

Matematički modeli u arhitekturi Franka Lloyd Wrighta

Mathematical models in Frank Lloyd Wright architecture

¹Tibor Rodiger, ²Maja Marcioš

^{1,2}Međimursko Veleučilište u Čakovcu, Bana J. Jelačića 22a, 40000 Čakovec

E-mail: ¹trodiger@mev.hr, ²1maja.kolaric@gmail.com

Sažetak: *Matematika je temelj arhitekture. Zahvaljujući razumijevanju matematike, arhitekti osmišljavaju, projektiraju i grade svoje građevine. Matematički modeli i odnosi moderne gradnje prikazani su u ovom radu kroz opis jednog od najvećih američkih arhitekata, svrstanog među pionire moderne arhitekture, Franka Lloyd Wrighta. U radu je opisana njegova arhitektura te u njoj sadržana matematika, neke od najpoznatijih građevina te pripadajući im matematički modeli.*

Ključne riječi: *Fallingwater, Frank Lloyd Wright, matematika u arhitekturi Franka Lloyd Wrighta, geometrija Franka Lloyd Wrighta, organska arhitektura, prerijske kuće*

Abstract: *Mathematics is the foundation of architecture. Mathematical knowledge enables architects to design and build their buildings. Mathematical models and modern building relations described in this paper are based on the exemplary work of Frank Lloyd Wright, one of the greatest American architects who is also praised as one of the founders of modern architecture. In the paper we will describe Wright's architecture and its belonging mathematics, some of his most famous buildings as well as mathematical models behind their construction.*

Key words: *Fallingwater, Frank Lloyd Wright, Frank Lloyd Wright's geometry, mathematics in Frank Lloyd Wright's architecture, organic architecture, prairie house*

1. Uvod

Frank Lloyd Wright smatra se jednim od začetnika moderne arhitekture. Geometriju kojom se koristio u svome radu možemo nazvati geometrijom oblika. Koristio je geometrijske oblice kvadrata, pravokutnika, trokuta, paralelograma, šesterokuta, kruga i spirale. Wright se u djetinjstvu upoznao s igrom Darovi (*eng. Gifts*), slika 1. Igru je osmislio njemački pedagog Friedrich Fröbel. Cilj igre bio je da djeca kroz kreativnu aktivnost nauče doživljavati predmete, boje i teksture. Igra se sastojala od jednostavnih geometrijskih likova koje je bilo potrebno složiti u veće kompozicije.



Slika 1. Fröbelovi darovi

Izvor: <http://www.playart.org/viewimage.php?galleryImageID=1703>

Darovi broj pet sastoje se od 21 kocke, 6 pravilnih četverostranih prizmi čija je visina dva puta manja od stranice i 12 pravilnih četverostranih prizmi kojima je visina dva puta veća od baze.

Više blokova djetetu omogućuju slaganje složenijih konstrukcija. Darovi broj šest u obliku građevnih blokova omogućuju prvi arhitektonski osjećaj. Igra se sastoji od 18 pravokutnika, 12 kvadrata i 6 stupova. U sedmim, osmim i devetim darovima nalazi se velik broj sitnih dijelova čime Fröbel iz trodimenzionalnih oblika prelazi u dvodimenzionalne. Darovi broj sedam sastoje se od šarenih geometrijskih likova i omogućuju slaganje složenijih geometrijskih likova ili spajanje u trodimenzionalni oblik. U igri pod brojem osam nalaze se obrisi i bridovi oblika, dok je u onoj devetnoj

velik broj točaka. Svaka nova igra temelji se na znanju prethodne što omogućava spontani razvoj djetetove mašte [2].

“Za Wrighta je temeljna geometrijska struktura sadržana u prirodi. Kroz razmišljanje o prirodi dolazi do koncepta organske arhitekture. Njegovu arhitekturu čine čisti geometrijski oblici složeni u veće kompozicije te korištenje geometrije kroz razne oblike i organizacijske principe.“ [3].

Frank Lloyd Wright koristio je pravokutnu i šesterokutnu rešetku, kružnicu i kružne lukove, osnu i centralnu simetriju, zlatni rez te Fibonaccijev niz.

2. Izometrija

Definicija: Neka je Π ravnina i $f : \Pi \rightarrow \Pi$ funkcija. Tada je f izometrija ako je za bilo koje dvoje točke A, B ravnine Π ispunjeno: $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$.

Jednostavnije rečeno, izometrija je preslikavanje ravnine na ravninu koje čuva udaljenost točaka.

Svojstva izometrije:

- Svaka izometrija ravnine Π preslikava bijektivno pravac na pravac,
- Slika dužine \overline{AB} je dužina $\overline{f(A)f(B)}$
- Slika polupravca s početkom u točki O je polupravac s početkom u točki $f(O)$ i
- Ako su A i B fiksne točke od f , onda je i svaka točka pravca AB fiksna točka od f .

