ dobivamo:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{m^2 + m + 1}{(m+1)^2}.$$

Danica Petolas (1), Zagreb

3631. *Dužina $\overline{BD}$ je težišnica trokuta ABC. Odredi omjer polumjera trokutu ABC opisane kružnice i polumjera trokutu ABD upisane kružnice, ako je $|AB| = 2$, $|AC| = 6$, $\sphericalangle BAC = 60^\circ$.*

Rješenje. Korištenjem kosinusovog poučka za trokute ABD i ABC:

$$|BD|^2 = 4 + 9 - 12\cos 60^\circ = 7$$

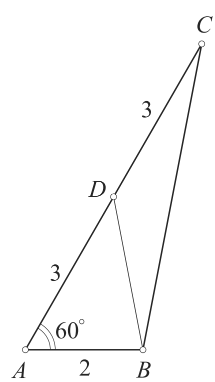
$$\implies |BD| = \sqrt{7},$$

$$|BC|^2 = 4 + 36 - 24\cos 60^\circ = 28$$

$$\implies |BC| = 2\sqrt{7}.$$

$$P_{ABD} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$P_{ABC} = \frac{2 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ}{2} = 3\sqrt{3}.$$



Koristeći poznate formule za radijus upisane i opisane kružnice, redom imamo

$$r = \frac{P_{ABD}}{s} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{5+\sqrt{7}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}},$$

$$R = \frac{abc}{4P_{ABC}} = \frac{2\cdot 6\cdot 2\sqrt{7}}{12\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}.$$

$$\Longrightarrow \frac{R}{r} = \frac{14+10\sqrt{7}}{9}.$$

Danica Petolas (1), Zagreb

3632. *Neka je ABC trokut sa stranicama duljina a, b, c i nasuprotnim kutovima α, β, γ. Ako je $\alpha = 3\beta$, dokaži*

$$(a-b)^2(a+b) = bc^2.$$

Rješenje. Prvo,

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta) = 180^\circ - 4\beta.$$

Drugo,

$$\frac{\sin(3\beta)}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{1}{2R}.$$

Sada računamo, koristeći formulu za pretvaranje sume(razlike) sinusa u produkt:

$$\begin{aligned}
&(a-b)^2(a+b)\\
&= 8R^3(\sin(3\beta)-\sin\beta)^2(\sin(3\beta)+\sin\beta)\\
&= 64R^3\cos^2(2\beta)\sin^2\beta\sin(2\beta)\cos\beta\\
&= 64R^3\sin\beta\,(\sin\beta\cos\beta)\sin(2\beta)\cos^2(2\beta)\\
&= 32R^3\sin\beta\sin^2(2\beta)\cos^2(2\beta)\\
&= 8R^3\sin\beta\sin^2(4\beta)\\
&= 8R^3\sin\beta\sin^2(180^\circ-4\beta)\\
&= 8R^3\sin\beta\sin^2\gamma\\
&= bc^2.
\end{aligned}$$

Danica Petolas (1), Zagreb

3633. *Neka su A, B, C tri točke na kružnici, P, Q, R polovišta lukova $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{AB}$, tim redom. Dužine $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CR}$ sijeku stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ redom u točkama L, M, N. Dokaži nejednakost*

$$\frac{|AL|}{|PL|} + \frac{|BM|}{|QM|} + \frac{|CN|}{|RN|} \geq 9.$$

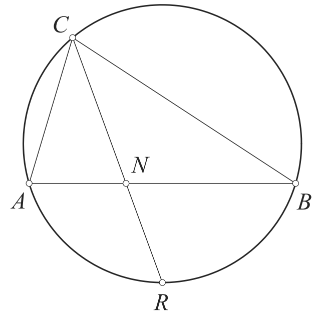
Rješenje. Uočimo da je $\overline{CR}$ simetrala kuta pri vrhu C trokuta ABC kojem je zadana kružnica opisana.