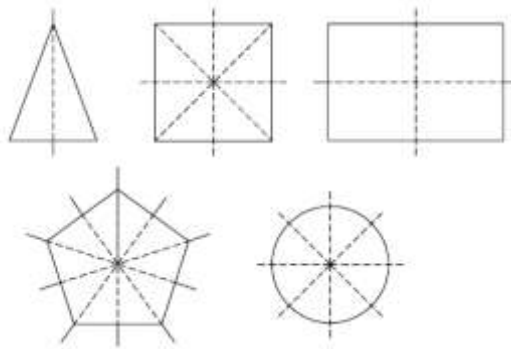
2.1. Osnna simetrija

Definicija: Osnna simetrija ili zrcaljenje izometrija jest ravnina kojoj je skup fiksni točaka pravac (os simetrije).

Svojstva osne simetrije:

- Ako osna simetrija pridružuje točki A (koja nije na osi simetrije) točku A' , tada je os simetrije simetrala dužine $\overline{AA'}$
- Osnna simetrija je gibanje koje mijenja orijentaciju.

Definicija: Za lik kažemo da je osnosimetričan ako postoji barem jedan pravac (os simetrije) s obzirom na koji se lik preslika u samoga sebe.



Slika 2. Primjeri osnosimetričnih likova

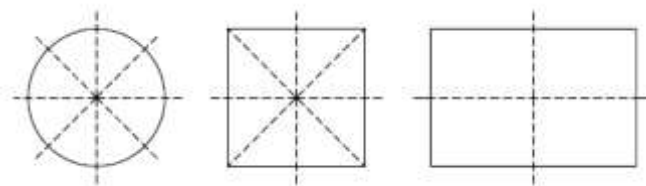
2.2. Centralna simetrija

Definicija: Centralna simetrija je izometrija ravnine kojoj je skup fiksnih točaka točka S (središte simetrije).

Svojstva centralne simetrije:

- Točka A , njoj pridružena točka A' i središte simetrije S na jednom su pravcu, a S jest polovište dužine $\overline{AA'}$
- Centralna simetrija je gibanje koje ne mijenja orijentaciju.

Definicija: Za lik kažemo da je centralnosimetričan ako postoji točka (centar simetrije) tako da se lik preslika u samog sebe.



Slika 3. Primjeri centralnosimetričnih likova

2.3. Zlatni rez

Definicija: Dvije su veličine u zlatnome rezu ako se manji dio odnosi prema većemu kao što se veći odnosi prema ukupnome.

$$\frac{m}{M} = \frac{M}{m+M} = \varphi \quad (1)$$

Ako je $m = M\varphi$:

$$\frac{M\lambda}{M} = \frac{M}{M\varphi + M} \dots \varphi = \frac{1}{\varphi + 1} \quad (2)$$

$$\varphi^2 + \varphi - 1 = 0$$

$$\varphi = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0.6180339887$$

$$\varphi = 0.6180339887$$

Ako je jednačba u obliku

$$\frac{M}{m} = \frac{m+M}{M} = \varphi \quad (3)$$

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887$$

$$\varphi = 1.6180339887$$



Slika 4. Odnos zlatnog reza

Izvor: http://e.math.hr/sites/default/files/slike/Vol30_Zlatnitrokut1.png

Definicija: Broj $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887$ nazivamo zlatni broj.

2.4. Fibonaccijev niz

Definicija: Fibonaccijev niz je niz (f_n) za koji vrijedi $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$.

Fibonaccijev niz je niz definiran sa svoja prva dva člana. Ukoliko je $f_1 = 0$, i $f_2 = 1$ dobivamo niz: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 Taj se niz u početku nazivao Fibonaccijevim nizom, dok se danas pod Fibonaccijevim nizom podrazumijeva svaki niz iz prethodne definicije.

Vežu između zlatnog reza i Fibonaccijevog niza pronašao je D. Bernoulli početkom 18. stoljeća.:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad (4)$$

Definicija: *Fibonaccijeva spirala je spirala koja nastaje iscrtavanjem lukova koji spajaju suprotne kuteve kvadrata u Fibonaccijevom popločanju.*

Definicija: *Zlatna spirala je logaritamska spirala kojoj je baza zlatni broj.*

Fibonaccijeva i zlatna spirala približno su jednake, ali ne i identične.

2.5. Kružnica

Definicija: *Kružnica sa središtem u točki S je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od točke S.*

Polumjer kružnice je dužina koja spaja središte S i neku točku kružnice.

Definicija: *Kružni luk je dio kružnice omeđen s dvije točke na toj kružnici.*

Definicija: *Koncentrične kružnice su kružnice koje imaju zajedničko središte.*

2.6. Pravilni mnogokut

Definicija: *Pravilni mnogokut je mnogokut kojem su sve stranice jednake duljine, a svi kutovi jednake veličine.*

Svojstva:

U svakom pravilnom mnogokutu može se upisati i opisati kružnica,

Veličina unutrašnjeg kuta pravilnog mnogokuta (n-terokuta) je $\alpha_n = \frac{(n-2)180^\circ}{n}$ i

Veličina središnjeg kuta pravilnog mnogokuta (n-terokuta) je $\beta_n = \frac{360^\circ}{n}$.

3. Građevine i matematički modeli korišteni u njihovoj arhitekturi

“Za Wrighta je temeljna geometrijska struktura sadržana u prirodi. Kroz razmišljanje o prirodi dolazi do koncepta organske arhitekture. Njegovu arhitekturu čine čisti geometrijski oblici složeni u veće kompozicije te korištenje geometrije kroz razne oblike i organizacijske principe.“ [3].

Wright koristi opisnu geometriju, granu geometrije koja omogućava prikaz trodimenzionalnog objekta u dvije dimenzije. Upotrebljava osnu i centralnu simetriju.

U kasnijim godinama Wright prelazi s modela kvadrata na trokutni i šesterokutni. Kako bi objekt sjedinio s prirodom upotrebljava geometrijske oblike za koje smatra da su s njome usklađeni, kao i trokutaste te mnogokutne module. U posljednjim godinama svoga rada odbacuje ravnu geometriju kao neusklađenu s prirodom te “njegov modul tada postaje kružnica, karakteristični vertikalni oblik izvrnuti stožac, a strukturalni oblik spirala“ [1].

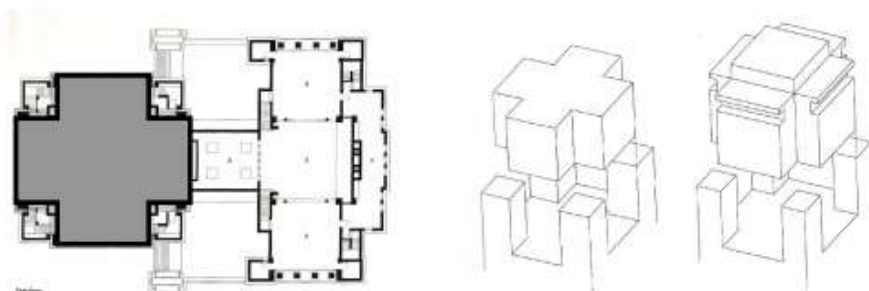
3.1. Unity Temple



Slika 5. *Unity Temple*

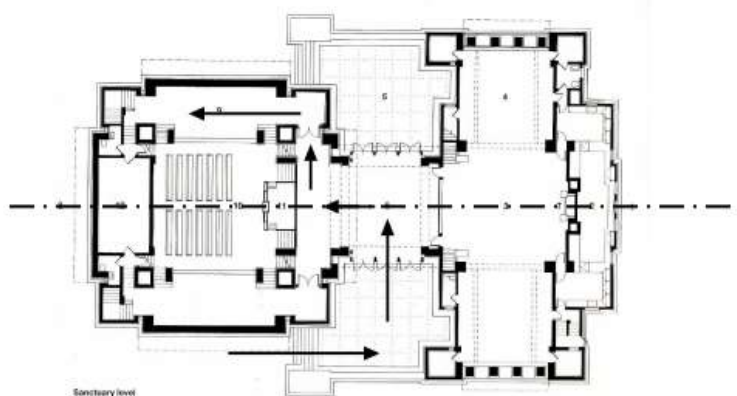
Izvor: <https://www.chicagoarchitecture.org/wp-content/uploads/2015/02/FLW-01.jpg>

Unity Temple čine dva međusobno povezana bloka, kvadrata i pravokutnika, spojena u kompoziciju H. Tema hrama je kvadrat ukršten križem. Temu križa slijede i rasvjetna tijela, vitraji te namještaj [3]. Na slici 6 prikazana je tema križa i usporedba Unity Temple sa crtežom Leonarda da Vinci za Baziliku sv. Petra.