Duljina simetrale $|CN|$ je poznata stvar iz geometrije:

$$|CN|^2 = \frac{4abs(s-c)}{(a+b)^2}. \qquad (*)$$

Ovo se može dobiti iz Stewartovog teorema tj.

$$\begin{aligned}
&|AN|\cdot|BC|^2 + |BN|\cdot|AC|^2\\
&= |AB|(|AN|\cdot|BN| + |CN|^2).
\end{aligned}$$



Također simetrala $\overline{CN}$ dijeli stranicu $\overline{AB}$ u omjeru stranica koje zatvaraju kut:

$$\frac{|AN|}{|NB|} = \frac{b}{a}, \quad |AN| + |NB| = c \Longrightarrow$$

$$|AN| = \frac{bc}{a+b}, \quad |NB| = \frac{ac}{a+b}. \qquad (**)$$

Iz potencije točke N s obzirom na kružnicu slijedi: $|CN||RN| = |AN||NB| \Longrightarrow$

$$|RN| = \frac{|AN||NB|}{|CN|} = (**) = \frac{abc^2}{|CN|(a+b)^2} \Longrightarrow$$

$$\frac{|CN|}{|RN|} = \frac{|CN|^2(a+b)^2}{abc^2} = (*) = \frac{4s(s-c)}{c^2}. \qquad (1)$$

Posve analogno se dobiva:

$$\frac{|AL|}{|PL|} = \frac{4s(s-a)}{a^2}, \quad \frac{|BM|}{|QM|} = \frac{4s(s-b)}{b^2}. \qquad (2)$$

Sada pokazujemo zadanu nejednakost, koristeći (1) i (2):

$$\begin{aligned}
&\frac{|AL|}{|PL|} + \frac{|BM|}{|QM|} + \frac{|CN|}{|RN|}\\
&= \frac{4s(s-a)}{a^2} + \frac{4s(s-b)}{b^2} + \frac{4s(s-c)}{c^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(2s-a)^2-a^2}{a^2}+\frac{(2s-b)^2-b^2}{b^2}\\
&\quad+\frac{(2s-c)^2-c^2}{c^2}\\
&= \left.\frac{(2s-a)^2}{a^2}+\frac{(2s-b)^2}{b^2}+\frac{(2s-c)^2}{c^2}\right)-3\\
&\overset{\text{(A-K)}}{\geq} \frac{1}{3}\left(\frac{2s-a}{a}+\frac{2s-b}{b}+\frac{2s-c}{c}\right)^2-3\\
&= \frac{1}{3}\left((a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right)-3\right)^2-3\\
&\overset{\text{(A-H)}}{\geq} \frac{1}{3}(9-3)^2-3=9.
\end{aligned}
$$

Danica Petolas (1), Zagreb

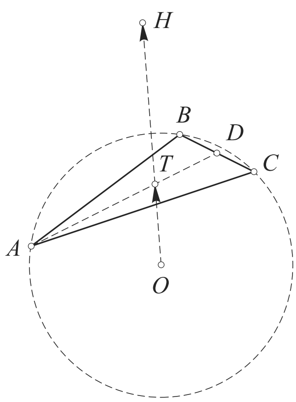
3634. *Odredi kartezijeve koordinate vrhova A, B, C trokuta ABC čiji je ortocentar $H(-3,10)$, središte opisane kružnice $O(-2,-3)$ i polovište stranice $\overline{BC}$ je $D(1,3)$.*

Rješenje. Ako označimo s T težište trokuta, točke O, T, H se nalaze na Eulerovom pravcu i poznato je da vrijedi $3\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OH}$. Slijedi,

$$
\begin{aligned}
3(\vec{r}_T-\vec{r}_O)=\vec{r}_H-\vec{r}_O &\implies \vec{r}_T=\frac{1}{3}(\vec{r}_H+2\vec{r}_O)\\
&\implies T=\left(-\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right).
\end{aligned}
$$

S druge strane $\overrightarrow{AT}=2\overrightarrow{TD}$ tj.

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_T-\vec{r}_A=2(\vec{r}_D-\vec{r}_T) &\implies \vec{r}_A=3\vec{r}_T-2\vec{r}_D\\
&\implies A=(-9,-2).
\end{aligned}
$$



Sada možemo izračunati radijus opisane kružnice $r=|OA|=\sqrt{50}$, a onda i jednadžbu opisane kružnice

$$(x+2)^2+(y+3)^2=50. \qquad (*)$$

Dalje, $OD\perp BC$, a pravac kroz točke O i D ima koeficijent smjera $k=2$, pa je jednadžba pravca kroz točke B i C:

$$y-3=-\frac{1}{2}(x-1). \qquad (*)$$

Presjek kružnice $(*)$ i pravca $(**)$ sada daje točke B i C:

$$B=(-1,4), \quad C=(3,2).$$

Danica Petolas (1), Zagreb

3635. *Dana je funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takva da je $f(1)=1$ i za svako $x\in\mathbb{R}$ vrijedi*

$$f(x+5)\geq f(x)+5$$

i

$$f(x+1)\leq f(x)+1.$$

Koliko je $f(2018)$?

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
f(x+5)&\geq f(x)+5\\
&=(f(x)+1)+4\\
&\geq f(x+1)+4\\
&=(f(x+1)+1)+3\\
&\geq f(x+2)+3\\
&\ \ \vdots\\
&\geq f(x+4)+1\\
&\geq f(x+5).
\end{aligned}
$$

Dakle, $f(x+5)=f(x+4)+1$. Ako sada, specijalno, stavimo $x=i-4$, $i\in\mathbb{N}$, slijedi

$$f(i+1)=f(i)+1, \quad i\in\mathbb{N}.$$

Odavde dobivamo

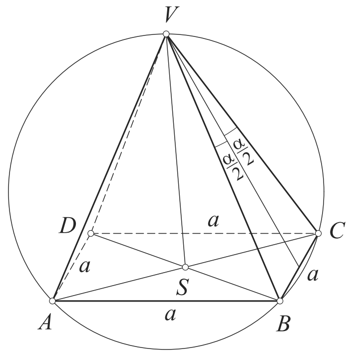
$$
\begin{aligned}
f(2018)&=f(2017)+1=f(2016)+2\\
&=\cdots=f(1)+2017=2018.
\end{aligned}
$$

Danica Petolas (1), Zagreb

3636. *Sfera je opisana oko pravilne četverostrane piramide. Odredi površinu sfere ako je stranica baze piramide jednaka a i ravninski kut pri vrhu piramide je α.*

Rješenje. Uočimo prvo da se radijus opisane sfere podudara s radijusom opisane kružnice jednakokračnom trokutu ACV.

Trokut BCV je jednakokračan s kutem α pri vrhu V pa je $|VC| = \dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.



Visina piramide:

$$|VS| = \sqrt{|VC|^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Površina trokuta ACV je

$$P = \frac{\sqrt{2}a|VS|}{2} = \frac{\sqrt{2}a^2\sqrt{\cos\alpha}}{4\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Radijus opisane kružnice trokutu ACV je

$$R = \frac{|AC||CV||VA|}{4P} = \frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}.$$

Površina sfere je sada

$$O = 4\pi R^2 = \frac{a^2\pi}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}.$$

Danica Petolas (1), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 434. *Tri dječaka se ljuljaju na dasci koja ima oslonac točno u sredini. Marko ima masu 60 kilograma i sjedi 2.5 metara od oslonca. Na drugoj strani su Filip i Lovro. Filip ima masu 30 kilograma i sjedi na kraju daske. Lovrina je masa 40 kilograma i sjedi točno na sredini između oslonca i Filipa. Ako Filip i Lovro zamijene mjesta kamo mora sjesti Marko da bi se i dalje mogli ljuljati?*

Rješenje.

$m_M = 60$ kg

$k_M = 2.5$ m

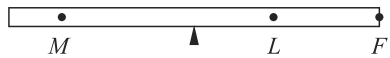
$m_F = 30$ kg

$m_L = 40$ kg

$k_F = \dfrac{l}{2}$

$k_L = \dfrac{l}{4}$

$k_{M'} = ?$



$$F_M \cdot k_M = F_F \cdot k_F + F_L \cdot k_L$$

$$m_M \cdot g \cdot k_M = m_F \cdot g \cdot k_F + m_L \cdot g \cdot k_L$$

$$m_M \cdot k_M = m_F \cdot k_F + m_L \cdot k_L$$

$$60 \text{ kg} \cdot 2.5 \text{ m} = 30 \text{ kg} \cdot \frac{l}{2} + 40 \text{ kg} \cdot \frac{l}{4}$$