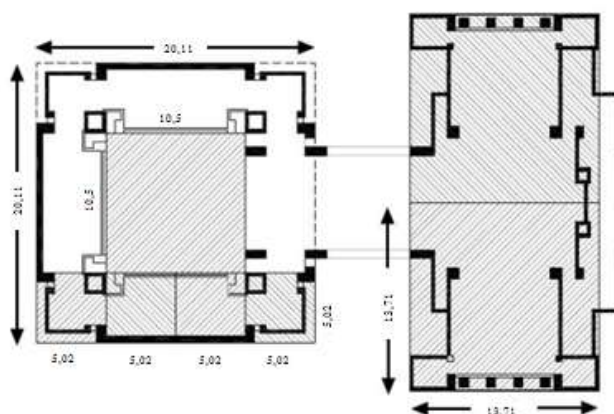
Slika 6. Tema križa, usporedba Unity Temple i crteža Leonarda da Vincija iz Codex Atlanticus - a za Baziliku sv. Petra

Izvor: <http://oaktrust.library.tamu.edu/bitstream/handle/1969.1/ETD-TAMU-2009-05-608/Srinivasan.pdf>



Slika 7. Odnos kretanja i osi na tlocrtu Unity Temple

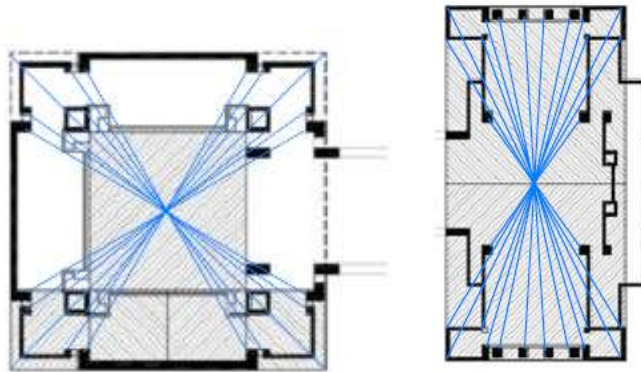
Izvor: <http://oaktrust.library.tamu.edu/bitstream/handle/1969.1/ETD-TAMU-2009-05-608/Srinivasan.pdf>



Slika 8. Odnos dimenzija na tlocrtu

Izvor: <http://oaktrust.library.tamu.edu/bitstream/handle/1969.1/ETD-TAMU-2009-05-608/Srinivasan.pdf>

Tlocrti župne kuće i dvorane centralno su simetrični likovi. Unutrašnjost je župne kuće odnosimetrična.



Slika 9. Prikaz centralne simetrije na tlocrtu župne kuće i dvorane

3.2. Kuća Fredericka C. Robieja

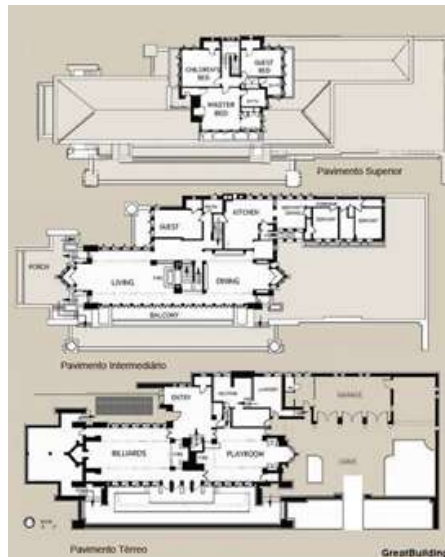
Tlocrt prvog kata čine dva pravokutnika koji naizgled “klize“ jedan po drugome. Prvi pravokutnik, kojeg kamin dijeli na pola, čine prostori dnevne sobe i blagovaonice, sobe za biljar i sobe za igru. U drugome se pravokutniku nalaze sobe za posluhu te pomoćne prostorije. Na mjestu gdje se pravokutnici spajaju na prvome katu smješteni su ulaz i stubište. Horizontalnost je istaknuta dimenzijama prema kojima širina više od dva puta premašuje duljinu i visinu [4].



Slika 10. Horizontalni i vertikalni elementi

Izvor: <http://oaktrust.library.tamu.edu/bitstream/handle/1969.1/ETD-TAMU-2009-05-608/Srinivasan.pdf>

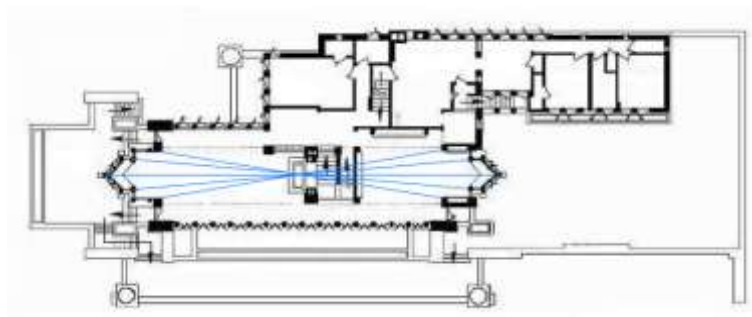
Kuća Robie nije simetrična sama po sebi već se sastoji od više osnosimetričnih ili centralnosimetričnih dijelova. Većina kuteva u kući iznose 90° , ali u prizemlju i na prvome katu primjećujemo kuteve od 45° . U unutrašnjim prostorijama horizontalnost nije prisutna u tolikoj mjeri kao u cijeloj kući.



Slika 11. Tlocrt kuće Robie

Izvor: <https://i.pinimg.com/736x/2b/4d/c1/2b4dc13e30798680fbcc87877387fdce--robie-house-prairie-house.jpg>

Samo se u središnjoj prostoriji primjećuju horizontalnost i kutevi od 45°. Ta je prostorija ujedno i centralnosimetrična, s kaminom pozicioniranim u centru simetrije.



Slika 12. Prikaz centralne simetrije

Kuća Robie može se opisati na primjeru Fröbelovih darova - sastoji se od geometrijskih oblika koji se nalaze u Fröbelovim darovima od tri do šest; kocaka, kvadara i piramida.



Slika 13. Model kuće Robie pomoću Fröbelovih darova

Izvor: http://cdn.nexternal.com/redhentoys/images/prairie_elevation.jpg

3.3. Kuća Fallingwater

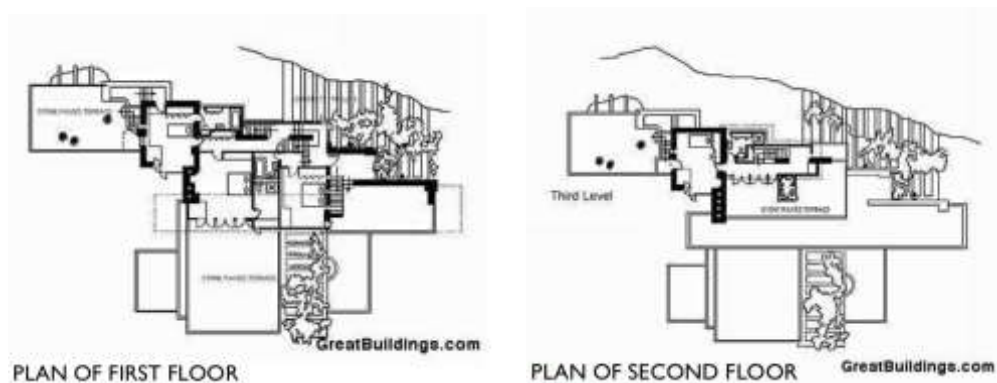
Fallingwater, kuća na slapu, izgrađena je iznad slapa na rječici Bear Run u šumi Pennsylvanije. Čine je horizontalna kompozicija od armiranog betona i vertikalni zidovi od kamenih ploča.

Iz tlocrta kuće Fallingwater jasno je vidljivo kako je kuća nastala spajanjem pravokutnika i kvadrata.



Slika 14. Tlocrt prizemlja kuće Fallingwater

Izvor: http://mrfatta.com/wp-content/uploads/2015/10/Falling_Water_08.jpg



Slika 15. Tlocrt prvog i drugog kata kuće Fallingwater

Izvor: <http://www.ieor.berkeley.edu/~goldberg/flw/second-floor-bw.gif>

Kuća Fallingwater najbolji je primjer arhitekture slaganja elemenata nadahnutih Fröbelovim darovima broj četiri.



Slika 16. Fallingwater i Fröbelovi darovi

Izvor:

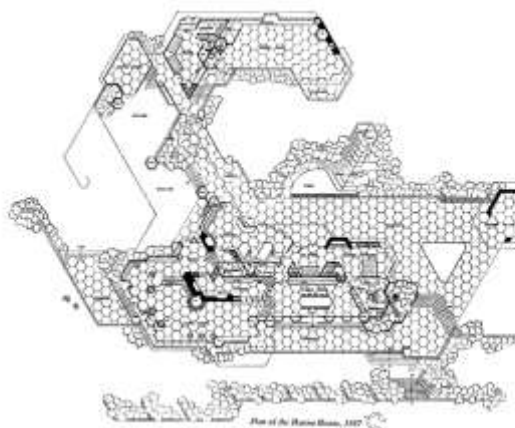
https://68.media.tumblr.com/2e054f6d5f5f81af9ddd0cd5c34c3066/tumblr_inline_n8ikz2KACD1rrmc50.jp

8

3.4. Kuća Hanna

U ovoj se kući umjesto pravokutnika kao osnovni plan upotrijebljava šesterokutna geometrija. Šesterokutni modul tlocrta podsjeća na saće, po čemu je kuća i dobila svoje drugo ime. Oblik šesterokuta omogućava veću slobodu kretanja.