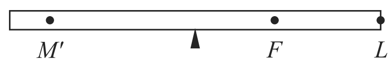
$$150 \text{ kg} \cdot \text{m} = 25 \text{ kg} \cdot l$$

$$l = 6 \text{ m}$$

$$k_F = \frac{l}{2} = 3 \text{ m}$$

$$k_L = \frac{l}{4} = 1.5 \text{ m}$$

Nakon zamjene mjesta Filipa i Lovre slijedi:



$$m_M \cdot g \cdot k_{M'} = m_F \cdot g \cdot k_L + m_L \cdot g \cdot k_F$$

$$m_M \cdot k_{M'} = m_L \cdot k_F + m_F \cdot k_L$$

$$60 \text{ kg} \cdot k_{M'} = 40 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m} + 30 \text{ kg} \cdot 1.5 \text{ m}$$

$$60 \cdot k_{M'} = 120 \text{ m} + 45 \text{ m}$$

$$k_{M'} = \frac{165 \text{ m}}{60} = 2.75 \text{ m}.$$

Borna Cesarec (8), OŠ Augusta Cesarca, Krapina

OŠ – 435. *Duljina plovnog puta na rijeci Savi od Zagreba do Siska iznosi 68 kilometara. Brod je iz Zagreba krenuo u 7 sati ujutro i stigao u Sisak u deset sati. Za povratak mu je trebalo isto vrijeme, ali je motor razvijao* *veću snagu nego u dolasku jer je plovio protiv struje. Brzina vode iznosila je 2 metra u sekundi. Koliko bi trajao povratak da je brod zadržao istu snagu kao pri dolasku?*

Rješenje.

$s = 68$ km

$t_1 = 7$ h

$t_2 = 10$ h

$\underline{v_{\text{vode}} = 2 \text{ m/s}}$

$t_p = ?$

Vrijeme u odlasku je $t_0 = t_2 - t_1 = 3$ h pa je brzina broda nizvodno

$$v = \frac{s}{t_o} = \frac{68 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 22.67 \ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 6.3 \text{ m/s}.$$

Brzina u povratku jednaka je:

$$v_p = v - 2 \cdot 2 \text{ m/s} = 2.3 \text{ m/s} = 8.28 \text{ km/h}$$

pa je vrijeme povratka

$$t_p = \frac{s}{v_p} = \frac{68 \text{ km}}{8.28 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 8.21 \text{ h} = 8 \text{ h } 12.6 \text{ min.}$$

Borna Cesarec (8), Krapina

OŠ – 436. *Radnik je pomoću nepomične koloture podizao teret mase 20 kilograma. Kad je teret bio na visini 4.5 metara radniku je uže skliznulo iz ruke i teret je, za točno jednu sekundu, pao na tlo. Kolika je sila trenja između užeta i koloture?*

Rješenje.

$m = 20$ kg

$h = 4.5$ m

$t = 1$ s

$\underline{g = 10 \text{ m/s}^2}$

$F_{tr} = ?$

$$h = \frac{a}{2} \cdot t^2$$

$$a = \frac{2h}{t^2} = \frac{2 \cdot 4.5 \text{ m}}{(1 \text{ s})^2} = 9 \text{ m/s}^2$$

$$F = m \cdot a = 20 \text{ kg} \cdot 9 \text{ m/s}^2 = 180 \text{ N}$$

$$G = m \cdot g = 20 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} = 200 \text{ N}$$

$$F_{tr} = G - F = 200 \text{ N} - 180 \text{ N} = 20 \text{ N}.$$

Borna Cesarec (8), Krapina

OŠ – 437. *Gumena lopta nakon drugog odskoka od podloge dosegne polovicu visine s koje je ispuštena. Koliki se postotak kinetičke energije pri svakom odskoku pretvori u unutarnju energiju?*

Rješenje.

m – masa lopte

h – početna visina

h_2 – visina nakon drugog odskoka

$\underline{h_2 = 0.5 \text{ h}}$

$\frac{U}{E_k} = ?$

$$E_p = mgh$$

$$E_{p_1} = \eta \cdot E_p = \eta \cdot mgh$$

$$E_{p_2} = \eta \cdot E_{p_1} = \eta^2 \cdot mgh$$

$$\frac{E_{p_2}}{E_p} = \frac{\eta^2 mgh}{mgh} = \eta^2$$

$$\frac{E_{p_2}}{E_p} = \frac{mgh_2}{mgh} = 0.5$$

$$\eta^2 = 0.5$$

$$\eta = \sqrt{0.5} = 0.707 = 70.7\,\%$$

$$\frac{U}{E_k} = 29.3\,\%.$$

Andrija Adamović (?),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

1665. *Dana 2. 2. 2018. sonda Voyager 1 nalazila se 141.1 astronomsku jedinicu udaljena od Sunca i udaljavala se brzinom* $16\,984$ *m/s. Odredi asimptotsku brzinu kojom će se letjelica udaljavati kada gravitacijski potencijal Sunca postane zanemariv. Masa Sunca je* $1.989 \cdot 10^{30}$ *kg, a astronomska jedinica iznosi* $1.496 \cdot 10^{11}$ *m.*