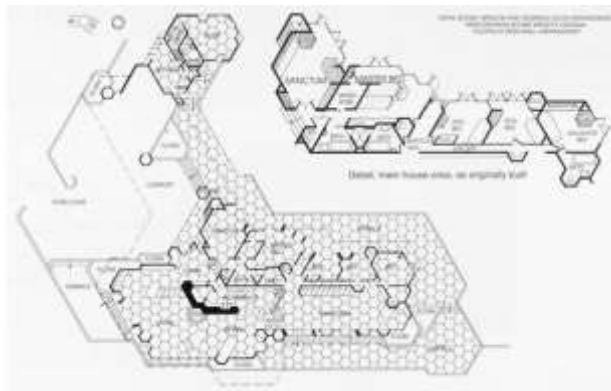
Kuća Hanna nije u obliku šesterokuta, ali je konstruirana na šesterokutnoj rešetki. Šesterokutna rešetka sastavljena od pravilnih šesterokuta može sadržavati sustav vertikalnih ili horizontalnih šesterokuta. Iz tlocrta kuće Hanna vidljivo je kako se radi o horizontalnoj šesterokutnoj rešetki.



Slika 17. Tlocrt kuće Hanna na horizontalnoj šesterokutnoj rešetki

Izvor: <https://c6zvmr2tzkmc2w17wo5cppn-wpengine.netdna-ssl.com/wp-content/uploads/2015/09/site-plan.jpg>

Unutrašnji kut pravilnog šesterokuta iznosi 120° , a središnji 60° . Ukoliko spojimo središnju točku s ostalim točkama šesterokuta dobijemo 6 jednakostraničnih trokuta. Takva kuća stoga može imati kuteve od 60° , 120° , 180° i 240° . Ostali su likovi takve rešetke; trapez, paralelogram i romb. Wright je tlocrt kuće Hanna konstruirao kombinacijom jednostavnih likova dobivši tako složeniji lik šesterokuta, što je očit primjer utjecaja Fröbelovih darova broj šest.



Slika 18. Tlocrt kuće Hanna

Izvor: http://wright-up.blogspot.hr/2013_11_01_archive.html

3.5. Muzej Solomon R. Guggenheim

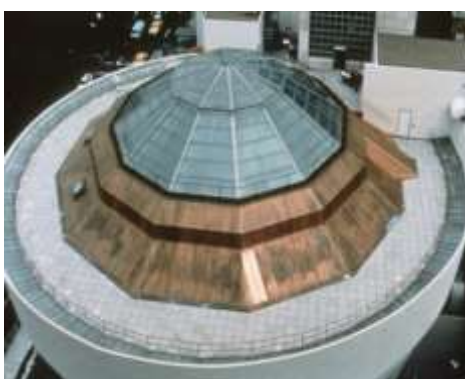
U arhitekturi muzeja Guggenheim nailazimo na razne geometrijske oblike: kvadrat, krug, trokut i spiralu. Betonski je toranj napravljen od koncentričnih krugova s dvanaesterkutnom kupolom na vrhu. Odozdo gledano, zavojito stubište za kretanje niz izložbeni prostor oblika je Fibonnacijeve ili zlatne spirale.

Iznad središnje dvorane muzeja nalazi se krov koji čine pravilna dvanaesterostrana krnja piramida i pravilna dvanaesterostrana piramida iznad nje.



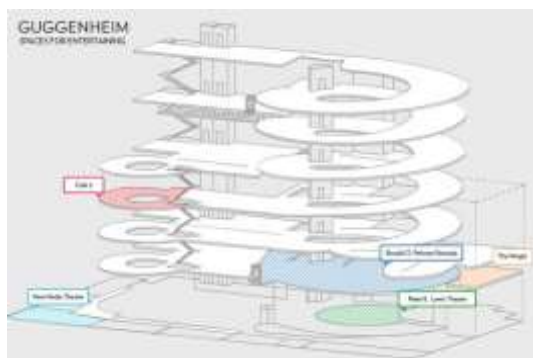
Slika 19. Krov muzeja gledano odozdo

Izvor: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/61/The_Guggenheim_Window.jpg



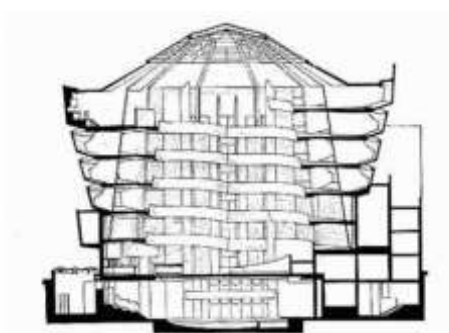
Slika 20. Krov muzeja gledano iz zraka

Izvor: <https://www.hydrotechusa.com/sites/default/files/projects/Guggenheim1.jpg>



Slika 21. Stubište u obliku spirale

Izvor: <https://i.pinimg.com/originals/e9/91/23/e9912352df29658845ed8772f9ebbec9.jpg>