Rješenje. Za zadani položaj i brzinu, ukupna energija može se zapisati kao suma kinetičke i potencijalne energije:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r},$$

gdje je m masa sonde, M masa Sunca, a v i r brzina i udaljenost sonde u odnosu na

Sunce. Za asimptotsku brzinu v_A gravitacijski potencijal je zanemariv, pa imamo:

$$E = \frac{mv_A^2}{2},$$

odnosno

$$v_A^2 = v^2 - \frac{2GM}{r}.$$

Za zadani r i v to iznosi

$$v_A^2 = 16\,984^2 - 12\,577\,443,$$

a odatle je

$$v_A = 16\,609.6 \text{ m/s}.$$

Ur.

1666. *Plemeniti plin kripton ima volumni udio 0.000114 % u suhom zraku. Kolika se masa kriptona nalazi u prostoriji oblika kvadra dimenzija 3 m × 4 m × 4 m? Koliko tamo ima atoma kriptona? Uzmimo da je gustoća zraka 1.2 kg/m³.*

Rješenje. Volumen koji zauzima kripton iznosi

$$0.00000114 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \text{ m}^3 = 5.472 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3.$$

Gustoće kriptona i zraka su u omjeru njihovih molekulskih masa, pa imamo:

$$\rho_{Kr} = \rho_{Zr} \cdot \frac{83.8}{29} = 3.4676 \text{ kg/m}^3.$$

Masa kriptona je umnožak gustoće i volumena,

$$m_{Kr} = \rho_{Kr} V = 0.00018975 \text{ kg} = 0.18975 \text{ g}.$$

Preko množine tvari, izračunamo broj atoma:

$$N = N_A \frac{m}{M} = 6.022 \cdot 10^{23} \frac{0.18975}{83.8}$$
$$= 1.3636 \cdot 10^{21}.$$

Ur.

1667. *Na asteroidu oblika kugle odlomio se komad stijene 25 metara iznad ravne površine. Ako je pad stijene na ravnu površinu trajao 11 sekundi, a asteroid ima prosječnu gustoću 2900 kg/m³, odredi masu i radijus asteroida.*

Rješenje. Za zadanu visinu i vrijeme pada ubrzanje slobodnog pada g izračunamo kao

$$g = \frac{2h}{t^2} = \frac{2 \cdot 25}{11^2} = 0.41322 \text{ m/s}^2.$$

Izrazimo li masu asteroida iz gustoće i ubrzanja,

$$M = \rho V = \rho \frac{4}{3} R^3 \pi$$

$$M = \frac{gR^2}{G}$$

i izjednačimo, dobit ćemo izraz za radijus asteroida:

$$R = \frac{3g}{4\pi G \rho} = 509\,693 \text{ m}.$$

Uvrštavanjem u bilo koju od dvije jednadžbe za M dobivamo

$$M = 1.6085 \cdot 10^{21} \text{ kg}.$$

Ur.

1668. *Tanka konvergentna leća ima jačinu +5 dpt u zraku i +1.75 dpt u vodi indeksa loma 4/3. Koliki je indeks loma materijala leće? Kolika će biti njena jačina u benzenu, indeksa loma 1.501?*

Rješenje. Jačina leće ovisi o *relativnom* indeksu loma n_r kao

$$J = (n_r - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

gdje su R_1 i R_2 radijusi zakrivljenosti dioptara. S obzirom da ih ne mijenjamo uranjajući leću u vodu ili benzen, jačine možemo izraziti omjerom

$$\frac{J_{\text{zrak}}}{J_{\text{voda}}} = \frac{n-1}{\dfrac{n}{n_{\text{voda}}} - 1}$$

$$\frac{5}{1.75} = \frac{n-1}{\dfrac{3n}{4} - 1},$$

pa za n dobijemo $n = 1.625$. Jačina u benzenu iz analognog omjera iznosi

$$J_{\text{benzen}} = J_{\text{zrak}} \frac{\dfrac{n}{n_{\text{benzen}}} - 1}{n-1}.$$

Uvrštavanjem dobijemo

$$J_{\text{benzen}} = 0.661 \text{ dpt}.$$

Ur.

1669. *Ako kondenzator priključimo vodljivim žicama na bateriju napona 3.7 V, u trenutku priključenja poteći će struja 10 A, a 0.1 sekundu kasnije struja će iznositi 0.1 A. Koliki je kapacitet kondenzatora? Koliki je ohmski otpor strujnog kruga? Kolika je energija pohranjena u kondenzatoru kad ga baterija napuni?*

Rješenje. Struja kroz kondenzator se nakon priključenja istosmjernog napona mijenja eksponencijalno,

$$I(t) = I_0 e^{-t/RC}.$$

Uvrstimo $t = 0.1$ s i $I/I_0 = 1/100$. Dobivamo

$$RC = 0.0217147.$$

Kako početna struja ovisi samo o ohmskom otporu R, imamo

$$R = \frac{U}{I} = \frac{3.7}{10} = 0.37\ \Omega$$

$$C = \frac{0.0217147}{0.37} = 0.0587\ \text{F}.$$

Energija pohranjena u kondenzatoru izražena preko napona U iznosi

$$E = \frac{1}{2}CU^2 = 0.402\ \text{J}.$$

Ur.

1670. *Tijelo ubrzava niz kosinu akceleracijom $g/3$, gdje je g ubrzanje slobodnog pada. Nakon što se iz stanja mirovanja spusti 2.3 m (visinske razlike), na trenje se potroši 43 % početne (potencijalne) energije. Odredi koeficijent trenja tijela s kosinom i nagib kosine.*

Rješenje. Sila na kosini nagiba α uz koeficijent trenja μ određena je izrazom

$$F = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Odatle je, uz $F = ma = mg/3$

$$\frac{1}{3} = \sin\alpha - \mu\cos\alpha.$$

43 % potencijalne energije iznosi

$$0.43E = 0.43mgh = 0.43mgs\sin\alpha.$$

To je jednako energiji utrošenoj na trenje,

$$E_{tr} = F_{tr}s = \mu mg\cos\alpha.$$

Dobivamo

$$\mu mg\cos\alpha = 0.43mg\sin\alpha.$$

Uvrstimo to u izraz koji smo dobili iz ubrzanja,

$$\frac{1}{3} = \sin\alpha - 0.43\sin\alpha.$$

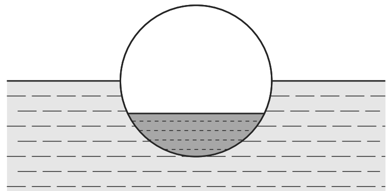
Odatle je

$$\alpha = 35.7885^\circ,$$

$$\mu = 0.45\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0.31.$$

Ur.

1671. *Čelična plutača oblika šuplje kugle ima vanjski volumen 28 litara i debljinu stijenke 1 mm. Koliko je vode ušlo u plutaču ako je do pola uronjena u vodu? Gustoća vode iznosi 1 kg/l, a čelika 7.85 kg/l.*



Rješenje. Iz volumena izračunamo vanjski radijus kugle,

$$V = \frac{4}{3}R^3\pi$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 1.88375\ \text{dm}.$$

Volumen željeza za tanku $(d \ll R)$ sferu dobijemo kao umnožak površine i debljine,

$$V_{\text{Fe}} = 4\pi R^2 d = 0.44592\ \text{dm}^3,$$

što daje masu

$$m_{\text{Fe}} = \rho_{\text{Fe}} V_{\text{Fe}} = 3.5005\ \text{kg}.$$

Da bi plutača bila do pola uronjena u vodu, prosječna gustoća joj mora iznositi polovicu gustoće vode, dakle

$$\frac{m_{\text{Fe}} + m_{\text{vode}}}{V} = 0.5\ \text{kg/dm}^3,$$

$$m_{\text{Fe}} + m_{\text{vode}} = 14\ \text{kg},$$

što daje

$$m_{\text{vode}} = 10.4995\ \text{kg}.$$

Ur.