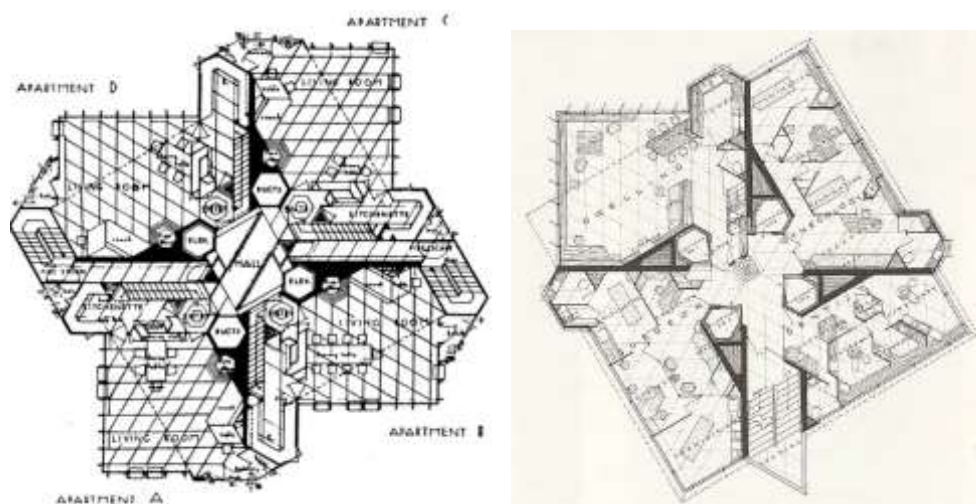
Slika 22. Pogled na muzej

Izvor: <https://i.pinimg.com/originals/53/fb/c3/53fbc3a04fbede4bb00707e4667898e7.jpg>

Zgrada je u obliku cilindrične spirale s nagibom od 3%. Na slici 22 prikazan je pogled na muzej.

3.6. Toranj kompanije H.C Price

Tlocrt je konstruiran na rešetki u obliku dva sukladna kvadrata sa zajedničkim centrom simetrije koji se sijeku pod kutom od 60°. Sam je tlocrt tako podijeljen na četiri sukladna dijela. Ovako dobiveni kutevi mogu biti samo linearne kombinacije kuteva od 60° i 90° stoga unutarnje prostorije sadrže kuteve od 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 240° i 270°. Glede takve rešetke tlocrt nije osnosimetričan.



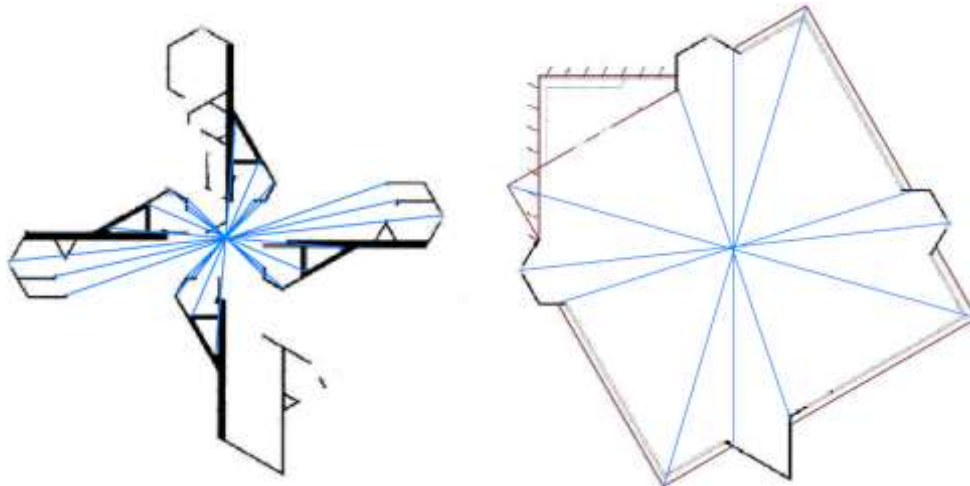
Slika 23. Mreža Tornja kompanije Price

Izvor:

http://images.adsttc.com/media/images/5038/08ed/28ba/0d59/9b00/0a56/large_jpg/stringio.jpg?1414198

060

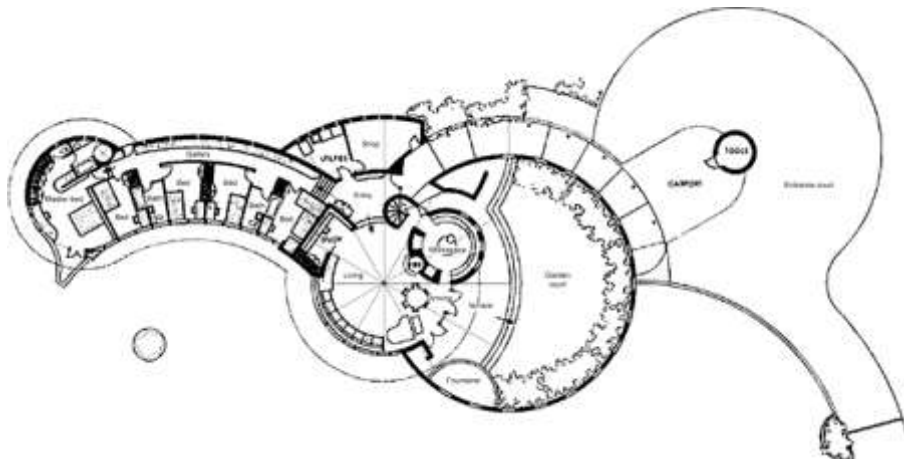
Na slici 24 prikazana je centralna simetrija unutarnjih i vanjskih zidova.



Slika 24. Centralne simetrije unutarnjih i vanjskih zidova

3.7. Kuća Norman Lykes

Tlocrt kuće Normana Lykesa čine kružnice i kružni lukovi.

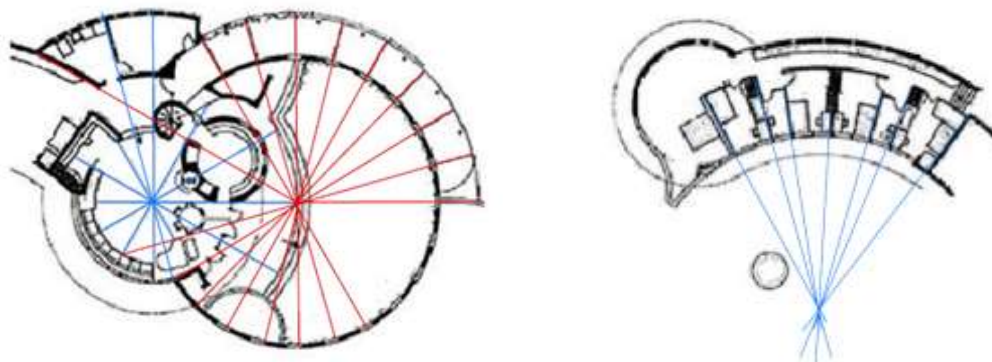


Slika 25. Tlocrt kuće Norman Lykes

Izvor: <http://www.steinerag.com/flw/Artifact%20Images/LykesFlourPlan-8.jpg>

Ukoliko promotrimo sve kružnice i kružne lukove primjećujemo četiri točke središta većini kružnica i kružnih lukova. Zidovi prostorija kombinacije su tih kružnica i kružnih

lukova. Jedini se ravni zidovi nalaze između pojedinih koncentričnih kružnih lukova i leže na polumjerima tih lukova. Središnji kutovi tih polumjera međusobno su jednaki.



Slika 26. Kružnica i kružni lukovi

4. Zaključak

U modernoj arhitekturi nailazimo na iznimno velik broj različitih matematičkih zakona i uporabu raznovrsnih zanimljivih geometrijskih oblika. Neke od najznačajnijih matematičkih modela u modernoj arhitekturi možemo vidjeti u djelima jednog od njenih začetnika, Franka Lloyd Wrighta.

Wright se koristio simetrijom, asimetrijom, zlatnim rezom, fraktalnom geometrijom, ornamentiranjem i drugim tehnikama. Zanimljiv je utjecaj Fröbelovih igara koje u svojim darovima sadrže sve elemente koje je Wright kasnije koristio u svojoj arhitekturi. Jednako kao i darovi od broja jedan nadalje, “svaka nova igra gradi se na poznavanju prethodne“, razvija se i Wrightova arhitektura tijekom godina. U početku su to bili jednostavni oblici u jednostavnim odnosima, zatim složeniji oblici nastali manipulacijom jednostavnih oblika i kao vrhunac uporabe kruga i spirale.

Spomenute matematičke modele Franka Lloyd Wrighta možemo smatrati temeljima moderne arhitekture. Njihovom su uporabom nastali poznati objekti Fallingwater, muzeju Guggenheim, kuća Hanna i druge građevine koje se smatraju jednim od najljepših na svijetu.

Literatura

[1] Majstori graditelji: Le Corbusier, Mies VanDer Rohe, Frank Lloyd Wright.

Karlovac, Društvo arhitekata, građevinara i geodeta.

- [2] Fröbel gifts. <http://www.froebelgifts.com/>
- [3] Srinivasan U. Approaches to the use of geometry in architecture: A study of the works of Andrea Palladio, Frank Lloyd Wright, and Frank Gehry. <http://oaktrust.library.tamu.edu/bitstream/handle/1969.1/ETD-TAMU-2009-05-608/Srinivasan.pdf> (Preuzeto 29.7.2017.)
- [4] Brooks Pfeiffer B. (2004). Frank Lloyd Wright, Building for Democracy. Köln, TASCHEN.